

第一讲 对数学的认识

对数学的认识，在中学数学教学大纲中有所论述，如 1992 年国家教委编订的《九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲》中指出：“数学的研究对象是现实世界的空间形式和数量关系。在当代社会中，数学的应用非常广泛，它是人们参加社会生活，从事生产劳动和学习、研究现代科学技术必不可少的工具，它的内容、思想、方法和语言已广泛渗入自然科学和社会科学，成为现代文化的重要组成部分”在 1996 年国家教委编订的供试验用的新的《全日制普通高级中学数学教学大纲》中这段话只删去了“已广泛渗入自然科学和社会科学”这几个字。按大纲这一表述来认识作为课程基本内容的数学科学，从而更好地理解整个中学数学课程。不能不是每个中学数学教师的必然的要求。

我们认为，按大纲的表述正确而深刻的认识数学的种种整体性问题。是理解数学课程、研究数学并教好数学的关键环节之一，不能设想，一个对数学缺乏深刻认识的人能成为好的数学教师。而在实际当中，对中学数学教师按大纲正确认识数学的问题往往为人们所忽视，许多阐释中学教学大纲的著述对此一带而过，所用的语言甚至不多于大纲本身所用的语言。

这种对大纲的这一部分注意不够的情况已产生了负的效果，对数学认识的误导还是相当严重的，例如认为数学只是理论的产物或者只是人的实践甚至单一的生产实践的产物的观点时

有所见甚至较频繁地出现，认为数学只是定量科学或数学方法只是定量方法的观点甚至现在还充斥与数学教育有关的著述。对数学的价值评价甚低，学数学的学生甚至中学数学老师也经常发出“数学有什么用？”的叹息，报考数学系的优秀学生锐减，许多数学专业不得不向‘软件’靠拢，等等。

因此正确认识数学的问题可以说非常迫切地提到日程上来了。正确认识数学不仅能避免上述误导，不仅是一种知识，而且，更为重要的，它是完成数学教学大纲规定的教学目的的保证。

正因为如此，本书设立本讲，而本讲则以数学的对象、数学的特点、数学的发展规律问题和数学符号等 4 节来展开数学教学大纲，即数学课程标准中的前引的论述，以为教师提供关于数学的若干信息。

一、数学的对象

数学的对象就是我们数学认识活动的客体，数学的对象问题在数学认识中占有重要地位。它是数学认识的前提，只有数学对象存在的情况下，人们的数学认识才成为可能的和现实的。数学的对象决定着数学理论的内容、数学方法的应用和数学与其他科学的联系。数学的对象的特点决定着数学认识形式，即数学科学的特点及其在整个科学体系中的作用和地位。

数学对象问题是数学认识中最重要、最早受到人们重视的课题之一。人们表述了各种各样的意见，本讲中我们努力从辩证唯物主义的观点出发处理这一问题，同时对一些代表性的观点作些简单的评价。

1. 对‘数学的对象’的理解

探讨‘数学的对象’，所论的无疑是作为一门科学的数学对象，而科学首先是‘关于自然、社会和思维的知识体系’（《辞海》，上海辞书出版社，1989年版，第4568页），知识则是‘人类认识的成果或结果’（同前，第4517页）。同时，科学又是‘生产知识的活动和过程’（《中国大百科全书·哲学》，第404页）。所以，作为科学的数学是人的一种认识，包括认识的结果和认识的活动。这样，数学的对象，就是人的一种认识的对象。

认识的对象是什么？应从人的认识结构来考虑这一问题。关于认识的结构，列宁有极精辟的论述：“认识是人对自然界的反映，但是，这并不是简单的、直接的、完全的反映，而是一系列的抽象过程，即概念、规律等等的构成，形成过程，这些概念和规律等等（思维、科学 = ‘逻辑观念’）有条件地近似地把握着永恒运动着和发展着的自然界的普遍性。在这里的确客观上是三项：（1）自然界；（2）人的认识 = 人脑（就是那同一个自然界的最高产物）；（3）自然界在人的认识中的反映形式，这种形式就是概念、规律、范畴等等。人不能完全把握 = 反映 = 描绘全部自然界，它的‘直接的整体’，人在创立抽象、概念、规律、科学的世界图画等等时，只能永远地接近于这一点。”^①

这就是说，认识的根本对象即客体是自然界，当然也包括在自然界的基础上作为自然历史过程发展的人类社会和人类思维，人们常把作为客观存在的自然界、人类社会和人类思维统称为“现实世界”。人类的认识对象是现实世界，这就意味着各门科学的对象的总和就是现实世界，每一门科学的对象都是这个总的对象即现实世界的一个组成部分、一个方面或领域。这是

^① 《列宁全集》第38卷，人民出版社1959年版，第194页

不言而喻的，因为科学的区分就是由其对象的特殊性决定的。^①

作为主体的人脑怎样实现对对象的认识呢？就是利用列宁所说的第三种结构成份——反映形式或称之为认识形式表述出对对象的认识。这些认识形式包括概念、命题、假说和理论等等，它们是认识的结果，实际上都是思维形式，是人们创造出来表述自己对对象的认识的。对象是现实世界的组成部分，是认识的客体，也可以说是认识的出发点，而认识形式是认识的结果。对象是被反映物，认识形式是人的大脑对对象的反映产物，被反映物和反映产物是不应混淆的，对科学认识来说，其被反映物是现实世界的组成部分，而反映产物则是思维的创造物即“思想事物”。

随着人类实践和认识的发展，人对认识对象的认识不断深入，一方面，深入到现实世界更深的层次和更大的范围；另一方面，认识也不断向主体回归。这后一方面也有两种情况，其一，深入到人类智能和人工智能的层面；^②其二，把人造物作为认识的对象，这又分两种情况，一是物质创造物，它们是在自然界原有物质的基础上人的智力和劳动的物化；一是思维创造物，即把人类思维活动的结果作为认识的对象，例如“科学符号、科学概念和科学理论”自身也成为人的认识的对象。^③

这与前述“每一门科学的对象都是现实世界的一个组成部分、一个方面或领域”是否矛盾呢？并不矛盾。某门科学的概念、命题和理论。虽然成为人类认识的对象，但却不是该门科学自身的对象。例如，天文学的对象“是辽阔天空中的天体”，^④

① 《毛泽东选集》合订本，人民出版社，1971年，第284页。

② 张守刚等：《人工智能的认识论问题》，人民出版社，1984年，第17页。

③ 舒炜光主编：《自然辩证法原理》，吉林人民出版社，1984年，第153页。

④ 《中国大百科全书·天文学》，第1页。

而不是天文学的概念、命题和理论。后者是人们用来表述对天体的认识的，它们是天文学认识的结果。那么，人类的哪一种认识是以科学概念、命题和理论为对象呢？那就是科学的“元理论”。

这涉及到科学的层次性：“各门科学是从不同的角度以客观世界为研究对象的，这是一个层次。如果以一门科学本身为研究对象，那么这门科学本身就是对象理论，研究这种对象理论的理论就是元理论。”^①那么一门科学的元理论是什么呢？这与科学的结构体系有关。按钱学森同志的观点，现代科学分为“自然科学、社会科学、数学科学、系统科学、思维科学和人体科学六大部门”，它们‘都各自认识整个客观世界，只不过从各自的着眼点或角度去考虑’，即这六大科学各以现实世界的不同领域为对象，而它们“最后由各自的桥梁汇总到马克思主义哲学—人类认识的最高概括”^②。这样，如果把这六大科学的某一门作为对象研究时，作为它的‘桥梁’的理论就是该门科学的元理论。自然科学的元理论是自然辩证法，社会科学的元理论是历史唯物主义，数学科学的元理论是数学学或称之为数学辩证法，系统科学的元理论是系统论，思维科学的元理论是认识论，人体科学的元理论是人天观，当把这六座‘桥梁’作为对象理论来研究时，马克思主义哲学就是它们的元理论。

某门科学的元理论以这门科学的概念、命题、理论以至整个理论体系为对象，探讨诸如概念的抽象程度、理论的真理性和价值等问题，理论所反映的对象问题也是元理论问题之一。例如这里所探讨的“数学对象”问题，就是把数学作为对象理论来考虑的问题，因而这一研究属于数学元理论研究，是数学学（数学

① 张家龙：《公理学、元数学和哲学》，上海人民出版社，1983年，第112页。

② 钱学森：《现代科学的结构》，《哲学研究》，1982年第3期。

辩证法)或哲学的内容。

2. 关于恩格斯的论断

关于数学的对象,恩格斯在《反杜林论》一书中指出:“在纯数学中悟性绝不能只处理自己的创造物和想象物。数和形的概念不是从其他任何地方。而是从现实世界中得来的。人们曾用过来学习计数,从而用来作第一次算术运算的十个指头,可以是任何别的东西,但是总不是悟性的自由创造物。……纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系,所以是非常现实的材料。这些材料以极抽象的形式出现,这只能在表面上掩盖它起源于外部世界的事实。”(《马克思恩格斯选集》第3卷第156—157页)

恩格斯在这里指出,数学的对象是现实世界的空间形式和量的关系(《反杜林论》中译本译作‘数量关系’;如引文。笔者认为,应译成‘量的关系’。理由如次:1. 我国著名数学家关肇直同志曾指出,原文(德文)中这个词是 Quantitätsverhältnisse,其中 Quantität 与 Qualität 相对应,在哲学中分别表‘量’和‘质’的意思。因而他认为这里译为‘量的关系’较贴切[见关肇直:《论数学的对象》,《自然辩证法研究通讯》,1957年第1期]。2. 考虑《反杜林论》的英、俄、日文译本分别用 Quantity、Количество、“量”来译 Quantität。这几个词在该译文中都是哲学用语“量”的意思。3. 中译文是沿用了50年代的旧译法,那时,汉语中也有以‘数量’表示哲学用语‘量’的意思的情况,现在已不这样用了。),它们是现实世界的特定领域,而且在对它们的认识中产生了数和形这两类数学概念。所以,恩格斯的这一关于数学对象的论断,是符合于前述我们对‘数学的对象’的理解的。不仅如此,我们还要指出,恩格斯的这一论断揭示了数学对象的本质特征,从而揭示了数学的特点,在人类认识史上第一次科学地解决了

数学科学的对象问题，从而为解决一系列数学哲学问题奠定了基础。

首先，这一论断阐述了数学对象的客观性。

空间和量都是现实世界的客观事物所具有的性质，都是客观存在的。因而空间形式和量的关系就是现实世界的组成部分或领域，具有不依人的意识为转移的客观性。从这点出发，不难解决这样一些数学哲学问题。

数学的现实来源问题。恩格斯的论断强调了数学知识是来源于现实世界的。这是辩证唯物主义的一个基本观点。

数学理论结果符合现实世界的问题。人们很早就发现，一些纯理论地得出的数学结果却往往符合于现实世界，例如古希腊人纯理论地推导出的圆锥曲线理论在近代用于天文学，表明这种数学理论符合于天体运动；近代数学理论地推导出来的虚数理论后来成功地应用于自然科学和工程技术，表明数学理论结果与现实世界的高度符合。为什么会这样，人们长期对此困惑不解，往往加上一些神秘的解释，恩格斯关于数学对象的论断则解决了这一问题：人的数学认识“在一定发展阶段上就和现实世界脱离，并且作为某种独立的东西，作为世界必须适应的外来规律而与现实世界相对立”；它在以后被应用于世界，虽然它是从这个世界得出来的。并且只表现世界的联系的一部分——正是仅仅因为这样，它才是可以应用的（同上书，第157页。着重号是原文中的）。这是辩证唯物主义的又一个基本观点。它揭示了，随着数学的发展，数学知识作为人的思维产物，就具有了一种相对于数学对象和人类实践的相对独立性，创造出新的数学概念、数学命题以至于数学理论，正是由于它们都是对数学的对象——现实世界的某些领域——的反映，所以这种独立发展的结果仍然符合现实世界。这不仅解释了数学理论结果与现实

世界相符合的问题，而且对数学的应用以至于应用数学的发展都有巨大的理论指导意义。

数学理论真理性的检验问题。恩格斯的论断指出了数学对象的客观性，也就指明了数学理论的真理性只能通过它符合现实世界的程度来判定，而这只能由人类的主观见之于客观的直接物质活动——实践——来检验。

其次，恩格斯的这一论断揭示了数学的特点。

恩格斯指出：“为了能够从纯粹的状态中研究这种形式和关系，必须使它们完全脱离自己的内容，把内容作为无关重要的东西放在一边（同上），这指出了在数学中舍弃了作为个别物质运动形式所具有的个别性质和具体内容，其抽象程度是远高于任何其他科学——在它们中，必要的‘内容’是不可缺少的，如力学中的质量、速度等——的，因而，可以说数学具有高度抽象性。恩格斯还指出，“全部所谓纯数学都是研究抽象的，它的一切数量严格说来都是想象的数量”（《马克思恩格斯选集》第3卷第608页）。由此即可推知，高度抽象性是数学最基本的特点。

任何物质运动与空间和时间都是不可分离的，因而空间形式就是物质运动形式的表现之一；量是现实世界一切事物所固有的规定性，量的关系则是各种事物量的规定性的一种表现。所以任何一种物质运动形式都表现出空间形式和量的关系的特点，因而各门科学原则上都可以利用数学来研究，尽管利用的程度不同。数学可以说是有最广泛的应用领域的科学，这一特点一般称为应用广泛性。

恩格斯指出：“为了计数，不仅要有可以计数的对象，而且还要有一种在考察对象时撇开对象的其他一切特性而仅仅顾到数目的能力”（同上书，第157页）。这种能力就是人的抽象思维能力。由于数学的高度抽象性，在数学研究中，主要依靠人类长期

的历史发展所形成的抽象思维能力，采用各种思维方法——分析和综合，归纳和演绎、一般化和特殊化等等，而在数学的表述体系中，只允许采用演绎推理的形式，于是形成了逻辑严谨的数学理论体系，与其他科学相比，数学推理的逻辑严格性和数学结论的确定性都是非常独特的，一般称这一特点为体系的严谨性。

高度抽象性、体系严谨性和应用广泛性是在相当程度上得到公认的数学的特点(见孙宏安：《数学的特点刍议》，《数学教育学报》，1993年第1期)。

3. 恩格斯论断的现代意义

恩格斯关于数学的对象论断是在 100 多年前做出的。100 多年来，数学有了突飞猛进的发展，进入了所谓现代数学时期。那么，恩格斯关于数学对象的论断是否仍然正确，即现代数学的对象是否仍然是“现实世界的空间形式和量的关系”呢？

一些论者对此持否定态度，其典型论点是“恩格斯的定义反映的是数学的来源，它符合 19 世纪的科学状况”，由于数学的发展，在现代数学阶段，恩格斯的论断已不完全、不适用了（茹科夫“数学的对象、方法和特征”，《自然科学哲学问题》1988 年第 3 期）。

事实果真如此吗？可以从几方面考察。

(1) 从现代数学与古典数学的关系来看

现代数学发展的基础仍然是原来的数学，就其本质来说，现代数学和古典数学并没有什么不同。法国当代著名数学家迪厄多内说得对：“必须不断地反复说明，不存在与‘古典数学’相对立的‘现代数学’，今天的数学只不过是昨天的数学的继续，它们之间没有不可逾越的鸿沟，而且今天的数学首先是致力于解决我们前辈所留下的一些重大问题。为了做到这一点，数学已经逐渐地发展了大量新的抽象概念，由于全神贯注于某个已知问

题的核心,并且去掉一些无关紧要的细节(转引自沙默:《数学在物理中的应用》,《自然科学哲学问题丛刊》,1983年第2期)。就是说,虽然现代数学的表现形式与古典数学有所不同,但其实质却没有两样,现代数学正是19世纪数学的继续,所以其对象与19世纪数学的对象亦不应有什么不同。

美国当代著名数学家哈尔莫斯1990年在美国数学协会成立75周年纪念大会的报告中用22个条目——9个概念、2个爆炸、11个发展——来概括75年来数学的重大发展(《数学的进展慢下来了吗?》,《数学译林》1992年第1期和第2期),可以用后两项说明上述观点。他指出的“爆炸1”是“四色定理”,这是一个1852年提出的问题,1976年为两位美国学者用计算机辅助证明所解决;“爆炸2”是“莫德尔猜想”,它与1637年费马提出的“费马大定理”相关,1983年为一位德国数学家证明,而费马大定理,1995年也为人们所证明。所谓“爆炸”指突破性进展。“11个发展”是遍历理论、超越数、连续统假设、李群、单群、阿蒂亚-辛格指标定理、傅立叶级数、丢番图方程、巴拿赫基、流形、比贝尔巴赫猜想等,它们无一不是由19世纪的数学问题发展而来的,有一些甚至就是19世纪的数学问题。

(2)从人的认识的角度看

数学的发展就是人们对数学的对象的认识的发展。它表现为两个方面,一是认识的广度不断扩张,不断有新的事物的空间形式和量的关系进入数学直接研究的范围——这可以理解为数学不断应用于更广泛的领域;二是认识的深度不断增加,数学不断抽象到新的层次——这可以说是对现实世界的空间形式和量的关系的认识的不断深化。对数学的对象的认识的每一个发展,人们都得出新的概念、新的命题和新的理论。哈尔莫斯报告中提出的标志数学重大发展的“9个概念”正好说明了这两方面

的发展 蒙特一卡洛法、快速傅立叶变换、突变、混沌是数学应用于新领域的产物；莫尔—史密斯极根、范畴、广义函数、 K -理论、非标准分析则是由进一步的抽象得出来的。

从人的认识的角度看，还必然得出这样的结果：数学的发展主要是指数学理论(包括数学概念、数学命题等)的发展,而数学理论是用来表述人——认识主体——对数学对象的认识的思维形式，它的发展说明了人们对数学的对象的认识的深化。数学的对象是现实世界的一定的领域，它对于作为主体的人来说是客观的，即不依人的意识为转移，当然不会因为人对它的认识的发展而有所改变。客观世界也是发展着的，在这个意义上，数学的对象作为客观世界的组成部分当然也是发展着的，但这种发展对人来说也具有客观性，即不依人的意识而发展，就是说，不是因为人们的数学理论的发展而发展的。认为数学的对象会因数学理论的发展而发展，实际上就意味着认为人的意识会改变客观存在的认识对象。

(3)从否定者提供的‘新’数学对象来看

一些认为恩格斯关于数学对象的论断已过时、已不适用了的论者提出了自己的数学对象，例如认为自然数、整数、有理数、实数、复数、序数、基数、各种超穷数以及向量、张量、空间、流形等就是数学的对象，认为数学的对象是函数，认为数学的对象是数学结构，数学的对象是数学理论和数学命题等。虽然表述上各有差异，却有一个共同的特点：把数学的认识形式当作了数学认识的对象。按本文前面指出的，就是混淆了被反映物和反映产物。这立刻引起了逻辑上的困难：被反映物是客观存在而反映产物是‘思想事物’；如果把数学概念、数学命题和数学理论等数学思维形式当作数学认识的对象，即被反映物，那么它们到底是客观存在还是‘思想事物’

为了避开这一逻辑困难，有人作出限定，指出，此时所说的“数学的对象是指数学研究中所直接处理的对象”。这已经在偷换概念了，因为“数学对象问题”所探讨的是数学认识的对象而不是人们在数学研究中所直接处理的东西。现在先不考虑这个逻辑错误，按他的思路推演下去：按照通常的理解，数学研究中人们所直接处理的东西当然就是数学的概念，以及在概念的基础上形成的数学命题和数学理论。似乎如果这样限定一下，认为数学的对象是数学概念或数学命题和数学理论就无可厚非了。但是，且慢。哪一门科学研究中人们所直接处理的东西不是该门科学的概念、命题和理论呢？按这一思路必将导致这样一个十分平凡即没有多少信息量的结论——每门科学的对象都是该门科学的概念、命题和理论。而且还势必推出，不是由对象来区分科学，而是由科学来区分对象，与我们前面指出的由对象的特殊性区分科学的认识相背离。

由以上三方面的考察，不难得出结论：对恩格斯关于数学对象的论断的否定是不正确的；对于现代数学来说，恩格斯关于数学对象的论断仍然正确，即现代数学的对象仍然是现实世界的空间形式和量的关系，它仍然为当代数学哲学研究提供着重要的基础。这就是恩格斯关于数学对象的论断的现代意义。

4. 对一些观点的进一步评价

数学是人类创造的最古老的科学之一，对数学的认识也与数学同样古老。自从数学成为一门科学，关于它的对象的问题就出现了。这里不想回顾历史上人们对数学对象的种种认识，虽然那些认识或多或少地在历史上起过作用，并且直接间接地影响到现在对数学对象的认识。我们仅再对现代较为流行的关于数学对象的几种界说作一些介绍并对其作一点评价。

(1)数学以现实世界为对象^①

一种界说是：“数学以现实世界为对象，又以高度的抽象性和符号方法区别于其它科学，是一切学科的共同研究语言和工具。因此，数学的根本对象就不能仅仅是具体的个别事物，而必须是现实世界的物质运动；数学的基本任务也不能仅仅是描述某一具体运动的个别特点，而必须是抽象地表示物质运动的一般规律。”^②

这种界说，表达了数学对象的客观性，指明了数学具有高度抽象性和应用广泛性的特点，并力图从“对象”的角度阐明数学与其他科学的某些区别。但它存在着某些原则上的缺陷。

缺陷之一就是把整个现实世界作为数学对象，混淆了科学和数学，造成认识上混乱。

另一个缺陷是这种界说混淆了哲学和数学。众所周知，各种具体的物质运动形式是各门自然科学的研究对象，一般的物质运动规律是哲学的对象。^③

物质运动的一般规律不外是质变量变规律、对立统一规律和否定之否定之规律等等。但在数学中，有哪些内容表述了这些规律呢？不错，恩格斯说，“数学：辩证的辅助工具和表现形式”^④，但却并不能由此得出数学表示的就是辩证法，更不能说，数学内容就是物质运动的一般规律，因此，不能从数学的发展符合物质运动的一般规律，导出它的对象或任务就是抽象地表示物质运动的一般规律。

①以下引自王 鸿钧、孙宏安：《数学思想方法引论》，人民教育出版社。1992年 406—412页。

② 王晓喻：《数学如何描述物质的运动》，《自然辩证法通讯》，1979年第1期。

③ 施存：《从哲学的发展来看马克思主义哲学的对象》，《哲学研究》，1985年第5期。

④ 恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社，1971年，第3页。

(2)数学没有特定的对象

这是与前一种说法截然相反的观点，持这种观点的人认为，由于“数学在科学体系中有特殊的地位，它既不包含在自然科学中又不包含在社会科学中”；因此数学不可能有自己的独立研究的对象，因而不可能利用数学的对象来研究数学的特点，自然可以得出结论：对数学来说重要的不是研究什么而是怎样研究。……数学是一门利用没有任何真实内容的概念的学科，究竟用什么方法才能把数学应用到现实世界的科学中去呢？能够应用的事实使许多数学家感到惊讶。……只要把这种现象解释为数学原始概念仍然是由现实世界得来的，就能十分自然地得到说明。但是，这种解释远不令人满意，只要指出，数学结论能够顺利地应用于那些完全不是该概念由之抽象出来的领域就够了。在现代数学中，上述分析更清楚地说明了数学是从哪里得到正确解释与数学完全无关的现实世界的能力的，这种能力首先是由于数学没有特定的对象。”^①

这种观点显然是不正确的。首先，没有认识的客体就不会产生人的认识。在数学认识中，数学的对象就是人们认识的客体，数学理论就是人们用来表述对数学对象的认识的。数学理论本身就表明必然存在着它的对象。

数学的原始概念来源于现实世界，产生于人们的实践之中这一观点，现在，已为更多的人所认识。例如美国人麦克莱恩就认为“数学起源于人类各种不同的实践活动，这些活动提供了对象和运算，同时导致了后来嵌入形式公理系统的各种概念。这些系统被证明是整理了人类各种起源活动的更深奥而隐蔽的

^① Рыбников, К. А., Введение об Метоголозию Математики, М., 1979, стр. 45 - 46.

特征”。^①

人们正是在涉及了现实世界的空间形式和量的关系的计数、测量、造型等原始实践活动中形成了数学的原始概念,就是说,数学的原始概念是来源于现实世界、产生于人类实践之中的并且正是因为这一点才使它们有广泛的应用性。而这就必然得出数学的对象是现实世界的某一领域的结论。

数学之所以能有“正确解释与数学完全无关的现实世界的能力”;也正是因为它以现实世界的空间形式和量的关系这一领域为对象,并且是与人类的实践活动密切相关的。实际上,不仅数学的原始概念来自现实世界并在人们的实践中产生出来,其他许多数学概念也是在人的实践活动中产生的,例如概率论的基本概念,拓扑学的某些概念,微积分及组合论的一些概念,微分几何的某些基本概念,等等。另一些数学概念及数学理论的产生是出于人们精神发展的需求(即数学地或逻辑地产生的),似乎与人的实践关系不大,它们是相对独立于现实世界并且在某种程度上超越了当时实践的思维产物,但产生这些数学概念和数学理论,首要的条件就是人的智力的发展,而这个智力发展则是在人类长期实践的基础上实现的。数学在人类实践中得到广泛应用并且其结果合于现实世界正说明数学不异于现实世界,其对象是现实世界的某一领域的本质特征。数学概念表述了人们对现实世界的空间形式和量的关系的认识,并非无内容的‘形式’。

可见,认为数学无特定对象的观点是十分错误的,其根本点就在于否定了数学是现实世界在人的头脑的反映,这种观点是以数学在现实世界具有广泛的应用作为论据的,但这个论据

^① [美]麦克莱恩:《数学模型》,中译文,《自然杂志》,1986年第1期。

却恰恰导致了相反的结论。

(3)结构观

把某一种数学概念当作数学的对象,是一种常见的观点,例如认为数学的对象是函数、是数学结构等等。这里,我们以“数学的对象是结构”为例进行分析。

所谓“数学的对象是结构”这种观点是比较常见的,前面认为恩格斯的论述过时的人基本上就认为现代数学的对象是结构。

“结构”现在是一个应用十分广泛的概念,通常把它理解为“系统的诸要素相对稳定的联系方式”。^① 但这样表述的“结构”并不是数学中所特有的概念,常见的就有“社会的经济结构”、“物质结构”、“宇宙结构”、“自然科学的体系结构”、“实践结构”以至于“心理结构”等等,可以说,“结构”观念已广泛应用于人们研究自然界、人类社会和人类思维的各个领域。

如果说数学的对象是结构,那么前举那几种结构——社会结构、物质结构、科学结构等——它们都是结构概念的种概念,是否都是数学的对象呢?虽然一些作者为了用“结构”表示数学的对象而在“结构”一词前面加上“抽象”、“纯粹”等定语,但这也无济于事。因为所谓“抽象”并没有指出对什么进行抽象,抽象到什么程度。任何科学概念都是抽象的,只不过是在不同程度上、对不同的方面所作的抽象。所有上述那些结构,都是已经抽象的——从现实世界抽象出来的,按前述“数学的对象是结构”的说法,都应该是数学的对象。但我们知道,这几种结构虽然都可以用数学方法去研究它们,但它们却不是数学的对象,既然有许多结构不是数学的对象,那么“数学的对象是结构”的说法就

^① 刘延勃等:《哲学辞典》,吉林人民出版社,1983年,词条。

遇到了困难。

考虑某些作者的意见，他们是因为现代数学中引入了结构，才把结构作为数学的对象的，特别认为，布尔巴基关于数学结构的观点与之相近。可见他们所指的其实是数学结构。

数学结构则是一个数学概念，无论这个概念在数学中重要或普遍到什么程度，它仍然是一个数学概念，是表述人们在数学认识中对数学的对象的认识的一种思维形式，并不是数学的对象自身。

顺便说一下，用“数学结构”概括数学概念也是不行的。如果说“数学的概念是数学结构”，就形成定义上的一个恶性循环。因为数学结构正是包括在要定义的数学概念之中的！

二、数学的特点

我们所说的数学的特点，主要是指数学理论的特点。

就数学理论与其他科学理论来说，当然具有科学理论的各种特点，就数学理论与其他科学理论相比较而言，数学理论又具有特殊性，数学理论的特殊性，就是本节所要讨论的“数学的特点”。所以它们都是与其他科学相比较而存在的。

1. 高度的抽象性

数学理论作为一种认识形式与其他科学相比较，其最基本的特点就是高度的抽象性，即抽象的层次较高——对于抽象的过程来说，就是舍弃的性质较多而收括的性质较少，作为认识的结果，即抽象的结果来说，或者作为认识的方法来说都是高度抽象的。我们从数学概念、数学理论体系和数学方法三个方面来考察数学的高度的抽象性。

(1) 数学概念没有直接的现实原型