图书在版编目(CIP)数据

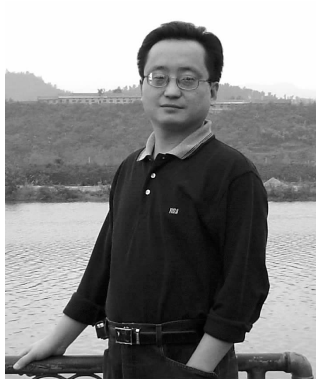
向量值鞅空间理论 / 于林著. —北京:北京理工大学出版社,2005.9

ISBN 7-5640-0607-2

Ⅰ. **向**…　Ⅱ. **于**…　Ⅲ. **线性空间—高等学校—教材**　Ⅳ. 0177.3

中国版本图书馆 CIP **数据核字**(2005)**第** 097478 **号**

出版发行／	北京理工大学出版社
社　　址／	北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／	100081
电　　话／	(010)68914775(办公室)　68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)
网　　址／	http://www.bitpress.com.cn
电子邮箱／	chiefedit@bitpress.com.cn
经　　销／	全国各地新华书店
印　　刷／	北京圣瑞伦印刷厂
开　　本／	850 毫米×1168 毫米　1/32
印　　张／	7.125
字　　数／	175 千字
版　　次／	2005 年 9 月第 1 版　2005 年 9 月第 1 次印刷
印　　数／	1～1500 册　　责任校对／ 郑兴玉
定　　价／	15.00 元　　责任印制／ 刘京凤



作者简介：

于林，男，生于1965年，山东省滨州人，1986年毕业于华中师范大学数学系，获理学学士学位；1992年毕业于武汉大学数学与计算机科学学院，获理学硕士学位；2000年毕业于武汉大学数学与统计学院，获理学博士学位。现为三峡大学理学院教授、硕士研究生导师、中国数学会会员、湖北省数学学会第九届理事会副理事长。主要从事“鞅论及其在Banach空间几何学与调和分析中的应用”和“随机分析理论及其应用”等领域的研究。近年来先后主持完成：湖北省教育厅优秀中青年学者项目“鞅论及其在空间几何与调和分析中的应用”、湖北省教育厅重点项目“向量值鞅Hardy空间理论及其应用”、三峡大学科研基金项目“鞅论及其复空间几何学与调和分析中的应用”等课题研究，发表学术论文30余篇。其博士学位论文《小指标向量值鞅空间》获湖北省第四届全省优秀博士论文奖；论文《向量值Lipshitz鞅空间$_p\lambda^\beta(X)$和$_p\Lambda^\beta(X)$》获湖北省第九届自然科学优秀学术论文二等奖；项目成果《鞅论在Banach空间几何学及调和分析中的应用》获得三峡大学科学技术成果二等奖；系列论文《向量值鞅Hardy空间的解析理论与Banach空间几何性质》获得三峡大学科学技术成果一等奖。

内 容 简 介

鞅空间理论是一个具有系统性成果和广泛历史背景的学科分支，它和经典分析、经典概率有着多方面的深刻联系。近年来，由于在值空间为 Banach 空间的框架之下考虑有关的结果，将鞅论、调和分析、Banach 空间几何学的研究有机结合起来。本书对近年来国内外学者在 Banach 空间值鞅的空间理论方面所取得的研究成果进行总结，力求内容新颖，论述严谨，条理清楚，便于读者自学。

本书内容包括：Banach 空间中概率论的基本知识，B 值鞅的一些基本结果，B 值鞅空间，鞅空间的原子分解理论，鞅 Hardy 空间的共轭理论，鞅空间的实内插理论。

本书可供高等院校数学学科的高年级本科生、研究生、教师及数学爱好者学习参考。

前　言

一、鞅空间理论的历史概况

鞅这一概念是法国概率学家 J. Ville 于 1939 年首先引入概率论的，他在 20 世纪 30 年代已作了若干初步的工作. Lévy 最早研究了鞅序列，但是将此发扬光大的要归功于美国的概率论学家 Doob，他于 1953 年在其名著《Stochastic Process》中首次系统总结了 Lévy 和他自己有关鞅的理论及应用成果，从而奠定了经典鞅论的理论基础，使鞅论成了随机过程理论的一个独立分支. 自此以后，关于鞅论的研究工作突飞猛进，其在理论和应用上的重要性也日益突出. 在这一发展过程中，有一日渐显著的重要特点是鞅论正在向其他数学分支渗透并与之结合形成许多新的分支. 这里所谈的"鞅空间理论"正是概率论与分析学两者的结合，更确切地说是鞅论与泛函分析、调和分析的结合. 概率论与分析数学相互结合而产生的另一个重要分支则是由 K. Itô 所创立的随机分析理论，随机分析可以说是现代概率论中最为活跃的一个分支. 不过随机分析并不是本书所要讨论的内容.

20 世纪 70 年代，Fefferman 和 Stein[42] 系统地发展了 $\mathbf{R}^n$ 上的 H_p 空间理论，几乎与此同时，鞅论中的 H_p 理论也应运而生. 特别是由于 Burkholder、Gundy、Davis 等著名学者的杰出工作，形成了现代鞅论的一个新的分支——鞅空间理论（或称 H_p 鞅论）.

1976 年，Burkholder 和 Gundy[15] 证明了著名的 Burkholder-Gundy 不等式. 这一不等式说明当 $1<p<\infty$ 时，鞅的极大函数与均方函数具有等价的 L_p 范数，从而说明了鞅 Hardy 空间 H_p^S

和 H_p 相互等价. 随后不久，Davis[24] 将这一结果推广到 $p=1$ 的情况. 1973 年 Garsia[44] 和 Herz[46] 引入了鞅的 BMO 空间并以此刻画了鞅 Hardy 空间 H_1^S 的共轭. 1977 年，Bernard 与 Maisonneuve[6] 在鞅论中引入了原子分解，为鞅 Hardy 空间的研究提供了有力工具，这一方法最近由 Weisz[79] 作了重要发展. 近 20 年来，这个领域的发展异常迅速，经典 H_p 论中的主要成果，如 H_1 与 BMO 的对偶、H_p 的原子分解、许多算子之间的 Φ-不等式，甚至加权 Φ-不等式以及 A_p 权等，大多已在鞅论中有了令人满意的对应. 这些成果先后在 Garsia[44]、Durrett[33]、Long[64] 和 Weisz[79] 的专著中得到了系统的总结.

作为概率论和分析学两者的结合而形成的交叉领域，鞅空间理论既是鞅论的一个部分，同时也是 H_p 理论的一个侧面. 作为后者，在一定意义下可以说它是古典 H_p 理论的某种概括和推广，但这一点仅仅是事情的一个方面，而使这一领域得以迅速发展的另一重要因素是鞅方法不仅为许多重要结论提供简捷的证明，而且还促使发现了许多新的内容. 例如，应用鞅方法 Long 和 Qian 得到了 Calderon-Zygmmd 奇异积分算子理论中著名的 $T(b)$ 定理的简捷证明. 再如，Burkholder 借助于鞅变换刻画了一类新型的 Banach 空间——UMD 空间. 这说明鞅方法在分析学，特别是在调和分析研究中有着重要的作用，因此它同时受到概率论学家和分析学家两方面的关注. 自 20 世纪 70 年代以来，这一领域的研究不仅发展异常迅速，而且研究范围也正在日益扩大，并由此产生了一些崭新的领域.

二、B 值鞅论的研究概况

前面所谈的鞅局限于标量值（实数值或复数值），但自 20 世纪 80 年代初人们将注意力逐渐集中于 Banach 空间值鞅的研究上. 从历史上看，虽然早在 1953 年 Kolmogorov 就引进了 Banach

空间值随机变量的特征泛函，1951 年 Fréchet 研究了 Banach 空间上的 Gauss 分布，1953 年 Movier 和 Fortet 研究了 Banach 空间值随机序列的大数定律，但是这一领域的研究受到广泛重视并得以迅猛发展则是近 20 多年来的事，下面是几个重要事例：

（1）1966 年，Rieffel 定义了 Banach 空间的一个几何概念——可凹性，后来证明了 Banach 空间中的有界闭凸集 K 的可凹性与 K 的 Radon-Nikodym 性质是等价的．证明这一重要结论的工具即是鞅．

（2）1976 年，Edgar 运用鞅方法证明了 Banach 空间中凸集的 Radon-Nikodym 性质与 Choquet 端点的可表示性是等价的．

（3）1976 年，Hoffman-Jørgensen 与 Pisier 证明了 Banach 空间的 p-型与在其中取值的独立增量鞅满足大数定律相互等价．

（4）1974 年，Pisier 利用鞅为工具，给出了著名的 Enfle 重赋范定理的概率证明，即超自反空间具有等价的一致凸范数这一重要结论．

（5）鞅论应用于调和分析和 Banach 空间几何学的一个令人瞩目的成果是 Burkholder 的 UMD 空间（即具有无条件鞅差序列性质的空间），事实证明这类空间在包括奇异积分算子理论在内的向量值调和分析中起着十分重要的作用．调和分析中一个十分重要的问题是 L_p 空间上 Hilbert 变换的有界性问题．对于 $\varepsilon > 0$，考虑截断函数

$$H_\varepsilon f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{|s|>\varepsilon} \frac{f(t-s)}{s} \mathrm{d}s$$

M. Riesz 首先证明了当 $1 \leqslant p < \infty$ 时，极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon f(t)$ $a.e.$ 存在，记其极限为 $Hf(t)$，称之为 $f(t)$ 的 Hilbert 变换，并且 M. Riesz又证明了当 $1 < p < \infty$ 时，存在 $C_p > 0$，使得

$$\| Hf \|_p \leqslant C_p \| f \|_p, \quad \forall \ f \in L_p$$

值得指出的是有反例证明上述不等式对 $p = 1$ 不成立．

再看关于鞅变换的情况．对于鞅 $f_n = \sum\limits_{i=1}^{n} df_i$ 及其变换 $g_n =$

$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i df_i$（这里 $\{\varepsilon_i\}$ 是一个 Bernoulli 序列），Burkholder 首先证明了当 $1<p<\infty$ 时，存在 $C_p>0$，使得

$$\|g\|_p \leqslant C_p\|f\|_p$$

以上是关于实值(或复值)的情况. 向量值情况很早就引起人们的注意，即什么样的 Banach 空间 X 能使得在其中取值的函数的 Hilbert 变换或鞅变换满足相应的不等式？Burkholder 系统地研究了 Banach 空间值鞅的上述变换，并称使得在其中取值的鞅变换成立上述不等式的 Banach 空间为具有好鞅变换性质. 其后，Bourgain 证明了 Banach 空间 X 的好鞅变换性质与其上 Hilbert 变换的有界性是相互等价的. 更令人惊讶的是，Burkholder 随后又给出了好鞅变换性质的一个几何刻画，即 ξ- 凸性. 他证明了 Banach 空间 X 具有好鞅变换性质当且仅当 X 是 ξ- 凸的，即存在函数 ξ：$X\times X\to\mathbf{R}$，使得

(i) $\xi(x,y)=\xi(y,x)$，$\forall\ (x,y)\in X\times X$；

(ii) $\forall\ y\in X$，$\xi(\cdot,y)$ 是凸函数；

(iii) 当 $\|y\|\leqslant 1$ 时，$\xi(x,y)\leqslant\|x+y\|$，且 $\xi(0,0)>0$.

这样就证明了 Banach 空间 X 的好鞅变换性质、Hilbert 变换的有界性及其 ξ- 凸性三者是相互等价的，它们确定的是同一类 Banach 空间即 UMD 空间(Banach Space in which all Martingale Differences are Unconditional). UMD 空间的研究进一步揭示了鞅变换、调和分析及 Banach 空间几何中所存在的内在联系，极大地推动了这些领域的研究.

最近，Burkholder 和 G. Wang 等又应用鞅变换及 UMD 空间的一些特性研究了 Hilbert 空间上奇异积分算子、经典调和分析以及经典鞅论中若干不等式的最优系数，得到了许多十分精细的结果.

(6) 1990 年，刘培德首先对 Banach 空间值鞅引入了 p 均方算子和 p 条件均方算子，并以此为工具研究了一系列基本的 B 值

鞅不等式和鞅空间，揭示了 B 值鞅不等式和鞅空间的相互嵌入关系与在其中取值的 Banach 空间的一致凸性和一致光滑性之间的密切联系. 这些在刘培德的专著《鞅与 Banach 空间几何学》中均有系统的阐述.

以上事实表明，向量值鞅的研究不仅仅是实值鞅的一种自然推广，而是将随机变量或随机过程的概率性质与在其中取值的抽象空间的结构或几何性质有机结合起来. 鞅论在 Banach 空间几何理论方面的成功应用，显示了 B 值鞅理论有着不同于实值鞅的独立价值，因而成为人们关注的一个中心.

近年来，这一领域的研究出现了一个新的趋势，这就是鞅论与复 Banach 空间几何学的结合. 复空间几何性质的研究最先来自关于向量值解析函数有关性质的研究，当人们发现这些性质对于实空间和复空间确有不同时，兴趣迅速增大. 近十几年以来，许多学者将鞅方法应用于复 Banach 空间几何性质的研究并取得了丰硕成果.

1. **解析 Radon-Nikodym 性质(ARNP)的鞅刻画**. 1982 年，Bukhvalov 与 Danilevich[10] 研究了单位圆中定义的 Banach 空间值解析函数的边界性质，由此定义了解析 Radon-Nikodym 性质. 此后，1985 年，Dowling[30] 用有界算子和有界变差测度的可表示性刻画了 ARNP. 1985 年，Edgar[37] 引入了复空间值解析鞅并应用 L_1 有界解析鞅的 $a.e.$ 收敛性刻画了 ARNP. 最近，刘培德、Saksman 和 Tylli 定义了弱解析 Radon-Nikodym 性质(WARNP)，并以 L_1 有界解析鞅(或 Hardy 鞅)标量收敛于 Pettis 可积函数刻画了 WARNP.

2. **复凸性的鞅刻画**. Davis[25] 最早研究了复拟 Banach 空间的复凸性，并用 H_p- 鞅不等式刻画了复空间的 PL 一致凸性. 对于 H_p- 鞅和 H_p- shrub，刘培德和 Bekjan[57] 引入了 q 条件均方函数，并且证明了该函数的各种形式的有界性决定复空间的 PL 一致凸

性. 另外,刘培德和 Bekjan**还研究了**H_p-shrub**的各种类型的空**

间以及 H_p-shrub 上的算子和 q 条件均方函数的增长速度与 q - PL 一致凸性的关系. 魏文展与刘培德[74]研究了在一般概率空间上定义的复对称鞅，应用这种鞅的不等式刻画了 PL 一致凸性.

代替 PL 一致凸性，1988 年许全华[83]引入了 H -一致凸性，这种复凸性更适用于对于向量值解析函数的研究. 许全华[84]用 Hardy 鞅的不等式刻画了 H -一致凸性. 刘培德和 Bekjan[58]定义了解析一致凸性，并应用 Hardy 鞅的 q 条件均方函数的有界性和凸 Φ -不等式对之进行了刻画.

3. 解析 UMD(AUMD)空间. 在 B 值鞅论中一个令人瞩目的成果是 Burkholder 的 UMD 空间，即具有无条件鞅差序列性质的空间，将其中的鞅分别换成解析鞅和 Hardy 鞅则得到 AUMD 空间和 HUMD 空间. 许全华首先证明了 AUMD 空间等价于 HUMD 空间，从而统称为 AUMD 空间. Garling 指出，AUMD 空间具有 ARNP,并且每个 AUMD 空间具有等价的范数使之为 q - PL 一致凸空间（$2 \leqslant q < \infty$）. 刘培德和 Bekjan 应用鞅变换的不等式和强弱大数定律给出了 AUMD 的刻画，Blower 则应用乘子理论刻画了 AUMD 空间.

复空间几何学研究至今方兴未艾，有关这一领域的研究已是当前的一个热点.

三、本书的主要内容

虽然对 Banach 空间值鞅的研究已有 20 多年的历史，但对 Banach 空间值鞅的 Hardy 空间理论研究则至多是近 10 年来的事情. 本书试图对近年来国内外学者在 Banach 空间值鞅的空间理论方面所取得的研究成果进行总结，其中有相当一部分内容是作者的研究工作. 本书共分为八章：第一章简要介绍一些 Banach 空间中概率论的基本概念；第二章主要介绍 B 值鞅的一些基本结

果；第三章初步引入 B 值鞅空间；第四章介绍鞅空间的原子分解理论；第五章和第六章是鞅 Hardy 空间的共轭理论；第七章介绍鞅平削算子的一类推广；第八章是鞅空间的内插理论（实方法）.

顺便介绍一些国内出版的该领域相关著作：龙瑞麟著《H_p 鞅论》主要介绍了实值鞅的 Hardy 空间理论，是我国此领域的第一部专著，乃经典著作；吴智泉、王向忱著《巴氏空间上的概率论》是我国第一本系统介绍 Banach 空间概率论的专著；刘培德著《鞅与 Banach 空间几何学》系统介绍鞅论在 Banach 空间几何学与调和分析中的应用，是当前国内在此领域最具权威性的专著；胡迪鹤、甘师信著《近代鞅论》有相当篇幅介绍了 Banach 空间值鞅和鞅型序列；万成高著《鞅的极限理论》侧重研究 Banach 空间值鞅的极限理论. 而在国外，由 Michel Ledoux 和 Michel Talagrand 所著《Probability in Banach spaces》是一部极有影响的著作. 本书前两章有许多材料参考了上述著作.

鞅空间理论是一个具有系统性成果和广泛历史背景的学科分支，它和经典分析、经典概率有着多方面深刻联系. 近年来由于在值空间为 Banach 空间的框架之下考虑有关的结果，给这门学科注入了新的活力. 它不仅使经典的理论呈现出新的面貌，而且带来了新的研究课题和新的研究方向，特别是将鞅论、调和分析、Banach 空间几何学的研究有机结合起来.

在本书编写工作完成之际，我愿谈一点个人的体会：面对具有丰富历史和系统性成果的理论大厦，我仰慕它的缜密和精致，在包括概率论、泛函分析、调和分析的多种学科之间穿行的我感到知识海洋的浩瀚与广袤，同时感到要得到一点进展就要付出一份艰辛，在我真的做出一点成绩之时内心又是充满了喜悦. 辛苦也好，喜悦也罢，我愿把在理论大厦中开掘出的这些成果看作我研究工作的起点，同时还希望起到抛砖引玉的作用，引起同仁更多的兴趣，促使这方面的研究工作有更多的发展. 由于本人学识有限，本书错误和不妥之处在所难免，在此敬请批评指正，以期改进.

最后，借此机会对我的两位授业恩师：武汉大学的刘培德教授和华中科技大学的黄志远教授表示最诚挚的感谢！感谢两位导师多年来对学生的惠教、指导、关心和培养. 衷心感谢武汉大学的许明浩教授、侯友良教授、杜金元教授，中国科学院武汉物理与数学研究所的欧阳才衡研究员，中山大学的任佳刚教授等诸位老师所曾给予的教诲和帮助！感谢我的同窗学友西北工业大学的丁晓庆教授、中国科学院数学与系统科学研究院的骆顺龙研究员、中国科学院武汉物理与数学研究所的陈泽乾研究员的关心和帮助.

感谢我的家人对于我的学习和工作所给予的关心和长期不懈的支持！

另外，本课题研究曾先后得到湖北省教育厅优秀中青年学者项目(98B016)和重点项目(2002A53008)、三峡大学科研基金项目(KJB0103)、三峡大学科技创新团队计划项目的资助，本书的出版得到三峡大学应用数学重点学科建设经费的资助，在此对三峡大学的领导和有关部门表示感谢.

于　林

2005 年 5 月于宜昌

目　　录

第一章　B 值随机变量及其基本性质

本书研究的领域属于 Banach 空间中的概率论的一个分支，所要研究的主要对象是取值于 Banach 空间的一种特殊随机过程——鞅. 因此，首先必须建立无穷维向量值随机变量的概念.

无穷维向量值随机变量的概念是普通的随机变量和有限维随机向量概念的推广或者说一般化. Banach 空间或一般抽象空间中的概率论是将随机变量和随机过程视为适当的抽象空间中的随机向量和向量值随机过程这一种观点而发展起来的，突破了经典概率论的研究对象只局限于取实（或复）数值的随机变量这一限制.

关于抽象空间中随机变量的定义，有各种不同的形式，在一般情况下，它们还确实是彼此不同的概念. 本书采用现今比较通用的定义，它是普通的随机变量概念的一种自然的推广. 按照这一定义，抽象空间中的随机变量就是定义于一个概率空间上而取值于该抽象空间的某种可测函数. 因此，首先需要介绍一些关于向量值可测函数的知识. 另外，由于本书的研究范围局限于实 Banach 空间值鞅，所以下面的讨论都将值空间选取为实 Banach 空间.

§1.1　向量值可测函数与随机变量

设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间，称 σ 代数 $\mathscr{F}$ 是完备的，若 $A\in\mathscr{F}$，$P(A)=0$，则对任意的 $B\subset A$，都有 $B\in\mathscr{F}$. 根据测度论知识，任何 $\sigma-$代数都可以通过完备化使之成为完备的 $\sigma-$代数. 例如以 $\mathscr{Y}$ 表示 $\mathscr{F}$ 中的零概率集的全体子集，则 $\overline{\mathscr{F}}=\sigma\{A\triangle B: A\in\mathscr{F},B\in\mathscr{Y}\}$ 就是

$\mathscr{F}$ 的完备 σ－代数，其中 $A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$ 称为 A 与 B 的对称差. 对于任意的 $B\in\mathscr{Y}$, $A\in\mathscr{F}$，定义 $\overline{P}(A\triangle B)=P(A)$，则 $\overline{P}$ 是 $\overline{\mathscr{F}}$ 上的概率测度，称 $\overline{P}$ 是 $\overline{\mathscr{F}}$ 上的完备概率测度，$(\Omega,\overline{\mathscr{F}},\overline{P})$ 是完备的概率空间. 所以，若无特别说明，今后本书中所出现的概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 均为完备概率空间.

一、向量值可测函数的定义及基本性质

定义 1.1.1 设向量值函数 $f:\Omega\rightarrow X$，如果对于 X 上的任何连续线性泛函 $\varphi\in X^*$，数值函数 $\varphi[f(\omega)]$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的可测函数，则称 $f(\omega)$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的弱可测函数.

定义 1.1.2 称向量值函数 $f=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iI_{A_i}$ 为 Ω 上的阶梯函数（或者简单函数），若 $A_i\in\mathscr{F}$，$x_i\in X$，$i=1,2,\cdots,n$，$A_i\cap A_j=\Phi\ (i\neq j)$，$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$；称向量值函数 $f=\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_iI_{A_i}$ 为 Ω 上的可数值函数（或者初等函数），若 $A_i\in\mathscr{F}$，$x_i\in X$，$i=1,2,\cdots$，$A_i\cap A_j=\Phi\ (i\neq j)$，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$.

显然，阶梯函数（或者简单函数）是可数值函数（或者初等函数）.

定义 1.1.3 称向量值函数 $f:\Omega\rightarrow X$ 为 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的强可测（或者简单地称可测）函数，如果存在阶梯函数列 $\{f_n\}$ 几乎处处强收敛于 f，即 $\exists\Lambda\in\mathscr{F}$，$P(\Lambda)=0$，$\forall\ \omega\in\Omega-\Lambda$，有 $\|f_n(\omega)-f(\omega)\|\rightarrow 0\ (n\rightarrow\infty)$. 此时，记为 $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}f_n=f$，$a.e.$ 或 $f_n\rightarrow f$，$a.e.$.

定理 1.1.1 向量值函数 f 可测的充分必要条件是存在可数值函数列几乎处处收敛于 f.

证明 只需证明充分性. 设 $\{f_n\}$ 是可数值函数列，且几乎处处有 $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}f_n=f$，即存在 $\Lambda_0\in\mathscr{F}$，$P(\Lambda_0)=0$，$\forall\ \omega\in\Omega-\Lambda_0$，

有

$$\lim_{n\to\infty}\| f_n(\omega) - f(\omega) \| = 0$$

对于每一个 $n \geqslant 1$，不妨设 $f_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_n^k I_{E_n^k}$，其中，$E_n^k \in \mathscr{F}$，$x_n^k \in X$，$k = 1,2,\cdots$. 由于 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_n^k = \Omega$，故有 m_n 使得

$$P\left(\bigcup_{k=m_n+1}^{\infty} E_n^k\right) < \frac{1}{n^2}$$

令

$$\overline{f}_n = \begin{cases} f_n, & \text{当 } \omega \in \bigcup_{k=1}^{m_n} E_n^k \\ 0, & \text{当 } \omega \notin \bigcup_{k=1}^{m_n} E_n^k \end{cases}$$

于是，$\{\overline{f}_n\}$ 为阶梯函数列，且 $P(\overline{f}_n \neq f_n) \leqslant \frac{1}{n^2}$. 记 $\Lambda_1 = \overline{\lim_{n\to\infty}}\{\overline{f}_n \neq f_n\}$，由 Borel—Cantelli 引理知 $P(\Lambda_1) = 0$，对于任意的 $\omega \in \Omega - (\Lambda_0 \cup \Lambda_1)$，存在 $M > 0$，当 $n > M$ 时，$\omega \in \{\overline{f}_n = f_n\}$，故

$$\lim_{n\to\infty}\| \overline{f}_n(\omega) - f(\omega) \| = \lim_{n\to\infty}\| f_n(\omega) - f(\omega) \| = 0$$

即简单函数列 $\{\overline{f}_n\}$ 几乎处处收敛于 f，根据定义，知 f 可测. □

二、强可测与弱可测的关系

由定义容易得到下面的基本结果.

定理 1.1.2 向量值函数 f 是 $(\Omega,\mathscr{F}, P)$ 上的可测函数，则 f 是弱可测函数，$\| f \|$ 是实值可测函数.

证明 因 f 是 $(\Omega,\mathscr{F}, P)$ 上的可测函数，于是，存在简单函数列 $f_n = \sum_{i=1}^{k_n} x_n^i I_{A_n^i}$，$n \geqslant 1$，使得

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f, \ a.e.$$