一流学校 一流老师 一流资源

三一丛书

# 线性代数与空间解析几何

## 要点与解题

龚冬保 魏战线 编著

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交大教学资源文库　三一丛书

# 线性代数与空间解析几何
## 要点与解题

龚冬保　魏战线　编著

西安交通大学出版社

## 内容提要

本书通过对300多道线性代数和空间解析几何典型例题的分析、求解和注释,归纳总结了本课程分析处理问题的基本方法和常用的解题技巧,所选的每道题都力求有较新颖、独特的解法,以使读者能够举一反三、触类旁通,提高分析问题和解决问题的能力。

本书可作为“线性代数与空间解析几何”课程的教学参考书,也可供报考硕士研究生的读者复习应考之用。


**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数与空间解析几何要点与解题/龚冬保等编.
—西安:西安交通大学出版社,2006.8
(西安交大教学资源文库.三一丛书)
ISBN 7-5605-2224-6

Ⅰ.线… Ⅱ.龚… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教学参考资料②空间几何:解析几何-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O151.2②O182.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第064456号

书　　名:线性代数与空间解析几何要点与解题
编　　著:龚冬保　魏战线
出版发行:西安交通大学出版社
地　　址:西安市兴庆南路25号(邮编:710049)
电　　话:(029)82668357　82667874(发行部)
　　　　　(029)82668315　82669096(总编办)
印　　刷:陕西丰源印务有限责任公司
字　　数:201千字
开　　本:880 mm×1 230 mm　1/32
印　　张:5.5
版　　次:2006年8月第1版　2006年8月第1次印刷
书　　号:ISBN 7-5605-2224-6/O·238
定　　价:9.80元


---

# 丛书总序

为了使普通高等学校理工类专业的大学生更好地学习、掌握基础课和专业基础课知识，我们组织出版了这套“三一”丛书，目的就是提供一流的学习资源，使大家共享一流教师的教学经验和教学成果，为今后的学习打下良好的基础。

西安交通大学是国内仅有的几所具有百年历史的高等学府，是首批进入国家“211 工程”建设的七所大学之一，1999 年被国家确定为我国中西部地区惟一一所以建设世界知名高水平大学为目标的学校。西安交大历来重视本科生教学，1996 年成为全国首家本科教学评估为优秀的大学。学校拥有国家级、省部级、校级教学名师数十名，具有丰富的、一流的教学资源。本丛书均由西安交通大学长期在教学一线主讲的教授、副教授主编，他们具有丰富的基础课、专业基础课教学和辅导经验。丛书作者们在长期的教学实践中，深深了解学生在学习基础课、专业基础课时的难点和困惑点之所在，对如何使学生更有效地学习、掌握课程的基本知识和解题技巧进行了深入的探索和研究，并将成果体现于书中。

本丛书针对中少学时课程的特点和教学要求，以普通高等学校的学生为主要对象，不拘泥于某一本教材，而是将有特色和使用量较大的各种版本的教材加以归纳总结，取其精华，自成一体。书中对课程的基本内容、研究对象、教学要求、学习方法、解题思路进行了全面、系统的

总结和提炼，按基本知识点、重点与难点、典型题解析、自我检测题等环节进行编排。本丛书既可单独使用，也可与其他教材配合使用。

我们衷心希望本丛书成为您大学基础课和专业基础课学习阶段的良师益友，帮助您克服困难，进入大学学习的自由王国，并祝您早日成为国家的栋梁之材！

在学习使用过程中，您如果发现书中有不妥之处或有好的建议，敬请批评指正并反馈给我们，我们会进一步改进自己的工作，力争使您满意。

真诚感谢您使用西安交大版图书。

西安交大出版社网址：http://press.xjtu.edu.cn

http://www.xjtupress.com

理工医事业部信箱：jdlgy31@126.com

西安交通大学出版社

2006 年 6 月

# 前　言

近年来，不少院校已将线性代数与空间解析几何合并为一门课程；在硕士研究生入学考试中，线性代数与代间解析几何结合的综合题也已成为重要的考试内容。由此本书选编了300道线性代数和空间解析几何的典型题为例题，力图讲清楚分析问题的方法及本课程的解题技巧。在正文中，我们的叙述较为精炼，而将一些有关的知识、方法、解题思路放在旁注之中，以启迪读者思维。因此，读者在阅读本书时，一定要边看书边自行推导，以掌握本书所讲的解题方法与技巧，并用这些方法去解更多的题，这对学好本课程必有益处。本书在每章后都有一套独立作业题，是为读者检查学习效果而设置的。

数学分析、线性代数、空间解析几何相结合，特别是代数与几何相结合，是本书的又一特点。以三维的几何空间为模型，去理解和发展一般 $n$ 维线性空间的理论，思路较为自然；理解了一般 $n$ 维空间的理论后，将它们用于几何空间，就能高屋建瓴，势如破竹。

本书可作为线性代数与空间解析几何课程的教学参考书，也可供准备参加硕士研究生入学考试的读者参考。由于不同专业的读者对本课程的要求不同，因此，本书的部分内容超出了一般专业教学的要求，凡属这些内容的题或章、节，我们都加了星号“*”，没有学过与之相关内容的读者，可以不读这些部分。

本书第1、2、3章由龚冬保编写，第4、5、6、7章由魏战线编写，最后由龚冬保统稿。限于编者水平，本书难免有疏漏和不足之处，恳请读者批评指正。

编者

2006年6月

# 目　录

**丛书总序**

**前言**

**第 1 章　矩阵与行列式**

1.1　**矩阵** ………………………………………… (1)

1.2　**行列式** ………………………………………… (13)

1.3　**克拉默法则** ………………………………………… (23)

1.4　**自测题** ………………………………………… (28)

**第 2 章　向量代数及曲面与曲线**

2.1　**向量代数,平面与直线** ………………………………………… (30)

2.2　**曲面与曲线** ………………………………………… (46)

2.3　**自测题** ………………………………………… (53)

**第 3 章　$n$ 维向量空间**

**第 4 章　线性方程组**

4.1　**线性齐次方程组** ………………………………………… (71)

4.2　**非齐次线性方程组** ………………………………………… (78)

4.3　**自测题** ………………………………………… (89)

**第 5 章　欧氏空间**

5.1　**欧氏空间的基本概念** ………………………………………… (91)

5.2　**标准正交基与施密特正交化方法** ………………………………………… (95)

5.3　**正交矩阵与正交变换** ………………………………………… (98)

5.4　**自测题** ………………………………………… (103)

**第 6 章　特征值与特征向量**

6.1　**特征值和特征向量的概念、性质与计算** ………………………… (105)

6.2　**相似矩阵与一般方阵的相似对角化** ……………………………… (117)

6.3　**实对称矩阵的对角化** ………………………………………………… (131)

6.4　**自测题** ……………………………………………………………………… (138)

**第 7 章　实二次型与二次曲面**

7.1　**二次型及其标准形** …………………………………………………… (140)

7.2　**正定二次型与正定矩阵** ……………………………………………… (150)

7.3　**二次曲面的标准方程** ………………………………………………… (157)

7.4　**自测题** ……………………………………………………………………… (164)

**附录　自测题答案与提示** ……………………………………………………… (165)

# 第 1 章　矩阵与行列式

## 1.1　矩　阵

**1-1**　若$\begin{bmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & b & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & 5 \\ -1 & c_{22} \end{bmatrix}=\boldsymbol{C}$ 则 $\boldsymbol{C}$ $=$________.

**解**　由 $4+1-a=5$　得 $a=0, c_{11}=4$.

而 $-1+2b+6=-1$ 得 $b=-3$，$c_{22}=-7$.　**填**：$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -7 \end{bmatrix}$

对 4 阶以下的矩阵乘法一定要熟悉.

**1-2**　设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维列向量，若 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$________.

**解**　设 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(x,y,z)$，则 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{bmatrix}$，故 $x^2=y^2=z^2=1$，而 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=x^2+y^2+z^2=3$.　**填**：3

$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\|\boldsymbol{\alpha}\|^2$ 本题应当能一眼看出答案.

**1-3**　设 $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，则 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=$________.

**解**　$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，故

对求 2 阶、3 阶矩阵的逆矩阵应当特别熟悉.

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

**本题求$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}$最简单的方法是用待定系数法。设**

$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ a & b & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ **得** $a+b=0$ **及** $2b=1$，**即得所求.**

**填**: $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

**1-4 设** $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\Delta\neq 0$,**则**

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}^{-1}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

**解** $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ **则** $A_{11}=a_{22}$，$A_{12}=-a_{21}$，$A_{21}=-a_{12}$ **及** $A_{22}=a_{11}$，**故可直接填答案。**

**填**: $\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}$

**请将本题的结论当公式记住.**

**1-5 若** $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ **则** $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$

**解** $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}.$

**得** $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\dfrac{\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}}{3}=\boldsymbol{E}$

**填**: $\dfrac{\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}}{3}$

**1-6 设** $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$ **及** $\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，**则** $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$

**解 由** $\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ **得** $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{E}$

**注意"逆"是乘法逆运算．要求$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}$、$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$及$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}$这几个题所用的方法都是想办法得到$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$的因式,它们与某矩阵的积为单位矩阵.**

故 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\dfrac{\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}}{2}=\boldsymbol{E}$

填：$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

**1-7** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$，则 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}=$________.

**解** 于已知的等式两边左乘 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 及移项，$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\Rightarrow \boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}\Rightarrow (\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}}{2}$

填：$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{bmatrix}$

**1-8** 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵，则(　).

(A) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$

(B) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$

(C) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$

(D) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CA}$

**解** 由于 $\boldsymbol{A}$ 可逆，故 $\boldsymbol{A}$ 等价于 $\boldsymbol{E}$(单位矩阵)，同样 $\boldsymbol{B}$ 等价于 $\boldsymbol{E}$，因此 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 等价. 故(A)成立. 选(A)

排除(B)可设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ 不是对称矩阵；排除(C)可设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{E}$；(D)与(C)是同一答案.

**1-9** 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 均为 $n$ 阶可逆矩阵，则 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=$(　).

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$　　(B) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$

(C) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$　　(D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$

**解** 本题作为选择题，可以猜测选(C)，再验证：

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B})\\
&=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}\ (\text{将 }\boldsymbol{E}\text{ 写为 }\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B})\\
&=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}
\end{aligned}
$$

选(C)

本题只要令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$ 即可排除(A)、(B)；排除(D)可令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\neq\boldsymbol{A}$，从而 $[\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}]^{-1}\neq(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

**1－10** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则必有（　）.

(A) $\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$　　(B) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

(C) $\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$　　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

**解** 选(B). 首先，用初等矩阵右乘 $\boldsymbol{A}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 作行变换，故可排除(A)、(C). $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}$ 表示将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行加于第 3 行，$\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A})$表示再将 1、2 两行互换.　　选(B)

注意 $\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$ 是初等矩阵.

**1－11** 设 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 满足关系 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$($n$ 阶单位矩阵)，则必有（　）.

(A) $\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$　　(B) $\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$

(C) $\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$　　(D) $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$

**解** $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=\boldsymbol{E}$，说明 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{A}^{-1}$，故 $\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$.　　选(A)

本题如要举反例排除(B)、(C)、(D)三选项也不难，关键是确定 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{AB})^{-1}$，且 $\boldsymbol{AC}$ 和 $\boldsymbol{BC}$ 均不可交换. 为此，设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}，可求得\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

读者可以自行验证.

本题用到乘法结合律，互逆矩阵乘法有交换律，故 $\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$. 一般矩阵的乘法不服从交换律，因此(B)、(C)、(D)未必成立.

**1－12** 若

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

计算 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$.

应该对三阶矩阵的乘法很熟悉. 本题的另一意图是说明一般 $\boldsymbol{AB}\neq$

解　$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}4&1&1\\5&1&0\\4&-1&0\end{bmatrix}$，　$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}3&0&2\\0&0&-1\\3&3&2\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\5&1&1\\1&-4&-2\end{bmatrix}$$

**BA.**

**1－13　计算**

$$\boldsymbol{A}_n=\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}^n$$

**解**
$$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}=4\boldsymbol{E}$$

**这样** $\boldsymbol{A}_3=4\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_4=2^4\boldsymbol{E}$，…

$$\boldsymbol{A}_n=\begin{cases}2^n\boldsymbol{E}, & n=2k\\ 2^{n-1}\boldsymbol{A}_1, & n=2k+1\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots)$$

**1－14　求** $\boldsymbol{A}_n=\begin{bmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{bmatrix}^n$.

**解**　$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}\lambda^2&2\lambda&1\\0&\lambda^2&2\lambda\\0&0&\lambda^2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}\lambda^3&3\lambda^2&(1+2)\lambda\\0&\lambda^3&3\lambda^2\\0&0&\lambda^3\end{bmatrix}$

**由归纳法知**　$\boldsymbol{A}_n=\begin{bmatrix}\lambda^n&n\lambda^{n-1}&\dfrac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\0&\lambda^n&n\lambda^{n-1}\\0&0&\lambda^n\end{bmatrix}$

**请读者自己完成归纳法的证明.**

**1－15　设** $f(x)=x^2-2x-3$，**而** $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1\\1&-1\end{bmatrix}$，**求** $f(\boldsymbol{A})$.

**解 1 是直接计算每一项后再做加、减法；解 2 是**

**解 1** $A^2=\begin{bmatrix}3&-1\\1&0\end{bmatrix}$， $2A=\begin{bmatrix}4&-2\\2&-2\end{bmatrix}$

$$f(A)=\begin{bmatrix}3&-1\\1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&-2\\2&-2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&1\\-1&-1\end{bmatrix}$$

**解 2**

$$f(x)=(x-3)(x+1)$$

**故** $$f(A)=\begin{bmatrix}-1&-1\\1&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&1\\-1&-1\end{bmatrix}$$

分解因式，先算加、减法，最后算一个乘法，而且知，$(A-3E)$与$(A+E)$相乘是可交换的.

**1－16** **设** $AB+E=A^2+B$，$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$，**求** $B$.

**解** $$(A-E)B=A^2-E$$

**又** $$A^2-E=(A-E)(A+E)$$

**故** $$B=A+E=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-1&0&2\end{bmatrix}$$

先用矩阵的性质（包括 $A-E$ 可逆）将等式化简，再求 $B$.

**1－17** **设 $A$ 是 $n$ 阶可逆矩阵，将 $A$ 的第 $i$ 行和第 $j$ 行对换后得矩阵 $B$. 求 $AB^{-1}$.**

**解** 由于 $|A|=-|B|\neq 0$，故 $B$ 也可逆. 设 $E_{ij}$ 是由单位矩阵 $E$ 交换 $i$、$j$ 两行所得的初等矩阵，则 $B=E_{ij}A$，$B^{-1}=A^{-1}E_{ij}^{-1}$.

$$AB^{-1}=AA^{-1}E_{ij}=E_{ij}$$

要熟悉用初等矩阵与原矩阵相乘与对原矩阵作初等变换间的关系.

**1－18** **设** $B=\begin{bmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，$(2E-C^{-1}B)A^{\mathrm{T}}=C^{-1}$，**求** $A$.

**解** $$A^{\mathrm{T}}=(2E-C^{-1}B)^{-1}C^{-1}=[C(2E-C^{-1}B)]^{-1}$$
$$=(2C-B)^{-1}$$

本题也是先化简所给的等式，直至最好计算的形式，再进行具体计算.

本题的目的之一就是介绍求具体矩阵的逆矩阵

$$=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{bmatrix}^{-1}$$

**求这个矩阵的逆,可用三种办法来求.**

1. **用初等行变换的方法**

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\2&1&0&0&0&1&0&0\\3&2&1&0&0&0&1&0\\4&3&2&1&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&-1&1&0&0\\1&1&1&0&0&-1&1&0\\1&1&1&1&0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-2&1&0&0\\0&0&1&0&1&-2&1&0\\0&0&0&1&0&1&-2&1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}$$

2. **用分块矩阵的方法**

**设** $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{11}&\boldsymbol{D}_{12}\\\boldsymbol{D}_{21}&\boldsymbol{D}_{22}\end{bmatrix}$**,其中**

$$\boldsymbol{D}_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{D}_{12}=\boldsymbol{O},\ \boldsymbol{D}_{22}=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{D}_{21}=\begin{bmatrix}3&2\\4&3\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}$$

**则**

**的种种方法. 解1是最基本的方法;解2是分块的方法,只要已知矩阵有一个二阶零矩阵的小块,对上、下三角矩阵这样做也不太繁;解3则是一般教材上不太讲的用解方程组求逆变换的方法来求逆矩阵,对三角形矩阵来说,这样做也相当简便.**

**当然,本题用求** $\boldsymbol{D}^*$ **的方法也不难,因为** $|\boldsymbol{D}|=1$**,故** $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}^*$**.**

**对这样的4阶矩阵求逆,可直接设** $A=$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\a_{21}&a_{22}&0&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{bmatrix}$$

**由** $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$**,**

$$DA=\begin{bmatrix} D_{11}A_{11} & D_{11}A_{12} \\ D_{11}A_{11}+D_{22}A_{21} & D_{21}A_{12}+D_{22}A_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix}$$

$E$ 是二阶单位矩阵，则 $A_{12}=O$，$A_{11}=A_{22}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$，

$$A_{21}=-D_{22}^{-1}D_{21}A_{11}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 用解线性方程组(或求逆变换)的方法

令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ 2x_1 + x_2 = y_2 \\ 3x_1+2x_2+x_3 = y_3 \\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=y_4 \end{cases}$$

即 $A^{-1}X=Y$，则 $X=AY$

解得

$$x_1=y_1$$
$$x_2=-2y_1+y_2$$
$$\begin{aligned} x_3&=-3y_1-2(-2y_1+y_2)+y_3 \\ &=y_1-2y_2+y_3 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} x_4&=-4y_1-3(-2y_1+y_2)-2(y_1-2y_2+y_3)+y_4 \\ &=y_2-2y_3+y_4 \end{aligned}$$

$$X=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}Y,\quad A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

便可定出 $a_{21}=-2, a_{22}=1, a_{31}=1, a_{32}=-2, a_{33}=1, a_{41}=0, a_{42}=1, a_{43}=-2, a_{44}=1$. 读者不妨一试，用分块法求逆矩阵对特殊的高阶矩阵很有效.

用解方程组求逆矩阵的方法，对求三角矩阵的逆也很有效.

本题介绍三种求逆矩阵的方法供读者参考.

**1－19** 设 $A$ 是三阶方阵，$|A|=\frac{1}{2}$，求 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$.

解 由 $AA^*=|A|E=\frac{1}{2}E$ 得 $2A^*=A^{-1}$，$(3A)^{-1}=\frac{1}{3}$

$A$ 的伴随矩阵 $A^*$ 不仅在求 $A^{-1}$ 中有用，还可通过它来研究矩阵 $A$.

$A^{-1}$，故$(3A)^{-1}-2A^{*}=-\frac{2}{3}A^{-1}$，$|(3A)^{-1}-2A^{*}|=-\frac{16}{27}$.

**1-20** 设

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{bmatrix}$$

而 $X=AX+B$. 求 $X$.

请读者仿 1-18 题的方法自行求 $(E-A)^{-1}$.

**解** $(E-A)X=B$，$X=(E-A)^{-1}B$.

$$(E-A)^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0&2&1\\-3&2&1\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$X=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0&2&1\\-3&2&1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\2&0\\1&-1\end{bmatrix}$$

**1-21** 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}$，$A^{*}X=A^{-1}+2X$. 求 $X$.

$AA^{*}=|A|E$.

**解** 由 $A^{*}X=A^{-1}+2X$，

得
$$(|A|E-2A)X=E$$
$$X=(|A|E-2A)^{-1}$$

$$|A|=4,\qquad 4E-2A=2\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}$$

$$X=(4E-2A)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$$

**1-22** 设 $A=(a_{ij})_{3\times3}$是实矩阵，满足：① $a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,3)$；② $a_{11}\neq0$. 计算$|A|$.

满足这样条件的 $A$ 是正交矩阵.

**解** 由 $a_{ij}=A_{ij}$ 知 $A^{*}=A^{\mathrm{T}}$，由 $AA^{*}=|A|E$ 得

$$AA^{\mathrm{T}}=|A|E$$

两端取行列式，得