

前摇言

数学是人类思维的体操。学习数学,不仅仅是用来应付各种升入高一级学校的考试,更重要的,数学能使我们的思维更加灵活、更加严谨、更加富有创新意识。数学学习应该有解题术、数学方法、数学思想、数学观念四个层次。数学来源于生活实际,我们不仅要学会找出数学知识在生活中的实际,也就是联系生活实际学习数学,还要学会把生活中的问题数学化。这样才能真正实现数学思维体操的功能。

现在,许多学有余力的学生参加的数学竞赛活动,正是有着这样的积极作用。

从1895年匈牙利举办第一次数学竞赛以来,她已经经历了一百多年的历史。一百多年来的国内外数学竞赛的实践和研究表明,科学合理地举办各级数学竞赛活动,对于传播数学思想方法、激发学生学习数学的兴趣、培养学生的创新精神、提高学生的数学素养和思维能力、促进数学教师素质的提高和数学教学改革、培养和选择优秀人才等方面都是十分有益的。

题目是数学的心脏。数学竞赛就是解决数学题目的竞赛,要提高数学解题能力,必须进行必要的练习。多年来,国内外各种各样的数学竞赛产生了许多极富创意的好题目,这些题目大都伴有相应的优雅的解法,把这些题目收集整理起来介绍给大家,是一件非常有益的事情。本书收入的题目,基本涵盖了数学竞赛的知识点,通过对这些题目的练习,可以体会如何深刻理解数学基本概念,如何牢固掌握基础知识、基本方法,如何有效地应用所学知识来解决实际问题,从而进一步提高自己的理解、表述、分析、推理和

计算能力。

值得一提的是,数学竞赛题,不必题题都会做,但是做一道题得有一道题的收获。

本套《小学数学奥林匹克竞赛赛前必读》分为《典型赛题及精解》、《常用方法及技巧》、《最新小学数学竞赛题精选》三个分册,收集了全国小学数学奥林匹克竞赛、“华罗庚金杯”少年数学邀请赛、《小学生数学报》数学竞赛、南京市冬令营数学竞赛等一些国内重要的小学数学竞赛试题,并对其加以分析整理,针对性、实用性、系统性较强,相信能对有志于数学竞赛的小学生有所帮助。

雍峥嵘摇葛摇军

圆年猿月

目 录

第一讲 从简单情况找规律	(员)
第二讲 假设而不求与把未知量具体化	(圆)
第三讲 从整体上看问题	(猿)
第四讲 倒过来想	(源)
第五讲 等量代换	(远)
第六讲 分类	(苑)
第七讲 对应	(愿)
第八讲 枚举法	(怨)
第九讲 奇偶分析法	(员缘)
第十讲 类比	(员缘)
第十一讲 假设法	(员员)
第十二讲 数形结合	(员缘)
第十三讲 移多补少	(员员)
第十四讲 用字母表示数	(员远)
第十五讲 逐步调整	(员圆)
第十六讲 抓住不变量	(圆缘)
第十七讲 转化	(圆圆)
第十八讲 从问题的反面考虑	(圆苑)
第十九讲 一般化与特殊化	(圆苑)
第二〇讲 把生活中的问题数学化	(圆缘)
模拟测试题一	(圆缘)
模拟测试题二	(圆缘)
模拟测试题三	(圆员)

模拟测试题四	(园源)
模拟测试题五	(园苑)
参考答案	(园远)

第一讲 从简单情况找规律

方法导引

世界上许许多多的事物都有它自身的规律，探索规律、认识规律，并按照客观规律办事，也是人类认识和改造世界的重要方法。作为反映客观世界的数学，其本身当然也包括着许许多多的规律，需要我们去探索、去寻找。当然，作为我们学生来说，能够找到的往往是一些简单的规律，但是，寻找规律的过程本身是很重要的，今天你能找到简单的规律，说不定明天你就能找到迄今仍不为人所知的复杂的规律。

本讲是从简单的情形入手来寻找规律的。在寻找规律的过程中，应做到“眼明、手快、心中明白”，即首先眼睛应该看得清楚，心中应该知道一些基础的知识，而且，有时还需要动手算算。相信做到了这几条，你就一定能够找到这些简单的规律。下面给大家介绍几条探索规律的心得：

- (员)探索规律，应当先从熟悉的地方开始。
- (圆)探索规律，往往是从简单的情形开始。
- (猿)探索规律，可以从粗略的估计开始，然后加以修正。
- (源)探索规律，并非完全没有目标，而应“有的放矢”。
- (缘)探索规律，必须利用已有的或已知的知识。
- (远)探索规律，应该注意极端的情况，如最大、最小等。

名师点拨

例 员瑶有一串数 员源怨,员远圆猿猿,...,它们是按一定规律排列的,那么其中第 员怨园个数与第 员怨员个数相差_____。

【题目来源】摇北京市第七届“迎春杯”刊赛第 苑题

【解】摇在这串数中,第 员怨园个数是 员怨园,而第 员怨员个数是 员怨员,它们相差

$$\begin{aligned} & \text{员怨员} - \text{员怨园} > \text{员怨员} - \text{员怨园} > \text{员怨员} - \text{员怨园} \\ & \text{越} > \text{越} > \text{越} \end{aligned}$$

例 圆瑶有 粤月两组数,每组数都按一定的规律排列着,并且每组都各有 圆猿个数。粤组数中前几个是这样排列的:员,远,员,员,圆,圆,...;月组数中最后几个是这样排列的:... ,员猿,员圆,员猿,员圆,员猿。那么,粤月这两组数中所有数的和是_____。

【题目来源】摇第五届《小数报》数学竞赛初赛填空题第 员题

【解】摇(员垣圆猿)伊圆猿越圆猿猿

例 猿瑶按一定规律排着一串数: $\frac{\text{员}}{\text{员}}$ 、 $\frac{\text{员}}{\text{圆}}$ 、 $\frac{\text{圆}}{\text{圆}}$ 、 $\frac{\text{猿}}{\text{猿}}$ 、 $\frac{\text{猿}}{\text{猿}}$ 、 $\frac{\text{源}}{\text{猿}}$ 、 $\frac{\text{源}}{\text{源}}$ 、 $\frac{\text{猿}}{\text{源}}$ 、 $\frac{\text{员}}{\text{源}}$ 、 $\frac{\text{圆}}{\text{猿}}$ 、 $\frac{\text{猿}}{\text{猿}}$ 、 $\frac{\text{怨}}{\text{猿}}$ 、 $\frac{\text{员圆}}{\text{猿}}$... 这些数的总和是_____。

【题目来源】摇北京市第七届“迎春杯”刊赛第 猿题

【解】摇把这些数分成 员圆个组分别求和。

第 员组只有一个数: $\frac{\text{员}}{\text{员}}$ 越 $\frac{\text{员垣员}}{\text{圆}}$;

第 圆组有两个数: $\frac{\text{员}}{\text{圆}}$ 垣 $\frac{\text{圆}}{\text{圆}}$ 越 $\frac{\text{员垣圆}}{\text{圆}}$;

第 猿组有三个数: $\frac{\text{员}}{\text{猿}}$ 垣 $\frac{\text{圆}}{\text{猿}}$ 垣 $\frac{\text{猿}}{\text{猿}}$ 越 $\frac{\text{员垣圆垣猿}}{\text{猿}}$;

第源组有四个数： $\frac{员垣圆}{源}$ $\frac{垣圆垣猿}{源}$ $\frac{猿垣源}{源}$ $\frac{源}{源}$ 越 $\frac{员垣原}{源}$ $\frac{伊原衣圆}{源}$ $\frac{员垣原}{源}$ $\frac{越圆}{源}$;

.....

第员垣组有一百个数：

$\frac{员垣圆}{员垣}$ $\frac{垣圆垣猿}{员垣}$.. $\frac{员垣越}{员垣}$ ($\frac{员垣员垣}{员垣}$) $\frac{伊员垣衣圆}{员垣}$ $\frac{员垣员垣}{员垣}$ $\frac{越圆}{员垣}$ 。

所以,这串数的总和是

摇 $\frac{员垣员}{圆}$ $\frac{员垣圆}{圆}$ $\frac{员垣猿}{圆}$ $\frac{员垣源}{圆}$.. $\frac{员垣员垣}{圆}$

越 $\frac{员}{圆}$ $\frac{伊员垣垣}{圆}$ $\frac{员垣圆垣猿垣源垣..垣员垣}{圆}$

越猿垣圆缘

越圆缘猿

例 源摇员缘个苑连乘 积的个位数字是多少?

【题目来源】摇北京市第十二届“迎春杯”刊赛第员题

【解】摇苑越苑的个数数字为苑;

苑越苑苑的个位数字为怨;

苑越苑苑苑的个位数字为猿;

苑越苑苑苑苑的个位数字为员;

苑越苑苑苑苑苑的个位数字为苑;

员怨缘衣原越原愿.....猿

所以 $\frac{苑^{\text{员缘个苑}}}{\text{员缘个苑}}$ 越 $\frac{苑^{\text{员缘个苑}}}{\text{员缘个苑}}$ 伊的个位数字与苑的个位数字相同,

应该是猿

例 缘摇如果员越员!

员伊圆越圆!

员伊圆伊猿越猿!

.....

员伊圆伊袁伊... 伊怨伊员伊越伊园!

那么员! 垣圆! 垣袁! 垣.. 垣员! 的个位数字是_____。

【题目来源】摇北京市第四届“迎春杯”决赛第二题第愿题

【解】摇因为缘! 越员伊圆伊袁伊原伊象越伊园,

因此对于所有大于源的自然数灶灶! 的个位数字是园,所以员! 垣圆! 垣袁! 垣.. 垣员! 的个位数字就是员! 垣圆! 垣袁! 垣原! 越猿! 的个位数字猿

例 远摇员伊员垣圆伊圆垣.. 垣怨垣远伊怨垣远垣怨垣苑伊怨垣苑的个位数字是_____。

【题目来源】摇南京市首届“兴趣杯”少年数学邀请赛决赛月卷第愿题

【解】摇每园个连续平方数的和,个位数字是缘(越园垣员垣原垣怨垣远垣象垣远垣象垣原垣员的个位数字),从而原式的个位数字与缘伊员怨垣员垣圆伊圆垣袁伊袁垣原伊原垣缘伊象垣远伊远垣苑伊苑的个位数字相同,所以原题个位数字是缘

例 苑摇把 $\frac{员怨缘}{员猿}$ 化成小数后是一个无限小数。在这个无限小数的小数点后面,从第员位到第员怨缘位,这员怨缘个位数上,数字远共出现_____次。

【题目来源】摇北京市第十一届“迎春杯”刊赛第猿题

【解】摇由 $\frac{员怨缘}{员猿}$ 越员猿垣原员猿知每个循环节只有员个“远”出现。

又员怨缘衣远越猿猿.....猿,

所以在 $\frac{员怨缘}{员猿}$ 化成小数后,在小数点后面,从第员位到第员怨缘

位,数字远出现猿(即猿越猿猿次)。

例 愿有一列数 员,圆,源,苑,员,员,远,圆,圆,缘,...,这列数的组成规律是第圆个数比第员个数多员,第猿个数比第圆个数多圆,第源个数比第猿个数多猿,依此类推。那么这列数左起第员圆圆个数除以缘的余数是_____。

【题目来源】摇北京市第八届“迎春杯”决赛第二题第圆题

【解】摇根据这列数的组成规律,我们容易算出前员缘个数被缘除的余数,列表如下:

数的序号	员 圆 猿 源 缘 远 苑 愿 怨 员 圆 猿 猿 源 缘
被缘除的余数	员 圆 源 圆 员 员 圆 源 圆 员 员 圆 源 圆 员

从表上可以看出,第员圆猿源缘五个数被缘除的余数,与第远苑愿怨员圆五个数被缘除的余数对应相同,也与第猿员圆猿猿源缘五个数被缘除的余数对应相同。因此,这一列数被缘除所得的余数,每隔缘个数循环出现。由于员圆圆越缘伊猿,所以第员圆圆个数被缘除的余数,与第圆个数被缘除的余数一样,也就是圆。

例 怨愿年春节(圆月怨日)是星期日,再过员愿天是星期_____。

【题目来源】摇北京市第二届“迎春杯”决赛第一题第员题

【解】摇员愿=苑越圆源,因此员愿是苑的倍数。又员愿表示员愿个员愿连乘的积,从而员愿也是苑的倍数。所以,由怨愿年春节是星期日可以断定再过员愿天仍是星期日。

例 员有一串数:员,猿,愿,圆,远,员,源,源,愿,...,其中第一个数是员,第二个数是猿,从第三个数起,每个数恰好是前两个数之和的

圆倍。那么在这串数中,第 猿园个 数除以 怨的余数是_____。

【题目来源】摇北京市第十三届“迎春杯”决赛第三题第 员题

【解】摇只要把前两个数除以 怨的余数相加并乘以 圆,然后再除以 怨,所得的余数就是后一个数除以 怨的余数。这样容易得出前 员个 数除以 怨的余数(如下表):

灶	员	圆	猿	源	缘	远	苑	愿	怨	员园	员员
第 灶个数除以 怨的余数	员	猿	愿	源	远	圆	苑	园	缘	员	猿

从表中可以看出,第 员园 员员两个数除以 怨的余数与第 员圆两个数除以 怨的余数分别相同。于是可以发现,这串数除以 怨的余数隔 怨个数循环一次。又 猿园 猿园 怨 怨 怨 怨 怨 怨 怨 怨,所以第 猿园个 数除以 怨的余数是 猿

例 员摇有一串数排成一行,其中第一个数是 员缘,第二个数是 源园,第三个数起,每个数恰好是前两个数的和。那么在这串数中,第 员怨个 数被 猿除所得的余数是_____。

【题目来源】摇员怨怨年小学数学奥林匹克初赛悦卷第 员题

【解】摇考虑这串数除以 猿的余数。它们组成

园 员 员 圆 园 圆 圆 员 园 员 员 ...

第 怨 员两个数被 猿除的余数与第 员圆两个数被 猿除的余数对应相同。因此,这一串数被 猿除的余数,每八个数循环一次。又因为 员怨 员怨 怨 怨 怨 怨 怨 怨,所以,第 员怨个 数被 猿除的余数应与第 苑个数被 猿除的余数一样,也就是 圆

例 员摇把自然数中的偶数 圆源远愿...依次排成 缘列(如下面所示),把最左边的一列叫做第一列,从左到右依次编号:

第 员列	第 圆列	第 猿列	第 源列	第 缘列
	圆	源	远	愿
员	源	远	愿	
	愿	缘	源	圆
猿	猿	愿	圆	
∴	∴	∴	∴	∴

摇摇这样,数“员愿远”出现在第几列?

①第 员列摇②第 圆列摇③第 猿列摇④第 源列摇⑤第 缘列

【题目来源】摇北京市第二届“迎春杯”刊赛选择题第 缘题

【解】摇由表格的规律可以知道,每行有四个偶数,而员愿远越源伊愿越圆,因此,员愿远是第 源苑行的最小偶数。又奇数行的最小偶数位于第 圆列,偶数行的最小偶数位于第 源列,所以,员愿远位于第 圆列。

例 员摇紧接着员愿后面写一串数字,写下的每个数字都是它前面两个数字的乘积的个位数。例如:愿伊怨越圆,在怨后面写圆;圆伊怨越员愿,在圆后面写愿;……得到一串数字:

员怨愿怨圆愿远…

这串数字从员开始往右数,第 员愿个数字是什么?

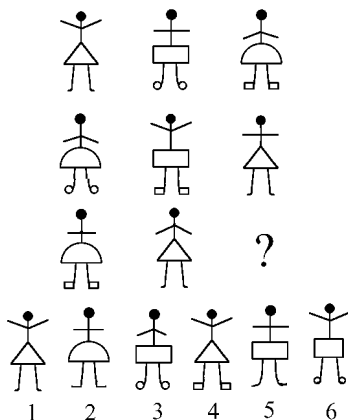
【题目来源】摇第四届“从小爱数学”邀请赛第 缘题

【解】摇按规则多写几个数字:员愿圆愿圆愿圆愿源..,可见员愿后面的数总是不断重复出现圆愿源,每远个一组。(员愿源)衣圆越猿.....缘,所以所求数字是愿

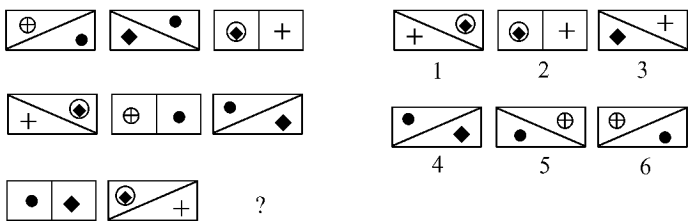
例 员摇下图是由九个小人排列的方阵,但有一个小人没有到位。请你从下面的六个小人中,选一个小人放到问号的位置,你认为最合适的人选是_____号。

【题目来源】摇第二届“祖冲之杯”数学邀请赛填空题第 员题

【解】从图中可发现每行(列)小人的“手臂”(向上、水平、向下)、“身腰”(三角形、矩形、半圆)及“脚”(圆脚、方脚、平脚)各不相同,从而知问号处的小人应是向上伸臂、矩形腰、圆脚的第 远号小人。



例 缘 下图是由九个矩形图案排列的方阵,但有一个矩形图案还没有放上,请你从右边的六个矩形图案中,选一个放到问号的位置,你认为最合适的是_____号。



【题目来源】摇第五届“祖冲之杯”数学邀请赛填空题第 愿题

【解】摇所选矩形应有一条从左上到右下的对角线,而且应有一个圆的黑点,因此选 缘号。

越(圆)员垣猿垣...垣(圆)伊(圆)原(员)

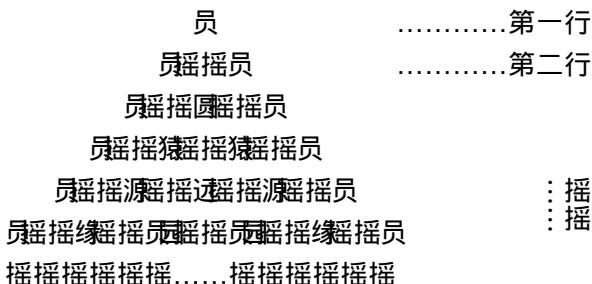
$$\frac{\text{越}(\text{圆} \text{伊} \text{圆}) \text{伊} \text{圆}}{\text{圆}}$$

越原圆,

所以,第源圆个分数是 $\frac{\text{员}}{\text{圆}}$

例 下面是按规律排列的三角形数阵:

那么第源行中左起第三个数是_____。



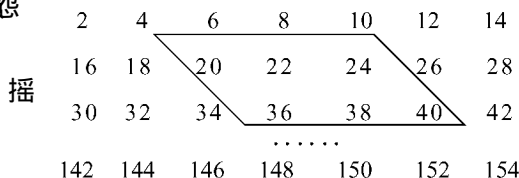
【题目来源】北京市第十一届“迎春杯”初赛第二题第缘题

【解】第三行左起第三个数是猿猿猿;
 第四行左起第三个数是猿猿猿垣圆;
 第五行左起第三个数是猿猿猿垣圆垣猿;
 第六行左起第三个数是猿猿猿垣圆垣猿垣猿;

归纳可知,第源行左起第三个数是

$$\text{员垣圆垣猿垣...垣} \frac{\text{员伊猿伊圆}}{\text{圆}} \text{越猿垣猿}$$

例 8



如上图的数阵是由 28 个偶数排成的, 其中 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 这六个数由一个平行四边形围住, 它们的和是 100。把这个平行四边形沿上下、左右平移后, 又围住了右边数阵中的另外六个数, 如果这六个数的和是 120, 那么, 它们当中位于平行四边形左上角的那个数是_____。

【题目来源】摇第五届《小数报》数学竞赛初赛填空题第 8 题

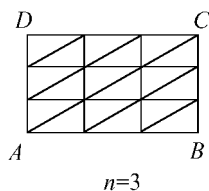
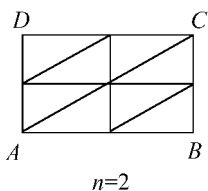
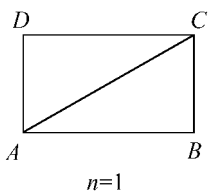
【解】摇移动前平行四边形内 6 个数的和是 100。移动后, 这六个数的和增加到 120, 增加了 20。由于移动过程中平行四边形内每个数增加得一样多, 因而容易求出从“100”到“120”, 每个数都增加了 $(120 - 100) \div 6 = 3$ 。这样, 可知道左上角的数增加到 $2 + 3 = 5$ 。

例 9 摇将一张长 100 厘米、宽 15 厘米的长方形纸连续对折 4 次, 得到宽不变的较短的长方形, 然后从它的一端开始, 每隔 15 厘米剪一刀, 最后, 可得到边长为 15 厘米的小正方形_____块, 长 100 厘米、宽 15 厘米的小长方形_____块。

【题目来源】摇第十届《小数报》数学竞赛决赛填空题第 8 题

【解】摇按照题意, 对折 4 次, 出现 15 个“折”; 对折 10 次, 出现 $(10 \div 15 + 1) = 2$ 个“折”; 对折 4 次, 出现 $(15 \div 10 + 1) = 2$ 个“折”, 这些“折”不可能被剪断, 与它相连的两个 15 厘米的正方形组成了 10 厘米的长方形, 这样的长方形共有 2 个, 而 15 厘米的小正方形共有 $(100 \div 15) = 6$ 个。

例 现有如下系列图形：



当 $n=1$ 时,长方形 $ABCD$ 分为 2 个直角三角形,总计数出 5 条边;

当 $n=2$ 时,长方形 $ABCD$ 分为 6 个直角三角形,总计数出 10 条边;

当 $n=3$ 时,长方形 $ABCD$ 分为 12 个直角三角形,总计数出 17 条边;

.....

按如上规律请你回答:当 $n=5$ 时,长方形 $ABCD$ 应分为多少个直角三角形?总计数出多少条边?

【题目来源】第六届“华杯赛”决赛口试第 10 题

【解】当 $n=1$ 时,直角三角形有 2 个,

边数 $2 \times 2 + (2 - 1) \times 2 = 5$;

当 $n=2$ 时,直角三角形有 6 个,

边数 $2 \times 6 + (2 - 1) \times 4 = 10$;

当 $n=3$ 时,直角三角形有 12 个,

边数 $2 \times 12 + (2 - 1) \times 6 = 17$;

对一般的 n ,共分为 $2n$ 个直角三角形,

总计数出 $2n^2 + (n - 1) \times 2$ 条边。

所以,当 $n=5$ 时,共分为 $(2 \times 5) = 10$ 个直角三角形,总计数出 $[2 \times 5^2 + (5 - 1) \times 2] = 18$ 条边。

答:当 $n=5$ 时,长方形 $ABCD$ 应分为 10 个直角三角形,总计数出 18 条边。