

小学生轻松学奥数

六年级

主 编 陈钱君



目 录

第一讲	排列问题	(1)
第二讲	组合问题	(7)
第三讲	分数计算	(13)
第四讲	分数应用题	(21)
第五讲	百分数应用题	(30)
第六讲	浓度问题	(36)
第七讲	钟表问题	(43)
第八讲	圆和扇形	(49)
第九讲	逻辑推理	(55)
第十讲	最大最小	(65)
第十一讲	立体图形	(73)
第十二讲	比和比例	(81)
综合试题	(89)
参考答案	(94)

第一讲 排列问题



学练提要

1. 所谓排列,就是从 m 个不同的元素里,每次取出 n 个不同的元素,按照一定的顺序摆成一排,记作 P_m^n 。

2. 在排的过程中,每一种排法不仅与参与排列的事物有关,而且与各种事物所在的先后的顺序有关。

3. 排列数 P_m^n ,可以这样计算:

(1) 先排第一个,可从 m 个元素中任选一个,共有 m 种不同的方法。

(2) 排第二个位置上的元素,由于第一位置用去一个元素,只剩下 $(m-1)$ 个,故只有 $(m-1)$ 种不同的排法。

(3) 排第三个位置上的元素,共有 $m-2$ 种不同的方法。

(4) 第 n 步。由于前面已排了 $(n-1)$ 个位置,用去 $(n-1)$ 个元素,第 n 个位置上,共剩下 $[m-(n-1)]=m-n+1$ 个元素,有 $(m-n+1)$ 种选法。由乘法原理,共有 $m(m-1)(m-2)(m-3)\cdots(m-n+1)$ 种不同排法,即

$$P_m^n = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$$



例题精选

例 1 计算 (1) P_8^3 (2) $P_5^3 - 2P_4^2$

解析:由排列数公式,得

$$(1) P_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

$$(2) P_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

$$2P_4^2 = 2 \times (4 \times 3) = 24$$

$$\text{所以 } P_5^3 - 2P_4^2 = 60 - 24 = 36$$



试一试

(1) P_{10}^2 (2) P_7^3



例2 用1、2、3、4、5可以组成几个没有重复数字的四位数?

解析:这是从5个不同元素中取出4个不同元素的排列问题,由排列数公式,共可以组成 $P_5^4=5 \times 4 \times 3 \times 2=120$ (个)不同的四位数。



试一试

活动室有10把不同的椅子,进来3名小朋友,每人只能坐一把,共有多少种不同的坐法?

例3 用0、1、2、3、4、5可以组成几个没有重复数字的四位数?

解析:与例2不同的是,本题中0不能作为千位数,那么我们先考虑千位上的数,有5种排法,则其余3位还有 P_5^3 种排法,由乘法原理得 $5 \times P_5^3=5 \times 5 \times 4 \times 3=300$ (个)不同数字的四位数。



试一试

A、B、C、D、E五个人排成一排,A不能在排头,共有几种不同的排法?

例4 A、B、C、D、E五个人,排成一列,如果A、B不能在两端,共有几种排法?

解析:A、B不能在两端,所以A、B只能在剩下三个位置中某两个位置上,共有 P_3^2 种排法。而其他3人位置没限定,共有 P_3^3 种排法。根据乘法原理,共有 $P_3^2 \times P_3^3=3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1=36$ (种)排法。



试一试

A、B、C、D、E五个人排列一排,如果AB必须相邻,共有几种不同的排法?

例5 由数字0、1、2、3可以组成几个没有重复数字的四位数偶数?

解析:这个偶数的个位只能是0或2,当个位为0时,前三位由1、2、3全排列组成,有 P_3^3 种。当个位为2时,千位数只能从1、3中任取一个,有 P_2^1 种,百位和十位可从1、3中余下的一个和这两个数字组成全排列,有 P_2^2 种。根据乘法原理,个位为2的偶数

有 $P_2^1 \times P_2^2$ 种, 所以根据加法原理, 得到四位偶数共有 $P_3^3 + P_2^1 \times P_2^2$ 种。

$$P_3^3 + P_2^1 \times P_2^2 = 3 \times 2 \times 1 + 2 \times 2 \times 1 = 10 (\text{种})$$



试一试

由数字 0、1、2、3、4、5 可以组成几个没有重复数字的五位奇数?

例 6 由数字 0、1、2、3、4、5 可以组成多少个没有重复数字的比 400000 小的六位自然数?

解析: 这个自然数比 400000 小, 其首位一定是 1、2、3 里面的一个, 有 3 种方法, 其他五位共有 P_5^5 种排法, 所以根据乘法原理, 共有 $3 \times P_5^5 = 3 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 360$ (个) 没有重复数字的比 400000 小的六位数。



试一试

由数字 0、1、2、3、4 可以组成几个没有重复数字的比 30000 大的五位数?

练习题

A 组

1. 计算 (1) P_5^3 (2) $P_6^4 \times P_3^2$ (3) $P_{15}^2 - P_{10}^2$

2. 某铁路线共有 8 个客车站, 这条铁路共有多少种不同的车票?

3. 五年级有 6 名同学代表学校参加数学竞赛, 要照相留念, 他们要站在一排, 问共有多少种不同的站法?



4. 10 名同学参加跳远比赛,可获得冠军和亚军的名单共有几种不同的情形?(冠军、亚军都没有并列名次)

5. 五年级五个班级评选出学习、体育、卫生先进集体(每班最多评一项)各一个,有多少种不同的评选结果?

6. 用数字 1、2、3、4、5 可以组成多少个没有重复数字的五位偶数?

7. 老师和 6 个同学站成一排,老师必须站在中间,共有几种不同的站法?

8. 四个同学去图书馆借书,现有 5 本不同的书,每人借一本,则共有几种不同的借法?

4
▲
▲
▲

9. 有 7 本不同的书,分别借给 3 名同学,每人一本,有多少种不同的借法?

10. 某人从小学、初中、高中时都分别有两个学校可以选择,那么他共有几种不同的方式?

B 组

1. 5 个灯泡排成一排,每个灯泡都有亮与不亮两种状态,则共可以表示多少种不同的信号?

2. 0、1、2、4、6 这五个数可以组成几个没有重复数字的奇数?

3. A、B、C、D、E、F 六个人排成一排, A、B 必须相邻, 共有多少种不同的排法?

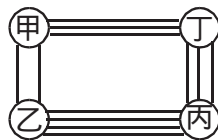
4. 用 1、2、3、4、5 这五个数字可以组成 120 个没有重复数字的五位数, 把它们从小到大排成一列, 那么第 49 个是多少?

5. A、B、C、D、E、F 六人排成一排, A、B 不能在两端, 共有几种不同的排法?

6. A、B、C、D、E 五人排成一排, A、B 必须分别站在两端, 共有几种不同的排法?

7. 用数字 0、1、2、3、4 可以组成多少个不同的三位数(数字允许重复)?

8. 如下图, 从甲地到乙地有 2 条路, 从乙地到丙地有 4 条路, 从甲地到丁地有 3 条路, 从丁地到丙地也有 3 条路。问: 从甲地到丙地共有多少种不同的走法?



C 组

1. 从 1、3、5 中任选出两个数字, 从 2、4、6 中任选两个数字, 那么共可选出几个没有重复数字的四位偶数? (提示: 1、3、5 选出两个数字共有几种选法? 四个没有重复数字的偶数怎样排?)



2. 甲乙丙丁四人各有一本书放在一起,四人每人随便拿了一本,问恰有一人拿到自己的书的拿法有几种?(提示:甲拿到自己的书的拿法有几种?)

3. 有五粒糖,如果每天至少吃一粒,吃完为止,一共有多少种不同的吃法?(提示:最多吃几天?不同的天数各有几种吃法?)

4. A、B、C、D、E 五人排成一排,A 不能在排头,B 不能在排尾,共有多少种不同的排法?(提示:A 在第 2 位、第 3 位、第 4 位、第 5 位时各有几种不同排法?)

5. 用数码 0~7 可以组成多少个小于 1000 的自然数(数码可以重复使用)?(提示:一位数、两位数、三位数分别讨论。)

竞赛题精选

1. 有 4 张卡片,上面分别写有 0、1、2、4 个数,从中任意抽出三张卡片可以组成几个不同的三位数?(第三届“新苗杯”小学生数学竞赛试题)

2. “IMO”是国际数学奥林匹克的缩写,把三个字母写成三种不同的颜色,现有五种不同的颜色笔,按上述要求能写出多少种不同颜色搭配的“IMO”?(宁波市奥林匹克学校期中试题)



第二讲 组合问题



学练提要

排列问题与元素的次序有关,但在日常生活中,有很多“分组”问题,它并不关心每组中元素的次序,这类不考虑次序的问题称为组合问题。

一般地,从 m 个不同元素中取出 n 个 ($m \geq n$) 元素组成一组(不计较组内各元素的次序),叫做从 m 个不同元素中取出 n 个元素的组合,记作 C_m^n 。

由上面的定义可以看出,两个组合是否相同,只与这两个组合中的元素有关,而与取到这些元素的先后次序无关,只有在两个组合中的元素不完全相同时,它们才是不同的组合。

C_m^n 的求法可这样考虑:

1. 从 m 个不同元素中取出 n 个元素组成组有 C_m^n 种方法。

2. 将每组 n 个元素全排列共有 P_n^n 种方法。

3. 从 m 个元素中取出 n 个元素的排列共有 P_m^n 种方法。由乘法原理得: $P_m^n = C_m^n \times P_n^n$, 于是

$$C_m^n = \frac{P_m^n}{P_n^n} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1}$$



例题精选

例 1 计算 (1) C_5^2 (2) C_4^3 (3) C_4^1

解析: 由公式得: $C_5^2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$, $C_4^3 = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} = 4$, $C_4^1 = \frac{4}{1} = 4$

注意到 $C_4^3 = C_4^1$, 一般地, 组合数有这样的性质: $C_m^n = C_m^{m-n}$ 。

例如从 5 个人中选 4 个人去比赛的方法和 5 个人中选一个人不去比赛的方法一样, 即 $C_5^4 = C_5^1$ 。

一般地当 n 比较大时(通常 $n > \frac{m}{2}$), 常用 $C_m^n = C_m^{m-n}$ 来化简。规定: $C_m^m = 1, C_m^0 = 1$ 。



例2 (1) C_{50}^{48} (2) $C_{2002}^{2001} - C_{2001}^{2000}$

解析:由公式 $C_m^n = C_m^{m-n}$ 可得

$$(1) C_{50}^{48} = C_{50}^2 = \frac{50 \times 49}{2 \times 1} = 25 \times 49 = 1225$$

$$(2) C_{2002}^{2001} - C_{2001}^{2000} = C_{2002}^1 - C_{2001}^1 = 2002 - 2001 = 1$$



试一试

(1) $C_{10}^3 - 2 \times C_5^2$ (2) $C_7^3 - C_6^5$

例3 书架上放着6本不同的数学书,从中选出2本书,则有多少种不同的取法?

解析:由题意可知,只要从6本书取出2本就可以,与书的顺序无关,所以这个问题是从6个元素中取出2个元素的组合问题。

$$C_6^2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15(\text{种})$$



试一试

小刚要从10本不同的童话书中借给同学4本,共有多少种不同的借法?

8



例4 宁波到上海的铁路沿线共有12个火车站,那么共有多少种票价?

解析:由于票价与起点与终点的距离有关,与顺序无关,故是组合问题。

$$C_{12}^2 = \frac{12 \times 11}{2 \times 1} = 66(\text{种})$$



试一试

7个同学参加乒乓球赛,每两人都要赛一场,一共要赛多少场?

例5 从1、2、3、4、5中选两个数作一位数乘法,问(1)有多少种不同的乘法算式?(2)有多少个不同的乘积?

解析:(1)由于乘法算式不仅与所取的两个数字有关,而且与所取的两个数字的顺序有关,所以是个排列问题。

$$P_5^2 = 5 \times 4 = 20(\text{种})$$

(2)与(1)不同的是所得到的积与所取的两个数字有关,而与数字的顺序无关,所以是个组合问题。

$$C_5^2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10(\text{个})$$



试一试

12支足球队进行比赛,如果实行主客场制的循环赛,则需赛多少场次?如果是单循环比赛,一共要多少场?

例6 从5名男生和4名女生中选出3人去比赛,至少有1名女生,其选法有多少种?

解析:由条件“选3人,至少有一名女生”,可把问题分为三类:

第一类,选出的3人中只有1名女生,共有 $C_4^1 \times C_5^2$ 种选法。

第二类,选出的3人中只有2名女生,共有 $C_4^2 \times C_5^1$ 种选法。

第三类,选出的3人都是女生,共有 C_4^3 种选法。

由加法原理可知,一共有 $C_4^1 \times C_5^2 + C_4^2 \times C_5^1 + C_4^3 = 4 \times 10 + 6 \times 5 + 4 = 40 + 30 + 4 = 74$ (种)。



试一试

8个人中选5个人去开会,如果A、B只去1人,那么有多少种选法?

练习题

A 组

1. 从写有1、3、5、6的四张卡片中任取两张,做两个一位数乘法,如果其中的6可看作9,那么共有多少种不同的乘积?

2. 在一个圆周上有8个点,以这些点为端点或顶点,可以画出多少条直线?多少个三角形?多少个四边形?



3. 两人见面要握一下手,照这样规定,9人见面共握多少次手?

4. 参加数学竞赛的同学每两人握一次手,共握手 28 次,问参赛队员共有多少人?

5. 计算:(1) C_8^6 (2) $3C_5^2-2C_4^1$ (3) $P_6^2-C_7^2$

6. 一个口袋中有 4 个小球,另一个口袋中有 5 个小球,这些球颜色各不相同。从两个口袋中各取出 1 个小球,共有多少种不同的结果?

7. 6 种不同的玩具分给三个人,如果每人分两种,共有多少种不同的分法?

8. 书架上有 9 本不同的书,小明借 1 本,小红借 2 本,小刚借 3 本,共有多少种不同的借法?

9. 在下面一排数字中间的任意两个位置写上两个“+”号,可以得到三个自然数相加的加法算式,所有可以这样得到的不同的加法算式共有多少个?

1 2 3 4 5 6 7 8 9

B 组

1. 9 个人围成一圈,从中选出两个不相邻的人,共有多少种不同的选法?

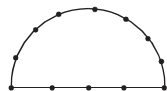


2. 五个盒子都贴了标签,其中恰好贴错了三个,贴错的可能情况共有多少种?

3. 学校大队部要从五年级 6 个班补充 8 名同学,每班至少一名,共有多少种不同的抽调方法?

4. 学校数学兴趣小组有 10 名男生,8 名女生,现选 6 人参加省里的比赛,在下列条件下,分别有多少种不同的选法? (1)恰有 4 名女生参加比赛。(2)选 3 名女生、3 名男生参加比赛。(3)至少有 3 名女生参加比赛。

5. 在一个半圆环上共有 12 个点,以这些点为顶点,可画出多少个三角形?



6. 10 个学生中,男女生各有 5 人,选 4 人参加数学竞赛。

(1)至少有一名女生的选法有多少种?

(2)A、B 两人中最多只有一人参加的选法多少种?

C 组

1. 从 6 名学生中选出 4 名分别担任中队长、体育委员、学习委员和生活委员,共有多少种不同的方案?(提示:先求 6 人中选出 4 人,再求 4 人任不同职位的方案)

2. 5 名学生中选取 4 人参加辩论赛,若 A、B 两人不能做第一辩,那么有几种不同的方案?(提示:第一辩有几种选法,其他第二辩、第三辩、第四辩位置可怎样选?)



3. 书架上有不同的数学书 6 本,不同的语文书 5 本,不同的科技书 4 本,从其中抽取不同种类的书共 2 本,共有几种不同的取法?(提示:有几种不同的种类,每个种类各有几种抽法?)

4. 从 1、2、3、4……40 这 40 个数中取出两个不同的数,使取出的两个数相加的和是 3 的倍数,有几种不同的取法?(提示:和是 3 的倍数,加数有哪些情况?)

5. 有 10 个参加数学竞赛的名额,要分给 7 所学校,每校至少一个名额,有多少种不同的名额分配方法?

竞赛题精选

1. 有 8 张卡片,其中 2 张写 0;2 张写 1,2 张写 2,2 张写 3。在这 8 张卡片中取出 2 张,用卡片上的数字分别表示一个十位数和一个个位数,共可组成几个不同的两位数?(上海市第五届小学生五年级数学竞赛试题)

2. 邮电局门口有三个邮筒,小明手中有 4 封信需要寄出,问这四封信投入邮筒共有多少种不同的投法?(青岛市小学生数学竞赛四年级第一试试题)

3. 有红、黄、蓝、紫、白五种颜色的花,把不同的颜色的任意三种扎成一束,可以扎成多少种不同的花束?

4. 光明小学六年级甲、乙、丙三个班组织了一次文艺晚会,共演出了十四个节目,如果每班至少演出三个节目,那么三个班演出节目的不同情况有多少种?



第三讲 分数计算



学练提要

分数、小数四则运算是小学数学重要的组成部分,它对于培养同学们的计算能力起十分重要的作用。对于分数的混合运算除了掌握常规的四则运算法则外,还应掌握一些特殊的运算技巧,才能提高速度,解答较难的问题。

在解答分数计算问题时,一要牢记分数和小数的基本运算法则,二要掌握分数与小数的互化。



例题精选

例1 计算: $(4.67+3.33+1) \times (3.7+2.85)$

解析:与整数的凑整法相同,在分数与小数运算中,充分利用四则运算法则和运算定律,使部分数的和、差、积、商凑成整数,使计算简便。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (4.67+3.33+1) \times (3.7+2.85) \\ &= [(4.67+3.33)+1] \times (3.7+2.85) \\ &= 9 \times 6.55 = 58.95 \end{aligned}$$



试一试

$$[(1+3)+(4+2)] \times (2.5-1.8)$$

例2 $\frac{1 \times 2 \times 3 + 2 \times 4 \times 6 + 3 \times 6 \times 9}{1 \times 3 \times 5 + 2 \times 6 \times 10 + 3 \times 9 \times 15}$

解析:观察到分子中每项都有 $1 \times 2 \times 3$,分母中每项都有 $1 \times 3 \times 5$,因而可提取公因式,再约分使计算简便。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1 \times 2 \times 3 + 2 \times (1 \times 2 \times 3) + 3 \times (1 \times 2 \times 3)}{1 \times 3 \times 5 + 2 \times (1 \times 3 \times 5) + 3 \times (1 \times 3 \times 5)} \\ &= \frac{(1 \times 2 \times 3) \times (1+2+3)}{(1 \times 3 \times 5) \times (1+2+3)} \\ &= \frac{1 \times 2 \times 3}{1 \times 3 \times 5} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$



试一试

$$\frac{1 \times 2 + 2 \times 4 + 4 \times 8 + 8 \times 16}{1 \times 3 + 2 \times 6 + 4 \times 12 + 8 \times 24}$$

例3 $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}) \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4})$

解析:通分计算显然很麻烦,注意到被减数和减数的两个因数中都有 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$,

我们可设

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = A \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = B, \text{ 则}$$

$$\text{原式} = (1+A) \times B - (1+B) \times A$$

$$= B + AB - AB - A$$

$$= B - A$$

把 B 和 A 代入,得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$



试一试

$$(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}) \times (\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}) - (\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}) \times (\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9})$$

例4 $26\frac{8}{9} \div 9$

解析:用一般方法先化假分数,再计算也可以,但比较麻烦,观察到 $26\frac{8}{9} = 27 - \frac{1}{9}$,

于是可得

$$\text{原式} = (27 - \frac{1}{9}) \div 9$$

$$= 27 \div 9 - \frac{1}{9} \div 9$$

$$= 3 - \frac{1}{81}$$

$$= 2\frac{80}{81}$$





试一试

$$37\frac{18}{19} \div 19$$

例5 $2.4 \times \frac{1}{4} - 0.8 \times \frac{1}{6} + 1.5 \times \frac{4}{15}$

解析:小数与分数相乘,一般可将小数化成分数计算,要注意运算定律的应用。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{12}{5} \times \frac{1}{4} - \frac{4}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{2} \times \frac{4}{15} \\ &= \frac{3}{5} - \frac{2}{15} + \frac{2}{5} \\ &= 1 - \frac{2}{15} \\ &= \frac{13}{15} \end{aligned}$$



试一试

计算 $3.6 \times \frac{1}{8} + 1.5 \times \frac{1}{2} + 0.36 \div \frac{9}{10}$

例6 解关于 x 的方程

$$x \div 3 + \frac{1}{3} \times (x - 2.4) = 0.2 \times \frac{4}{5}$$

解析:虽此题为解方程,但解时涉及分数小数四则混合计算,题目中 $x \div 3$ 可转化为 $x \times \frac{1}{3}$,利用乘法分配律求出方程的解。

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x - 0.8 = 0.16$$

$$\frac{2}{3}x = 0.96$$

$$x = 0.96 \times \frac{3}{2}$$

$$x = 1.44$$

