

小学数学教育学

主 编 王 权

编写者 张天孝 邱学华
唐世兴 王 权

华东师范大学出版社

前 言

小学数学是小学数学计划中的一门主要学科。全面地提高小学数学教学质量,要涉及小学教育工作的各个方面。比如制定与社会经济发展水平相适应的教学目的任务和教学计划,编写优秀的教材,改革教学方法,研究和探索生动活泼的教学组织形式,总结和交流先进的教学经验,提高教师的政治、业务水平,等等。这些工作需要有关方面共同努力。限于条件,我们想就学校范围内小学数学学科的教学工作规律作些讨论,试图按教育心理学的基本原理来阐述小学数学教学过程的一些基本问题。本书称之为“小学数学教育学”正是基于这些想法。

本书除了按照《小学数学教育大纲》精神介绍了小学数学的教学目的、教学内容外,还以学习理论为指导阐述了小学数学教学的一般规律,并根据知识的不同性质,分别从概念、计算和应用题三个部分对小学数学的教学方法作了剖析。特别在应用题教学一章中,我们根据应用题数量关系的内在联系,在论述中突出了如何依照数量关系由简到繁的变化规律,充分运用改编、自编应用题等手段,教给学生掌握对应、比较、转化等基本解题途径,使学生获得解答应用题的良好认知结构,有效提高他们的解题能力。为了论述的完整性,少数例题超过了小学数学教材的范围。此外本书还对课堂教学的组织、课外活动以及成绩考查和评定等作了专题论述。

本书是集体讨论,分头执笔完成。编写人员有王权(第一、三、九章)、邱学华(第一、七章)、张天孝(第五、六章)和唐世兴(绪论、第四、八章)。最后由王权统稿审定。

限于作者水平,又加上讨论研究很不充分,谬误和不妥之处敬请读者批评指正。

作者

1989.8.

目 录

绪论	(1)
第一章 小学数学教学的任务和内容	(4)
第一节 小学数学教学的任务	(4)
第二节 小学数学的教学内容	(15)
第二章 学习理论与小学数学教学过程	(27)
第一节 学习动机与数学学习的主动性和积极性 ...	(27)
第二节 学习过程的结构与小学数学教学过程	(29)
第三章 小学数学的概念教学	(42)
第一节 小学数学的概念	(42)
第二节 概念教学的基本要求	(44)
第三节 数概念的教学	(48)
第四节 几何概念的教学	(66)
第五节 概念教学中应注意的问题	(75)
第四章 小学数学的计算教学	(80)
第一节 整数四则运算的教学	(80)
第二节 小数四则运算的教学.....	(103)
第三节 分数四则运算的教学.....	(111)
第五章 小学数学应用题教学.....	(131)
第一节 应用题教材结构的分析.....	(131)
第二节 整数基本应用题教学.....	(142)
第三节 整数两步应用题教学.....	(148)
第四节 整数和小数多步应用题教学.....	(155)
第五节 分数应用题教学.....	(170)
第六节 比例应用题的教学.....	(181)

第六章 小学数学的课堂教学	(189)
第一节 课堂教学的重要意义.....	(189)
第二节 课堂教学的准备.....	(190)
第三节 小学数学课堂教学的类型和结构.....	(197)
第四节 课堂教学的设计与实施.....	(199)
第五节 课堂教学的评估.....	(217)
第七章 小学数学课外活动	(225)
第一节 开展小学数学课外活动的意义.....	(227)
第二节 数学课外活动的基本形式.....	(233)
第八章 小学数学的成绩考查和评定	(237)
第一节 成绩考查的重要意义.....	(237)
第二节 教师怎样自编科学的测验题.....	(240)
第三节 小学教学学业成绩的评定.....	(256)

绪 论

数学是研究现实世界的数量关系和空间形式的科学,是学习现代科学技术必不可少的基础和工具。随着科学技术和数学本身的发展,数学的应用已越来越广,不论是日常生活还是在生产建设和科学研究中,都要用到数学。学习和掌握一定的数学基础知识和基本技能,是我国公民应该具备的文化素养之一。因此,小学数学是义务教育的一门重要学科。从小给学生打好数学的初步基础,发展思维能力,培养学习数学的兴趣,养成良好的学习习惯,对于贯彻德、智、体、美、劳全面发展的教育方针,培养有理想、有道德、有文化、有纪律的社会主义公民,提高全民族的素质,都具有十分重要的意义。

小学数学教育学的研究对象是小学数学教学。小学数学教育学是以辩证唯物主义观点作指导,综合运用教育学(尤其是其中的教学论)、心理学、逻辑学等有关学科的基本原理,研究小学数学的特点及其规律的一门学科。

小学数学的教学内容看起来比较简单,但要使学生真正理解、掌握且能较好地运用,并不容易。为了提高教学效率,获得较好的教学效果,教师一方面要学习大纲,钻研教材,从整体上掌握小学数学教材,搞清各部分知识纵横的联系。另一方面要了解学生,根据学生的年龄特征,知识水平和思维能力,适当地选择教学方法,充分调动学生学习的积极性和主动性。这样才能在教学过程中,使学生的智力因素和非智力因素都得到发展,使不同水平的学生都有较快地提高。这些都是小学数学教育学需要研究的问题。小学数学教育学主要是解决小学数学教学中“教什么”(教学内容)和“怎样教”(教学方法)两个方面的问题。学习小学数学教育学,对

提高教师的教学水平,提高小学数学教学质量,都具有重要的意义。具体地讲,有下面几点。

1. 帮助教师了解教材的结构体系,提高分析和处理教材的能力。

小学数学教育学,以小学数学教学大纲为依据,从纵向和横向上剖析小学数学教学内容,并阐明它们之间的联系。同时,对各部分教材的重点、难点和关键又加以了阐述。这样,便于教师把握整个教材的结构体系,了解某一部分教材的来龙去脉和它在整体中的地位;便于教师领会教材的编写意图,提高驾驭教材的能力。

2. 帮助教师了解各种教法的特点,提高选择和运用教法的能力。

小学数学教育学,根据一般教育原理和规律,结合小学数学教材和学生年龄的特点,介绍了各种教学方法,并指出了各种教学方法的适用范围和它的局限性。这就能使教师逐步认识到教学有法,但无定法,贵在得法的思想,以便针对教材和学生的实际,灵活地选择和运用教学方法,提高课堂教学效率。

3. 对于提高新教师的教学水平,具有特殊的意义。

新教师往往对教材不熟悉,特别是对教材的系统性缺乏了解。而数学是系统性很强的一门学科,对某一知识的“基础”和“发展”不清楚,教学中知识的深广度就会把握不好。

新教师缺乏教学经验,特别是对学生学习某一知识的难点估计不足,往往到学生出现了差错后,才会引起重视。这样,就比较被动。

小学数学教育学,是广大教师宝贵的教学经验在教育理论指导下的总结。它能使教师了解小学数学教学的各个环节和数学教学的基本规律,能够帮助新教师缩短探索过程,尽快地熟悉和胜任小学数学教学工作。

为了更好地学好小学数学教育学,要注意“三个结合”。

第一,学习小学数学教育学与学习先进的教学经验相结合。

教学理论,也是随着教学改革的深入而不断发展的,广大教师在教学实践中创造出许多好的经验,丰富了小学数学教育学的内容。所以,在学习小学数学教育学的时候,要结合学习先进的小学数学教学经验。

第二,学习小学数学教育学与学习有关学科的知识相结合。

小学数学教育学是一门综合性的边缘学科,它必然要综合地运用有关学科的基本原理,特别是哲学、心理学、教育学、逻辑学,数学等学科的一些观点和方法,往往会给我们很大的启示,打开我们的思路,有助于我们去思考并解决小学数学教学中的一些问题;有助于我们不断改进教学,提高质量。

第三,学习小学数学教育学与参加数学实践活动相结合。

学习理论是为了应用,并在应用中进一步理解和掌握理论。参加实践活动,是提高分析、处理教材和选择运用教学方法能力的重要途径。编教案、上试验课、听课、评课、进行专题实验研究等,都有利于教学水平的提高。

第一章 小学数学教学的任务和内容

第一节 小学数学教学的任务

小学数学教学是基础教育中极为重要的一个组成部分。这是因为：(1)小学数学课所传授的内容正是人们日常生活和工作所必须具备的数学基础知识和基本技能；(2)小学数学是小学生学习其他课程，包括语文、自然、社会学科的重要工具，并且也是升入中学进一步学习的必需基础；(3)由于数学具有高度的抽象性、严密的逻辑性和应用的广泛性，因此，学生在掌握基础知识的过程中，可以有效地发展他们的智慧。所以说小学数学教学对完成整个小学教育任务有着十分重要的作用。

为了适应新时期四化建设的需要，1978年我国正式把小学的原“算术”课程改称为“数学”课程。对传统的算术内容删繁就简，除了教授传统的整数、小数、分数、百分数、比例的四则运算以及计量、简单几何等知识外，新增了简单代数等内容；并且开始重视培养能力和发展智力，使小学数学教学改革迈出了重要的一步。1988年《九年制义务教育全日制小学数学教学大纲》（以下简称《小学数学教学大纲》）又更为明确地规定了小学数学教学的三项任务：(1)使学生理解、掌握数量关系和几何图形的最基础的知识。(2)使学生具有进行整数、小数、分数四则计算的能力，培养初步的逻辑思维能力和空间观念，能够运用所学的知识解决实际问题。(3)使学生受到思想品德教育。

一、传授数学基础知识

根据《小学数学教学大纲》规定，小学阶段所传授的数量关系和几何图形的最基础知识是指“有关整数、小数、分数、百分数和比

例的基础知识;常见的一些数量关系和解答应用题的方法;用字母表示数和简易方程、量与计量、简单几何图形、珠算、统计的一些初步知识。”这些内容与传统算术课的内容相比,具有以下特点:

1. 进一步精简大数目的计算和比较复杂的四则混合运算。

1978年的大纲虽对传统的算术内容作了一些删繁就简,但数与数的计算(主要是笔算)仍然占有过多的比例,教学要求仍有过高的倾向。随着电子计算器、计算机等现代计算工具的日益普及,整数多位数笔算四则和复杂的小数、分数笔算四则在现实生活中已逐渐失去了它的实际使用价值;而且对数学的进一步学习并没有多大的积极作用。在电子技术迅速发展的今天,学校不应该将儿童在校学习时间过多地花在机械性的智力操作活动上,而应该让他们学习更多的有利于发展他们的理解力、创造力的内容。所以《小学数学教学大纲》规定:笔算加减法一般不超过五位数,笔算乘除法以两位数乘除为主,等等。并且在计算的熟练程度上也提出了不同要求。例如,百以内的加减法、表内乘除法要求达到熟练地计算;万以内的加减、一位数乘、除法要求比较熟练地计算;多位数加减、三位数乘除法只要求能正确计算。这样就避免了花过多的时间去学习一些实际意义不大、而又属机械性的内容。

2. 加强口算教学,重视估算。

在精简繁难的四则运算的同时,《小学数学教学大纲》强调了口算教学的重要意义,并提出了估算的教学。这是因为口算不仅是学习其他形式计算的基础,而且有广泛的实用意义,同时比笔算更有利于发展学生的智力。估算是新的要求,它除了在实际生活中有重要应用外,而且可以辅助精助计算。特别是用计算工具(算盘、电子计算器等)计算时,估算更是使计算正确的重要保证。现在大纲虽已提出了要求,但还未作出系统的、具体的安排。我们可根据四则运算的教学范围,在相应口算的基础上,适当地教学一些估算。

3. 发挥代数知识的概括作用,改革应用题教学。

多年来的教育实验表明,在小学中教学一些简单的代数知识,不仅有利于算术知识的概括和提高,而且有利于应用题教学的改革。由于列方程解应用题的代数方法的引入,就使许多数量关系复杂的复合应用题化难为易了。这样,在教学了代数知识以后,就无需花较多时间去教学这些复合应用题了。为此,《小学数学教学大纲》规定:整、小数应用题不超过四步,分数应用题不超过三步。解答应用题可用算术方法,也可用代数方法。分数应用题不分乘、除类型,把“求一个数的几分之几是多少”与“已知一个数的几分之几是多少求这个数”的两类应用题,用代数的方法统一在“一个数乘以分数”的概念中,这就有利于学生从数量关系上来把握解答方法。

4. 继续推行计量标准化,废除市制计量单位。

计量单位标准化是世界性的趋势。例如美国的小学,现在也正在大力推行公制计量单位教学,英制计量单位不久也将被废除。从《小学数学教学大纲》颁布时起,我们已删去了全部市制计量单位的教学内容,一律采用国际上通用的公制计量单位。

二、培养数学能力

通过教学从根本上发展学生的智慧,使他们逐步掌握打开知识大门的钥匙是现代教育的一个重要特点。所以在数学基础知识教学的同时培养学生的数学能力,发展他们的智力是小学数学教学的重要任务之一。

什么是数学能力?这是一个理论问题,目前尚无定论。从我国小学数学教学的实际情况出发,《小学数学教学大纲》提出要培养的数学能力是指整数、小数、分数的四则计算能力、初步的逻辑思维能力和空间观念三个方面。至于运用数学知识解决简单的实际问题能力则是一种综合性能力,并非是数学能力结构中的某一要素,它是各科教学所共有的任务,所以这里不对它加以讨论。

1. 四则计算能力

整数、小数和分数的四则运算知识在整个小学数学教学中占

有很大的比重,而且其他量的计量、简单代数和几何形体等知识的学习都离不开四则计算。学生进一步学习数理化知识和参加各项生产劳动也都需要整、小、分的四则计算能力。所以在小学数学教学中培养学生的四则计算能力是一项必要的任务。但由于计算工具的进步和日益普及,笔算的实际应用价值正日益下降,而口算的重要性正日益为人们所认识,“口算是基础,笔算是重点”的传统观念已不太适应现实生活的需求。所以在小学里,应该把培养学生的口算能力作为培养计算能力的首要任务来抓。口算的作用除了是笔算的基础、为笔算服务外,口算还有它独立的教养和教育功能。口算有利于促进儿童的注意力、记忆力的发展。特别是简捷口算,它要求学生善于识别和抽象概括算式的数学特征,可以训练学生思维的灵活性和创造性。

提高学生的口算能力是一个教学实践问题。试验表明,提高学生的口算能力,第一要有一套科学的练习材料,例如精心设计的练习卡片、口算表等;第二要有持之以恒的教学态度,基本口算天天练,坚持一段时间必有成效。

2. 初步的逻辑思维能力

现代教学论认为,学生在学习基础知识的同时,应该使他们的感知、记忆、思维等认知能力得到充分的发展,尤其是思维能力的发展更为重要。思维有形象思维与逻辑思维之分。形象思维是指利用已有的表象来解决问题时的思维,它是通过分析和综合,抽象和概括而产生形象或创造新形象的过程。逻辑思维是指利用已有的概念,遵循思维规则,经过逻辑推导来解决问题时的思维。它是以概念、判断、推理的形式来反映客观事物,达到对事物本质特征和内在联系的认识。由于数学是一门具有严密逻辑结构的知识系统,最具有发展学生逻辑思维的优势,所以在数学教学中发展学生的逻辑思维能力是培养学生数学能力的中心任务。

逻辑思维能力主要是指正确判断和合乎逻辑地推理的能力。西方心理学家对什么是数学能力的问题作过大量的研究。虽众说

纷云,但大多认为推理能力是数学能力结构中的主要因素,苏联心理学家克鲁捷茨基则认为概括数学材料的能力是主要的数学能力。但他认为推理能力是属于一种高级的概括能力。由此可见培养学生的逻辑思维能力主要是发展他们的逻辑推理能力。

逻辑推理能力可以分为归纳推理、演绎推理和类比推理能力三种。归纳推理是特殊到一般的推理方法,也是一种科学的思维方法。在数学的发展历史中,许多重要的定理、法则、公式常常是由归纳推理发现而后得到确认或证明的。这种由特殊到一般的认识方法适合于小学生的年龄特点,所以小学数学课本、特别是低、中年级的课本多以归纳法来阐述数学知识。这就要求我们在教学时首先要让儿童观察、比较课本中所列举的实例,然后引导他们从中抽象、概括出共同的规律,结论应由学生自己总结得出。而不是由结论到结论,让学生死记硬背。

由一般到特殊的推理叫演绎推理。学生运用概念、法则、公式去解决相应的具体问题时,一般的思维过程是:回忆与问题有关的知识或经验;判断问题的性质,即是否为有关知识或经验的实例;根据有关知识或经验导出相应结论。在这里有关的知识或经验是大前提,作出的判断是小前提,根据大前提和小前提导出相应结论的过程就是演绎推理的过程。所以教学新课后的练习就是培养演绎推理能力的一条途径。根据有关研究^①,儿童在学习和掌握数学知识的过程中,首先得到发展的是演绎推理能力。但这决不是说,演绎推理能力可以在学习数学知识的过程中自然地得到有效的发展。在解决一个较为复杂的问题时,确定大前提和小前提是一件十分困难的工作。所以随着年级的升高,教师在教学过程中,要把培养儿童有根有据地去解决复杂问题的思考步骤放在十分重要的地位。在小学数学教材中,分数部分知识的逻辑性较强,理解和掌握这部分知识对发展学生的演绎推理能力相当有利,教师在教学

^① “小学生数学能力的因素分析”,《心理科学通讯》,1986年第2期。

中应充分发挥教材的这一作用。例如,教学“一个数除以分数等于这个数乘以分数的倒数”的法则,先从实例:“李师傅用 $\frac{3}{4}$ 小时做6个零件,一个小时做几个零件?”开始,让学生根据一个数乘以分数的定义列出乘法算式:

$$(\text{一小时做的零件数}) \times \frac{3}{4} = 6(\text{个}),$$

再根据乘除互逆关系列出除法算式:

$$(\text{一小时做的零件数}) = 6 \div \frac{3}{4}, \quad (1)$$

然后让学生推导算法,要求学生边思考边写出相应的步骤:

$\frac{3}{4}$ 小时做6个, $\frac{1}{4}$ 小时做几个?

$$6 \div 3 = \frac{6}{3};$$

4个 $\frac{1}{4}$ 小时,即一小时做几个?

$$(\text{一小时做的零件数}) = \frac{6}{3} \times 4 = \frac{6 \times 4}{3} = 6 \times \frac{4}{3}. \quad (2)$$

比较(1)、(2)两式,便得 $6 \div \frac{3}{4} = 6 \times \frac{4}{3}$ 。另外,还可以在列出除法算式后,让学生试着仿照上述思考步骤,由一个学生提问,别的学生列出相应算式来获得上述结果。在这一法则的教学过程中主要的不是急于概括法则,而是要使学生学习这种有条有理分析、推理的思考方法。这里有两种不同的教学指导思想,一种是仅把得到法则、记住法则和运用法则作为教学目标;另一种不仅这样,而且还把掌握思考步骤作为相应的教学目标。我们提倡的是后者,因为后者才能使学生在掌握知识的同时,有效地发展他们的逻辑推理能力。当然这样教学比较费时,但我们应该认识到,既然教学基础知识需要花时间,那么培养能力同样也应下功夫。

类比推理是根据两个对象具有某些相同属性的特点来推测它

们还可能有其他相似属性的推理方法。如若已知对象 A 有性质 a, b, c , 对象 B 也有性质 a, b , 于是就推测对象 B 也还可能性质 c 。所以类比推理是由特殊到特殊的推理方法, 它是最富于创造性的一种思维方法, 它与个体的联想能力密切相关。数学中的许多概念、法则、公式常常受着更为一般性的共同规律的制约, 其反映的现象往往有着一定的相似性。例如, 整数与小数的笔算法则总是被十进制规律所制约, 所以在计算方法上是极相似的。

新旧知识的类比可以给学生提供发现新的知识规律的线索, 启发他们从已知推论未知, 例如教学长方体体积的计算公式可与长方形面积公式类比。先要求学生写出长为 a 、宽为 b 的长方形面积计算公式:

$$S = a \times b (\text{面积单位}),$$

并说明为什么这样计算: 长为 a 表示每一行有 a 个面积单位, 宽为 b 表示共有 b 行, 所以一共有 $a \times b$ 个面积单位。然后出示长为 a 、宽为 b 、高为 1 个单位的长方体模型。要求儿童对照面积计算公式试写出体积计算式:

$$V = a \times b (\text{体积单位}),$$

并要求学生用体积单位(单位立方块)边摆边说明理由。这是一种类比推理的过程。因为这个长方体与长方形有很多共同性质: 相同的长和宽, 体积数与面积数又相等, 于是就推测有相同的计算方法。只是计量单位不同。在此基础上再出示长为 a 、宽为 b 、高为 c 的长方体模型要求学生写出算式。学生如有困难, 可将长方体拆成 c 个 $a \times b \times 1$ 的长方体让学生思考。这样教学, 既沟通了新旧知识间的联系, 又有利于发展学生的类比推理能力和空间观念。

类比推理是一种富于创造性的思维方法, 所以在许多智力测验中常采用类比推理的测验项目, 因此, 在教学中逐步培养学生类比推理能力, 对于发展学生的智慧是有重要意义的。但是类比推理并不保证推论结果的正确性, 当我们在对问题的认识比较肤浅,

有关知识经验又不多的时候,往往会产生错误的类比。所以在小学数学教学中,要注意防止学生养成不考虑具体情况随便套用以往知识经验的不良习惯。

相对来说,归纳推理与演绎推理更适合小学生知识经验不足的特点。特别是演绎推理更具普遍意义,只要大前提与小前提的判断正确,就能保证推论结果的正确性。所以在小学数学教学中培养学生的演绎推理能力是培养逻辑推理能力的重点。

3. 空间观念

空间想象能力是指对客观事物的空间形式,即形状、大小、距离、位置、构成元素等的想象能力。在小学里要培养的是一种初步的空间想象能力,所以大纲称作空间观念,即对客观事物的形状、大小、距离、位置、构成元素的表象的再现能力。具体的要求是:

(1) 能再现常见的一些简单几何形体的特征。例如能想象出正方形物体总是有四条相等的边和四个直角。

(2) 能借助一些常见的简单几何图形来反映或思考有关客观事物的几何形状。例如看到一只水桶,儿童就能在头脑中再现出直圆柱体的几何图形。看到运动场上的白线跑道,就能再现长方形与半圆的组合图形。

(3) 能借助一些常见的简单几何图形来反映或思考用语言或文字表达的客观事物的几何形状。例如,解答几何应用题,了解题意后就能再现题目所描述的客观事物的几何图形。

(4) 具有对常见简单几何图形的初步识图能力。为此,在几何初步知识的教学中应该注意以下一些教学活动:

(1) 加强学生对几何图形的实际操作训练,如拼拆几何图形、折叠几何图形、测量几何模型或实物等活动。任何思维活动均来源于对客观事物的感知,要使儿童形成一定的空间观念,发展他们的空间想象能力,首先就要发展他们的空间知觉能力。然而,专门感知空间形式的分析器官是不存在的,儿童的空间知觉一般是在生活实践中发展起来的,其中运动觉和视觉起着特别重要的作用。