高等学校电气信息类规划教材
摇摇摇总主编摇王耀南

现代控制理论基础

主摇编摇黄辉先摇摇摇摇摇摇摇摇摇
副主编摇刘美俊摇邱德润摇张佳佳
张学军摇李益华摇瞿隧春

湖 南 大 学 出 版 社
[illegible]年 · 长沙

内 容 简 介

本书是为电类本科专业编写的教材，全书共分 缘章，主要内容包括线性系统的状态空间描述与建立、线性系统的时域分析方法、线性系统的能控性与能观测性分析、控制系统的稳定性分析以及线性定常系统的综合与设计。为了便于学生学习，在每一章里，着重讲述基本概念和基本方法，并进行实例分析。此外还介绍了如何利用 酝藻蚤环境进行分析与结果的验证，并在每章之后附有大量的习题。本书最后还附有向量、矩阵的微积分运算方法。本书力求内容简练、深入浅出、结合实例进行分析。

本书既可作为自动化及其他电类专业学生的教材，也可供从事自动化及其相关专业的工程技术人员自学参考。

图书在版编目 (悦酝孕) 数据

现代控制理论基础 辕黄辉先主编援—长沙 :湖南大学出版社，圆园园缘

(高等学校电气信息类规划教材)

陨杂月晕 苑园园缘园圆缘缘缘缘缘

Ⅰ.现…摇Ⅱ.黄…摇Ⅲ.现代控制理论基础—高等学校—教材

Ⅳ.园圆园员

中国版本图书馆 悦酝孕 数据核字 (圆园园缘) 第 园圆园缘园缘号

现代控制理论基础

辕黄辉 主编 责任编辑：李继盛

湖南大学出版社出版发行

(长沙 岳麓山 邮编：源缘园园园圆)

开本：员远开 印张：员猿 字数：猿园千

版次：圆园园缘年 愿月 第 员版 印次：圆园园缘年 愿月 第 员次印刷 印数：员~源园园册

书号：陨杂月晕 苑园园缘园圆缘缘缘缘缘缘缘缘缘缘·园猿

定价：圆园.园园元

版权所有，盗版必究

湖南大学版图书凡有印装差错，请与发行部联系

前摇言

本书是为自动化本科专业编写的自动控制理论教材的现代控制理论基础部分。作为自动化专业的一门专业基础课，本教材的编写宗旨是引导学生学习和掌握现代控制理论的基本概念、基本原理和分析问题的基本方法，最终使学生懂得如何运用基础知识去解决一些实际问题。本书力求内容简练、突出方法、结合实际问题和便于自学。为了帮助读者消化书中内容，在每一章后面都附有一定量的习题。

本书讲述现代控制理论的基础部分，状态空间分析法是本书的主题。内容包括状态空间的描述——状态方程的建立与求解，线性系统的能控性、能观测分析，系统的稳定性分析，线性定常系统的综合与设计。

本书由湘潭大学黄辉先教授主编，刘美俊、邱德润、张佳佳、张学军、李益华、瞿隧春任副主编。各章的编写分工是：黄辉先编写第 圆章、第 源章第 缘节、第 缘章第 缘节，刘美俊编写第 猿章，邱德润编写第 源章第 员节至第 源节，张佳佳编写第 员章，张学军编写第 缘章第 员节至第 源节，李益华编写了本书的绪论，瞿隧春编写了附录。本书由黄辉先教授统稿，湘潭大学盘宏斌、肖业伟、汤红忠、郭雪峰参加了部分文字整理。

本书在编写过程中，得到湖南大学出版社以及各参编院校老师所在单位的领导的大力支持，得到湘潭大学教材建设资金资助，在此表示衷心感谢。由于编者水平有限，书中如有错误和不足，恳请广大读者批评指正。

黄 辉 先

圆园缘年 愿月于湘潭大学

目摇次

绪摇论…… 员

第 员章摇控制系统的状态空间描述 …… 缘
摇摇员援员摇控制系统状态空间的基本概念 …… 缘
摇摇员援圆摇由系统的物理模型建立状态空间表达式 …… 愿
摇摇员援猿摇由系统的微分方程建立状态空间表达式…… 员员
摇摇员援源摇系统的传递函数矩阵及其与状态空间表达式的互换…… 员缘
摇摇员援缘摇状态变量图…… 猿源
摇摇员援远摇离散时间系统的状态空间表达式…… 猿远
摇摇员援苑摇脉冲传递函数矩阵及其求法…… 源员
摇摇员援愿摇基于 酝葬贼造葬遭 环境下的状态空间表达式…… 源圆
摇摇本章小结 …… 源源
摇摇习题一 …… 源源

第 圆章摇线性控制系统的分析 …… 源苑
摇摇圆援员摇线性定常系统的运动分析…… 源苑
摇摇圆援圆摇状态转移矩阵…… 源愿
摇摇圆援猿摇线性定常非齐次状态方程的解…… 缘愿
摇摇圆援源摇线性定常系统的脉冲响应矩阵…… 远员
摇摇圆援缘摇线性时变系统的运动分析…… 远圆
摇摇圆援远摇线性离散时间系统的运动分析…… 远苑
摇摇圆援苑摇线性连续时间系统的离散化…… 苑园
摇摇圆援愿摇基于 酝葬贼造葬遭 环境下的控制系统仿真 …… 苑源
摇摇本章小结 …… 苑苑
摇摇习题二 …… 苑愿

第 猿章摇线性控制系统能控性和能观测性 …… 愿园
摇摇猿援员摇线性连续系统的能控性…… 愿园
摇摇猿援圆摇线性连续系统的能观测性…… 愿愿
摇摇猿援猿摇对偶原理…… 怨源
摇摇猿援源摇线性系统的能控标准型和能观测标准型…… 怨远
摇摇猿援缘摇线性定常离散系统的能控性与能观测性 …… 员园远

摇摇猿援源 线性系统的结构分解 …… 员愿怨
摇摇猿援缘 能控性和能观测性与传递函数矩阵之间的关系 …… 员怨怨
摇摇猿援远 传递函数矩阵的实现 …… 圆园园
摇摇猿援愿 时变系统和采样控制环境下的能控性与能观测性分析 …… 圆园园
摇摇本章小结 …… 圆园园
摇摇习题三 …… 圆园园

第 源章 控制系统的稳定性分析 …… 圆园远
摇摇源援员 李亚普诺夫稳定性定义 …… 圆园远
摇摇源援圆 李亚普诺夫稳定性基本定理 …… 圆园怨
摇摇源援猿 线性系统李亚普诺夫稳定性分析 …… 圆员愿
摇摇源援源 非线性系统李亚普诺夫稳定性分析 …… 圆员缘
摇摇源援缘 基于 时变和采样控制环境下李亚普诺夫稳定性分析 …… 圆员远
摇摇本章小结 …… 圆员愿
摇摇习题四 …… 圆员愿

第 缘章 线性定常系统综合 …… 圆圆园
摇摇缘援员 状态反馈和输出反馈 …… 圆圆园
摇摇缘援圆 闭环系统的极点配置 …… 圆圆员
摇摇缘援猿 系统镇定问题 …… 圆圆愿
摇摇缘援源 状态观测器的实现 …… 圆圆怨
摇摇缘援缘 带观测器的状态反馈系统 …… 圆猿园
摇摇缘援远 时变和采样控制环境下的系统性能综合 …… 圆猿员
摇摇本章小结 …… 圆猿圆
摇摇习题五 …… 圆猿圆

附录 A 线性空间和矩阵理论 …… 圆猿猿
附录 B 向量矩阵的微分、积分运算 …… 圆猿愿
附录 C 时变和采样控制环境简介 …… 圆源圆
参考文献 …… 圆源源

绪摇论

1.1 控制理论的发展过程

控制理论是关于控制系统建模、分析、综合设计的一般理论，是一门技术科学。控制理论的产生及发展与控制技术的发展密切相关，是人类在认识世界和改造世界的过程中逐步形成的，并随着社会的发展和科学技术的进步而不断发展。

18世纪中叶，英国人瓦特发明了蒸汽机用的离心式飞锤调速器，标志着闭环反馈控制思想的诞生。然而自动控制理论体系的最终形成，是在20世纪40年代末期。目前控制理论已经成熟，并且日臻完善，在工程实践中得到了广泛的应用。

19世纪70年代，控制系统的理论研究和实践应用都得到高速发展。英国学者麦克斯韦于1868年在“论调速器”一文中对控制系统的稳定性进行了分析，指出控制系统的品质可用微分方程来描述，系统的稳定性可用特征方程根的位置和形式来研究。英国的劳斯和德国的赫尔维茨分别于1877年和1895年先后提出了根据代数方程系数判别系统稳定性的准则。1892年俄国学者李雅普诺夫在他的专著《论运动稳定性的一般问题》中提出了用李雅普诺夫函数的正定性及其导数的负定性判别系统稳定性的准则，从而建立了动力学系统的一般稳定性理论。1927年美籍瑞典科学家奈奎斯特提出了负反馈系统的频率域稳定性判据，这种方法只需利用频率响应的实验数据，不用导出和求解微分方程。1934年，美国科学家哈森研究通信系统，提出了频域响应的对数坐标图描述方法。1942年，英国人霍尔维茨利用传递函数和方框图，把通信工程的频域响应方法和机械工程的时域方法统一起来，建立了复频域方法。1948年，伊万斯提出了根轨迹分析法；同年美国著名科学家维纳在其专著《控制论》中，系统地论述了控制理论的一般原理和方法，推广了反馈的概念。该书的出版标志着控制学科的诞生。1954年，我国著名科学家钱学森出版了专著《工程控制论》，奠定了工程控制论的基础。

概括地说，控制理论的发展经历了三个重要历史阶段：

第一阶段是20世纪40年代末到60年代的经典控制理论时期，着重研究单机自动化，解决单输入单输出（SISO）线性定常控制系统的分析与设计问题；主要研究对象是线性定常系统；主要数学工具是微分方程、拉普拉斯变换和传递函数；主要研究方法是时域法、频域法和根轨迹法；主要问题是控制系统的快速性、稳定性及其精度。对于非线性系统分析与研究，除了线性化及渐近展开计算以外，主要采用相平面分析和谐波平衡法（即描述函数法）研究。

经典控制理论能够较好地解决单输入单输出系统反馈控制的问题。但具有明显的局限性，突出问题是难以有效地应用于时变系统和多变量系统，难以获取系统内部状态信息，且复数域方法研究时域特性，得不到精确的结果。

第二阶段是20世纪60年代的现代控制理论时期，着重解决机组自动化和生物系统

的多输入多输出（[illegible]）系统的控制问题；研究对象不再局限于单变量的、线性的、定常的、连续的系统，而扩展为多变量的、非线性的、时变的、离散的系统；主要数学工具是一阶微分方程组、矩阵论、状态空间法等等；主要方法是变分法、极大值原理、动态规划理论等；重点是最优控制、随机控制和自适应控制；核心控制装置是电子计算机；现代控制理论分析和综合系统的目标是在揭示其内在规律的基础上，实现系统在某种意义上的最优化，同时使控制系统的结构不再限于单纯的闭环形式。

这一时期主要研究内容如下：美国的[illegible]于员缘缘元年发表了“动态规划理论在控制过程中的应用”一文，提出了寻求最优控制的动态规划法。员怨缘园年，美籍匈牙利人[illegible]提出递推估计的自动优化控制原理，奠定了自校正控制器的基础。员怨远园年，他发表了“控制系统的一般理论”等论文，引入状态空间法分析系统，提出能控性、能观测性、最优调节器和[illegible]滤波等概念。两年后，[illegible]等人又提出最优控制反问题，并得到若干有关鲁棒性的结果。这些理论构造了现代控制理论的框架。员怨远员年，庞特里亚金在其专著《最优过程的数学理论》一书中证明了极大值原理，使得最优控制理论得到极大发展。瑞典学者阿斯特勒姆于员怨远园年提出最小二乘辨识法，解决了线性定常系统的参数估计问题和定阶方法，他和法国的[illegible]教授等人在自适应控制理论和应用方面做出了贡献。员怨苑园年英国学者[illegible]等人提出多变量频域控制理论，丰富了现代控制理论领域。

第三阶段是圆园世纪苑园年代的大系统理论和智能控制理论时期，着重解决生物系统、社会系统这样一些众多变量的大系统的综合自动化问题；方法是时域法为主；重点是大系统多级递阶控制；核心装置是网络化的电子计算机。它不仅涉及系统辨识和建模、统计估计和滤波、最优控制、鲁棒控制、自适应控制、智能控制及控制系统[illegible]等理论和方法。同时，它在与社会经济、环境生态、组织管理等决策活动，与生物医学中诊断及控制，与信号处理、软计算等邻近学科相交叉中又形成了许多新的研究分支。员怨缘年，美国[illegible]在[illegible]教授创立了模糊集合论，为解决复杂系统的控制提供了新的数学工具。员怨愿年，美籍华人[illegible]教授和[illegible]等人提出用模糊神经元概念研究复杂大系统行为，正式提出了智能控制即人工智能技术与控制理论的交叉，并创立了人-机交互式分级递阶智能控制的系统结构。我国著名控制专家钱学森把系统的研究拓广到“开放的复杂巨系统”范畴，于员怨怨园年提出“从定性到定量的综合集成法”的处理开放的复杂巨系统的研究方法。

随着新世纪经济和科学技术的迅猛发展，控制理论与许多学科相互交叉、渗透融合的趋势在进一步加强，控制理沦的应用范围在不断扩大，控制理论在人们认识事物运动的客观规律和改造世界中将得到进一步的发展和完善。

圆.猿 现代控制理论研究的内容

现代控制理论主要包括线性系统理论、系统辨识与建模、最优滤波理论、最优控制、自适应控制五个分支。

线性系统理论主要研究线性系统在输入信号作用下系统状态与输出运动过程的规律和改变这些规律的可能性与措施；建立和揭示系统的结构、参数性质与动态行为、性能之间的关系。线性系统理论主要包括系统的状态空间描述、能控性、能观测性和稳定性分

析,状态反馈、状态观测器及补偿理论和设计方法等内容。线性系统理论是现代控制理论中理论最完善、技术上较成熟、应用也最广泛的部分,是现代控制理论的基础。

系统辨识与建模是针对模型不确定的系统研究从一类模型中选择一个数学模型,使之与不确定系统具有相同或相近的输入输出特性。由于系统比较复杂,往往不能通过解析的办法直接建模,而主要是在系统输入输出的试验数据或运行数据的基础上,从一类给定的模型中确定一个与被研究系统本质特征等价的模型。如果模型结构已给定,只是其参数尚未知道,则系统辨识就变成参数估计。辨识是控制理论中不可分割的重要组成部分,它属于应用数学中的求逆问题。进行系统辨识常需做下列实验:发生输入信号和记录输出信号。有许多统计方法和计算技术可用来处理数据和得到模型。当前系统辨识研究的问题集中在辨识问题的可解性、问题提出的恰当性以及对各类模型的参数估计方法等。

最优滤波理论亦称为最佳估计理论。当系统受到环境噪声或负载干扰时,其不确定性可以用概率和统计的方法进行描述和处理。也就是在系统数学模型已经建立的基础上,利用被噪声等污染的系统输入输出的测量数据,通过统计方法获得有用信号的最优估计。经典的维纳滤波理论阐述的是对平稳随机过程按均方意义的最佳滤波,而现代的卡尔曼滤波理论用状态空间法设计最佳滤波器,克服了前者的局限性,适用于非平稳过程,并在很多领域中得到广泛应用,成为现代控制理论的基石。

最优控制是在给定限制条件和性能指标(即评价函数或目标函数)下,寻找使系统性能在一定意义下最优的控制规律。“限制条件”也称约束条件,是指对系统施加一些物理上的约束;“性能指标”是为评价系统在整个运行过程中性能优劣所规定的标准;所寻求的控制规律就是综合设计出的最佳控制器。在解决最优控制问题中,庞特里亚金的极大值原理和贝尔曼的动态规划法是最重要的两种方法。此外,各种“广义”梯度描述的优化算法、动态规划的与[illegible]方程求解的新方法正受重视,并被用于非线性系统的优化控制。

自适应控制是随机辨识系统的数学模型并按照当前的模型去修改最优控制律。当被控对象的内部结构和参数以及外部的环境特性和扰动存在不确定时,系统自身能在线量测和处理有关信息,相应地在线修改控制器的结构和参数,以保持系统所要求的最佳性能。自适应控制的两大基本类型是模型参考自适应和自校正控制。近期自适应理论的发展包括广义预测控制、万用镇定器机理、鲁棒稳定的自适应系统以及引入了人工智能技术的自适应控制等。

和传统的控制理论研究相比较,现代控制理论的研究具有以下特点:

(员)传统的控制理论都是建立在精确模型基础之上的,它们以微分和积分为工具,不是以直接使用工程技术用语描述和解决问题。目前出现的智能机器人等复杂对象,要求突破传统的数学语言的分析与设计方法,寻求新的描述方法。

(圆)现代控制理论提供了一些方法处理对象的不确定性和复杂性,如自适应控制和鲁棒控制,达到优化控制的目的。但由于实际应用中,尤其在工业工程控制中,被控对象的严重非线性、不确定性、工作点剧烈变化等因素,使得自适应和鲁棒控制应用的有效性受到限制,促使人们采用新的控制技术和方法。

(猿)传统的控制理论输入信息比较单一,而现代的复杂系统必须处理多种形式的信

息,进行信息融合,这样的控制系统就要求具有自适应、自学习和自组织的功能,因而需要新一代的控制理论和技术来支持。

本书的内容和特点

现代控制理论所包含的内容很多,范围也很广,与其他学科的交叉融合也越来越强。根据教学大纲的要求,本书只重点介绍现代控制理论一些最基本的内容和方法,尽量避免“引理—定理—证明—推论”的单调模式,尽量从工程实例出发引入某些重要的概念和方法。必要的证明也在陈述上力求避免繁冗,有的利用对偶性质加以简化。

本课程是自动化专业的一门专业基础课,全书内容共分 缘章,适合于 源愿学时的教学,其中,课堂讲授 源缘学时,实验 愿学时。本教材按照建模—分析—综合与设计的主线结构进行讨论。建模就是建立系统的数学模型,亦即建立控制系统的状态空间表达式 ;分析是针对控制系统的能控性、能观测性和稳定性进行的定性或定量分析 ;综合与设计是针对技术性能指标不满足要求的系统进行的状态反馈设计或基于观测器的状态反馈设计。另外考虑到在后续课程中将重点介绍有关多变量系统解耦的内容,本书删去了一般“现代控制理论”教材中有关状态解耦的内容。

近年来,[illegible]作为一个数学与控制类的工具,在理工科的教学中得到越来越广泛的应用。特别值得指出的是,[illegible]环境及其提供的若干工具箱,给自动控制系统的分析和设计带来了极大的便利。本书的一个重要特点是,结合现代控制理论的基本概念进行叙述,应用 [illegible]及控制系统工具箱进行计算机辅助教学。为了帮助读者学习,本书的附录部分介绍了 [illegible]的一些基本知识,并且在每章讨论了 [illegible]在控制系统中的应用。

本书是诸多编者在多年教学实践的基础上,根据新的教学大纲和教学计划编写的。在内容选择、难点散布、详略安排、例题习题选编等方面,都经过了长期的教学实践过程中的不断修改和完善。相信本书将能够较好地适应各工科院校面向 圆员世纪教学的需要。

第 员章摇控制系统的状态空间描述

控制理论的研究包括系统的建模、系统的分析、系统的综合设计三大部分。经典控制理论的数学模型主要有时域数学模型和频域数学模型，时域模型是建立在单输入单输出变量基础上用高阶线性微分方程或高阶线性差分方程描述的，频域模型是建立在单输入单输出变量基础上用传递函数或频率特性描述的。它们只揭示了系统的外部特性，而不能反映系统内部各物理量之间的变化规律；此外，传递函数模型仅仅考虑了零初始条件，频率特性只揭示了系统稳态特性，不足以反映系统的全部特征。现代控制理论是在引入状态和状态空间概念的基础上发展起来的，它是运用状态空间方程来描述输入—状态—输出诸变量之间的因果关系，是一种系统的完全描述，不仅表征了系统的输入输出特性，同时揭示了系统的内部物理关系，既有稳态特征，又包含有暂态特征。运用状态空间分析法研究系统的特性、运动规律等是现代控制理论的重要标志。采用向量、矩阵描述的状态空间方程是现代控制理论的最基本的数学模型，本章主要介绍状态空间描述的基本概念及建立状态空间方程的基本方法。

员援员摇控制系统状态空间的基本概念

控制系统的状态空间描述涉及如下基本概念。

员援员援员摇状态和状态变量

表征系统在时间域中运动的信息称为状态。确定系统状态的一组独立的且数目最少的变量称为状态变量。

状态变量是能完整地确定控制系统的一组最少变量。也就是，若已知系统在初始时刻 贼越贼0状态变量的值和 贼逸贼0时刻的输入函数，就能唯一确定控制系统所有状态在 贼逸贼0任何时刻上的数值及变化情况。可见，状态是对系统过去、现在和将来行为的完全描述。

一个用 灶阶微分方程描述的系统称为 灶阶系统，其状态变量的个数为 灶。对于实际物理系统，状态变量的个数取决于系统中独立储能元件的个数。在控制系统中，状态变量并不一定是系统的输出，也不一定要求在物理上能控或能观测（当然，在工程上状态变量的选取应优先考虑容易测量的物理量）。决定系统状态的状态变量不是唯一的。

员援员援圆摇状态向量

若 灶维向量 曾(贼)的分量 曾员(贼)，曾圆(贼)，…，曾灶(贼)是描述系统状态的 灶个状态变量，则称 曾(贼)为 灶维状态向量，记为 曾(贼)越[曾员(贼)，曾圆(贼)，…，曾灶(贼)]栽。

2.2.1 状态空间

所谓状态空间是以状态变量 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 为坐标轴所构成的 n 维正交空间。状态空间中的每一点都代表系统在某一时刻的状态。从初始时刻开始，随着时间的推移，系统的状态便在状态空间中描绘出一条轨迹，称为状态轨迹或状态轨迹线。

2.2.2 状态方程和输出方程

描述系统状态变量的一阶导数或一阶差分与状态变量、输入变量之间关系的方程组称为系统的状态方程。描述系统输出变量与状态变量、输入变量之间关系的代数方程或方程组称为系统的输出方程。由于状态变量的非唯一性，所以状态方程的表示也不是唯一的。

对于具有 r 个输入变量、m 个输出变量、n 个状态变量的系统，描述其动态特性的状态方程的一般形式为：

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_r, t) \\
&\cdots \\
\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} &= f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_r, t)
\end{aligned}$$

输出方程的一般形式为：

$$\begin{aligned}
y_1 &= g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_r, t) \\
&\cdots \\
y_m &= g_m(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_r, t)
\end{aligned}$$

用向量方程描述为：

$$\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) \\
\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)
\end{cases}$$

其中，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 为状态向量，$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_r)^{\mathrm{T}}$ 为输入向量，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m)^{\mathrm{T}}$ 为输出向量，$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)^{\mathrm{T}}$ 为 n 阶非线性系统的状态函数向量，$\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, \cdots, g_m)^{\mathrm{T}}$ 为 m 阶非线性系统的输出函数向量，t 为时间变量。

若系统有 n 个独立的状态变量，则对于单输入-单输出线性定常系统，其状态方程的一般形式为：

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1u \\
\dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2u \\
&\cdots \\
\dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_nu
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

输出方程为 $y = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + du$ (2.2.2)

写成向量-矩阵形式为：

$$\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u \\
y = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + du
\end{cases} \tag{2.2.3}$$

式中，$\text{鳃}_{越}[\text{鳃}_{员}\text{摇}\ \text{鳃}_{圆}\text{摇}\cdots\text{摇}\ \text{鳃}_{灶}]^{栽}$。

曾越$[\text{曾}_{员},\text{曾}_{圆},\cdots,\text{曾}_{灶}]^{栽}$称为 灶维状态向量。

粤越$\begin{bmatrix}葬_{员员} & 葬_{员圆} & \cdots & 葬_{员灶}\\ 葬_{圆员} & 葬_{圆圆} & \cdots & 葬_{圆灶}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ 葬_{灶员} & 葬_{灶圆} & \cdots & 葬_{灶灶}\end{bmatrix}_{灶行灶}$ 称为系统矩阵、状态矩阵或系数矩阵。

月越$\begin{bmatrix}遭_{员}\\ 遭_{圆}\\ \cdots\\ 遭_{灶}\end{bmatrix}_{灶行员}$ 称为输入矩阵或控制矩阵。粤和 月矩阵中的元素与系统结构特征有关。

悦越$[糟_{员}\text{摇}\ 糟_{圆}\text{摇}\cdots\text{摇}\ 糟_{责}]_{员行灶}$称为输出矩阵。

凿为直接联系输入变量与输出变量的前向传递 (前馈) 系数。

若系统的状态变量为 曾(贼越$[\text{曾}_{员}(贼),\text{曾}_{圆}(贼),\cdots,\text{曾}_{灶}(贼)]^{栽}$，则对于多输入-多输出线性定常系统，设 责个输入，择个输出，其状态方程的一般形式为：

$$\begin{aligned}
&\text{鳃}_{员}(贼)\text{越}葬_{员员}\text{曾}_{员}\text{垣}葬_{员圆}\text{曾}_{圆}\text{垣}\cdots\text{垣}葬_{员灶}\text{曾}_{灶}\text{垣}遭_{员员}怎_{员}\text{垣}遭_{员圆}怎_{圆}\text{垣}\cdots\text{垣}遭_{员责}怎_{责}\\
&\text{鳃}_{圆}(贼)\text{越}葬_{圆员}\text{曾}_{员}\text{垣}葬_{圆圆}\text{曾}_{圆}\text{垣}\cdots\text{垣}葬_{圆灶}\text{曾}_{灶}\text{垣}遭_{圆员}怎_{员}\text{垣}遭_{圆圆}怎_{圆}\text{垣}\cdots\text{垣}遭_{圆责}怎_{责}\\
&\cdots\\
&\text{鳃}_{灶}(贼)\text{越}葬_{灶员}\text{曾}_{员}\text{垣}葬_{灶圆}\text{曾}_{圆}\text{垣}\cdots\text{垣}葬_{灶灶}\text{曾}_{灶}\text{垣}遭_{灶员}怎_{员}\text{垣}遭_{灶圆}怎_{圆}\text{垣}\cdots\text{垣}遭_{灶责}怎_{责}
\end{aligned}\qquad(员猿)$$

输出方程为：

$$\begin{aligned}
&赠_{员}\text{越}糟_{员员}\text{曾}_{员}\text{垣}糟_{员圆}\text{曾}_{圆}\text{垣}\cdots\text{垣}糟_{员灶}\text{曾}_{灶}\text{垣}凿_{员员}怎_{员}\text{垣}凿_{员圆}怎_{圆}\text{垣}\cdots\text{垣}凿_{员责}怎_{责}\\
&赠_{圆}\text{越}糟_{圆员}\text{曾}_{员}\text{垣}糟_{圆圆}\text{曾}_{圆}\text{垣}\cdots\text{垣}糟_{圆灶}\text{曾}_{灶}\text{垣}凿_{圆员}怎_{员}\text{垣}凿_{圆圆}怎_{圆}\text{垣}\cdots\text{垣}凿_{圆责}怎_{责}\\
&\cdots\\
&赠_{择}\text{越}糟_{择员}\text{曾}_{员}\text{垣}糟_{择圆}\text{曾}_{圆}\text{垣}\cdots\text{垣}糟_{择灶}\text{曾}_{灶}\text{垣}凿_{择员}怎_{员}\text{垣}凿_{择圆}怎_{圆}\text{垣}\cdots\text{垣}遭_{择责}怎_{责}
\end{aligned}\qquad(员猿)$$

写成向量-矩阵形式为：

$$\begin{cases}\text{鳃}(贼)\text{越}粤\text{曾}(贼)\text{垣}月怎\\ 赠(贼)\text{越}悦\text{曾}(贼)\text{垣}阅怎\end{cases}\qquad(员猿)$$

式中，$\text{鳃}(贼)$、曾(贼)、粤的定义同单输入-单输出系统。月、悦、阅、赠、怎的定义如下：

摇月越$\begin{bmatrix}遭_{员员} & 遭_{员圆} & \cdots & 遭_{员责}\\ 遭_{圆员} & 遭_{圆圆} & \cdots & 遭_{圆责}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ 遭_{灶员} & 遭_{灶圆} & \cdots & 遭_{灶责}\end{bmatrix}_{灶行责}$，悦越$\begin{bmatrix}糟_{员员} & 糟_{员圆} & \cdots & 糟_{员灶}\\ 糟_{圆员} & 糟_{圆圆} & \cdots & 糟_{圆灶}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ 糟_{择员} & 糟_{择圆} & \cdots & 糟_{择灶}\end{bmatrix}_{择行灶}$，阅越$\begin{bmatrix}凿_{员员} & 凿_{员圆} & \cdots & 凿_{员责}\\ 凿_{圆员} & 凿_{圆圆} & \cdots & 凿_{圆责}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ 凿_{择员} & 凿_{择圆} & \cdots & 凿_{择责}\end{bmatrix}_{择行责}$，称为前馈矩阵、直接传递矩阵。

赠越$[赠_{员},赠_{圆},\cdots,赠_{择}]^{栽}$，称为 择维输出向量。

怎越$[怎_{员},怎_{圆},\cdots,怎_{责}]^{栽}$，称为 责维输入向量。

员.圆.猿 摇状态空间表达式

系统的状态方程与输出方程的组合称为状态空间表达式 (或动态方程)。状态方程

和输出方程能完整地描述系统内部状态变化特性与系统输出动态特性，也是现代控制理论区别于经典控制理论的描述方式。

式（员猿援员）、（员猿援圆）分别称为单输入-单输出、多输入-多输出线性定常系统的状态空间表达式。由于其中系数矩阵 粤、月、悦、阅能完整地表征系统的动态特性，因此可把一个确定的系统简称为系统，记为 $\sum$（粤，月，悦，阅）。

对于线性时变系统，系数矩阵 粤、月、悦、阅是时间 则的函数，对应的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x}=A(t)x+B(t)u \\ y=C(t)x+D(t)u \end{cases} \tag{3.2.1}$$

摇摇根据式（员猿援圆援员）的状态空间表达式，可以绘制出线性系统相对应的方框图，如图 员猿援圆援员所示。双线箭头代表向量信号的传递，每个方块的输出向量等于方块中的矩阵左乘该方块的输入向量。

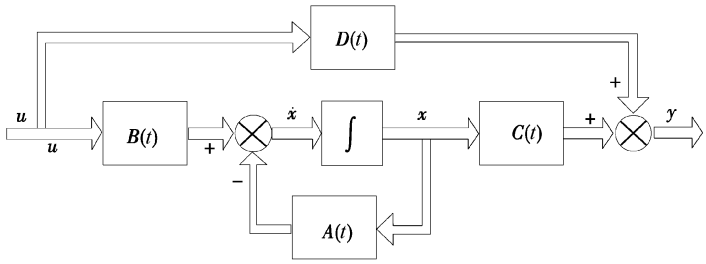


图 员猿援圆援员　摇线性连续系统的动态结构图

综上所述，在状态空间中以状态变量描述系统并进行系统分析的方法称为状态空间分析法或状态变量法，是现代控制理论的基本分析方法。同时它是时域内的一种矩阵运算方法，特别适合于在计算机上求解。

员猿援猿　摇由系统的物理模型建立状态空间表达式

针对一个结构和参数已知的 灶阶实际物理系统建立状态空间表达式，首先是合理选取有关的物理量作为状态变量，然后根据元件或物理系统所遵循的物理规律或内在的机理建立其数学模型——微分方程，并将其化为以一组独立状态变量描述的一阶微分方程组，进而导出其矩阵微分方程形式即状态空间表达式。下面通过一些实例来说明如何由系统的物理模型建立其状态空间表达式。

例 员猿援猿援员　摇硷脱电路如图 员猿援猿援员所示。怎择为电路输入电压，怎泽为电路输出电压，试建立其状态空间表达式。

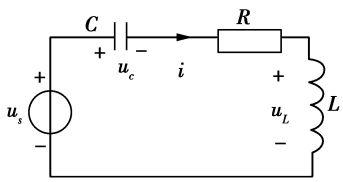


图 员猿援猿援员　摇硷脱电路

解：根据电路理论中的基尔霍夫电压、电流定律列方程

$$\text{结脱}\frac{\text{凿怎}_{\text{槽}}}{\text{凿栽}}=\text{垣硷脱}\frac{\text{凿怎}_{\text{槽}}}{\text{凿栽}}\text{垣怎}_{\text{槽}}\text{越怎}_{\text{择}}$$

摇摇（员）选取 怎槽和 蚤作为该电路的状态变量，列方程

$$\begin{cases} \dot{悦}_{1}=\dfrac{凿悦_{1}}{凿t}=悦_{2} \\ \dot{悦}_{2}=\dfrac{凿^{2}悦_{1}}{凿t^{2}}=-\dfrac{悦_{1}}{蕴}-\dfrac{悦_{2}}{蕴}+\dfrac{1}{蕴}u \end{cases}$$

将方程组整理得

$$\begin{cases} \dot{悦}_{1}=\dfrac{凿悦_{1}}{凿t}=悦_{2} \\ \dot{悦}_{2}=\dfrac{凿^{2}悦_{1}}{凿t^{2}}=-\dfrac{员}{蕴}悦_{1}-\dfrac{员}{蕴}悦_{2}+\dfrac{员}{蕴}u \end{cases}$$

则相应的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_{1}=x_{2} \\ \dot{x}_{2}=-\dfrac{员}{蕴}x_{1}-\dfrac{员}{蕴}x_{2}+\dfrac{员}{蕴}u \end{cases}$$

其输出方程为 $悦=悦_{1}$

写成矩阵形式为

状态方程 $\begin{bmatrix} \dot{x}_{1} \\ \dot{x}_{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{员}{蕴} & -\dfrac{员}{蕴} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{1} \\ x_{2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{员}{蕴} \end{bmatrix}u$

输出方程 $悦=\begin{bmatrix} 员 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{1} \\ x_{2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}u$

简记为 $\begin{cases} \dot{x}=Ax+Bu \\ 悦=Cx+Du \end{cases}$

式中 $x=\begin{bmatrix} x_{1} \\ x_{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 悦_{1} \\ \dot{悦}_{1} \end{bmatrix}$，$u=\begin{bmatrix} 悦_{r} \end{bmatrix}$，$y=\begin{bmatrix} 悦 \end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{员}{蕴} & -\dfrac{员}{蕴} \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{员}{蕴} \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} 员 & 0 \end{bmatrix}$，$D=\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

悦越[原员 原员]，凿越员，怎越怎，赠越蕴

（圆）若以 $悦_{r}$ 越悦怎，$悦_{c}$ 越蚤为状态变量，则相应的状态方程和输出方程分别为

$$\begin{bmatrix} \dot{悦}_{r} \\ \dot{悦}_{c} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{员}{蕴} & -\dfrac{员}{蕴} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 悦_{r} \\ 悦_{c} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{员}{蕴} \end{bmatrix}u$$

$$赠=\begin{bmatrix} \dfrac{员}{悦} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 悦_{r} \\ 悦_{c} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}u$$

摇摇（猿）若以 $悦_{c}$ 越怎，$悦_{r}$ 越 $\dot{悦}_{c}$ 为状态变量，则相应的状态方程和输出方程分别为

$$\begin{bmatrix} \dot{悦}_{c} \\ \ddot{悦}_{c} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{员}{蕴} & -\dfrac{员}{蕴} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 悦_{c} \\ \dot{悦}_{c} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{员}{蕴} \end{bmatrix}u$$

$$\dot{x}=Ax+Bu$$

$$y=Cx+Du$$

若以 x_1、x_2 作为状态变量，则相应的状态方程和输出方程分别为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{R_1C_1} & \frac{1}{R_1C_1}\\ \frac{1}{R_1C_2} & -\left(\frac{1}{R_1C_2}+\frac{1}{R_2C_2}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{C_1}\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

由上述分析可知，若选取不同的变量为状态变量，就得到不同的状态空间表达式，尽管形式不同，但它们都是针对同一系统的不同描述，本例进一步说明了状态变量选择的非唯一性。一般说来，状态变量的选取应符合习惯，也就是说状态变量的选取应使得物理意义明确、便于测量，本例中通常选第一组物理量为状态变量。

例 2-3 图 2-3 给出了双水槽液位调节系统。设 u_1、u_2 分别为进水管阀门Ⅰ、Ⅱ的开度，q_1、q_2 为输入液压，R_1、R_2 分别为水管的液阻系数，h_1、h_2 分别为Ⅰ、Ⅱ水槽的液位高度，A_1、A_2 是规则形柱状水槽的横截面积。以 q_1、q_2 为输入变量，h_1、h_2 为输出变量，试列出该双输入-双输出双水槽液位调节系统的状态空间表达式。

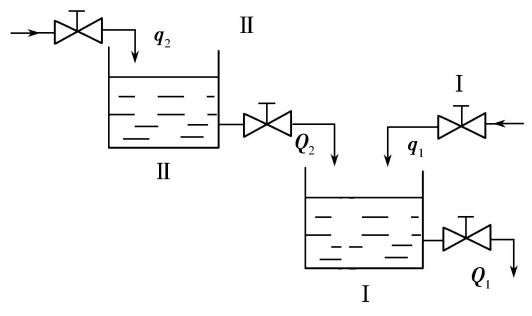


图 2-3 双水槽液位调节系统

解 根据题意得：

单位时间的进水量 $-u_1q_1$、$-u_2q_2$，u_2q_2

单位时间的出水量 $Q_1=h_1/R_1$，$Q_2=h_2/R_2$

注意 Q_2 既是水槽Ⅱ的出水量，也是水槽Ⅰ的进水量。

根据流体的平衡关系可得两个水槽贮存量的变化方程：

水槽Ⅰ $A_1\dfrac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t}=-u_1q_1+\dfrac{h_2}{R_2}-\dfrac{h_1}{R_1}$

水槽Ⅱ $A_2\dfrac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t}=u_2q_2-\dfrac{h_2}{R_2}$

选取状态变量 $x_1=h_1$，$x_2=h_2$，代入已知条件，方程整理为：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{R_1A_1}x_1+\dfrac{1}{R_2A_1}x_2-\dfrac{1}{A_1}u_1q_1\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{R_2A_2}x_1-\dfrac{1}{R_2A_2}x_2+\dfrac{1}{A_2}u_2q_2\end{cases}$$

该系统的状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{员} \\ \dot{x}_{圆} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{员}{R_{员}C_{员}} & \frac{员}{R_{圆}C_{员}} \\ \frac{园}{} & -\frac{员}{R_{圆}C_{圆}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{员} \\ x_{圆} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{噪_{员}}{} & 园 \\ 园 & \frac{噪_{圆}}{} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 怎_{员} \\ 怎_{圆} \end{bmatrix}$$

$$赠 = \begin{bmatrix} 赠_{员} \\ 赠_{圆} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{员}{R_{员}} & 园 \\ 园 & \frac{员}{R_{圆}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{员} \\ x_{圆} \end{bmatrix}$$

摇摇其中 $赠_{员} = y_{员}$，$赠_{圆} = y_{圆}$，由水槽液位调节原理可画出系统的动态结构图如图 员员.员所示。

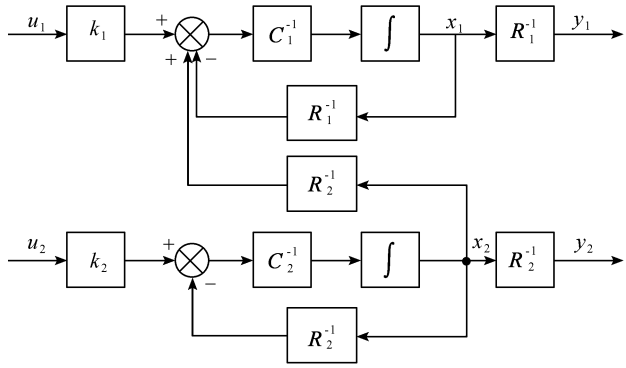


图 员员.员 双水槽液位调节系统的结构图

员员.员.圆 由系统的微分方程建立状态空间表达式

在经典控制理论中，线性定常连续控制系统的时域数学模型通常用高阶微分方程表示成如下形式：

$$赠^{灶} + \alpha_{灶-员}赠^{灶-员} + \alpha_{灶-圆}赠^{灶-圆} + \cdots + \alpha_{员}赠^{员} + \alpha_{园}赠 = \beta_{灶}怎^{灶} + \beta_{灶-员}怎^{灶-员} + \cdots + \beta_{员}怎^{员} + \beta_{园}怎 \quad (员员.员)$$

式中，$赠 = 赠^{园}$，…，$赠^{灶}$ 为系统输出及其各阶导数，$怎 = 怎^{园}$，…，$怎^{灶}$ 为系统输入及其各阶导数，均为时间的函数；$\alpha_{园}$，$\beta_{园}$（$园 = 园, 员, \cdots, 灶-员$）为常系数，由系统结构及参数决定。与式（员员.员）系统相对应的传递函数 $G(s)$ 为严格真分式时，可表示为

$$G(s) = \frac{再(s)}{我(s)} = \frac{\beta_{灶}s^{灶-员} + \beta_{灶-员}s^{灶-圆} + \cdots + \beta_{员}s + \beta_{园}}{s^{灶} + \alpha_{灶-员}s^{灶-员} + \alpha_{灶-圆}s^{灶-圆} + \cdots + \alpha_{员}s + \alpha_{园}} \quad (员员.圆)$$

摇摇下面分两种情况讨论如何由系统的高阶微分方程形式导出系统状态空间表达式。

员员.员.圆.员 摇系统输入量不含导数项

当系统微分方程不含输入量的导数项时的一般形式如下：

$$赠^{灶} + \alpha_{灶-员}赠^{灶-员} + \alpha_{灶-圆}赠^{灶-圆} + \cdots + \alpha_{员}赠^{员} + \alpha_{园}赠 = \beta_{园}怎 \quad (员员.圆)$$

摇摇对上述系统不难看出，若给定 灶个初值 $赠(园)$，$赠^{员}(园)$，…，$赠^{灶-员}(园)$ 及 $怎(t)$ 在 $t=园$ 时刻的输

入函数 怎则该系统在任何 赃园时刻的状态行为就可完全确定。

为了建立系统的状态空间描述，对给定的系统必须选择合适的状态变量。可以选取 赠赠$_{1}$，…，赠$_{n}$为系统的状态变量，即 會$_{员}$越赠 會$_{圆}$越赠，…，會$_{社}$越赠$_{n}$，当然这种方法选取的状态变量不是唯一的。将式（员爱园）化为 灶个一阶微分方程组成的方程组

$$\begin{cases} \text{鱀}_{员} \text{越} \text{會}_{圆} \text{越} \text{赠}_{1} \\ \text{鱀}_{圆} \text{越} \text{會}_{载} \text{越} \text{赠}_{2} \\ \cdots \\ \text{鱀}_{n-1} \text{越} \text{會}_{社} \text{越} \text{赠}_{n} \\ \text{鱀}_{社} \text{越} \text{原}\alpha_{园}\text{會}_{员} \text{原}\alpha_{员}\text{會}_{圆} \text{原} \cdots \text{原}\alpha_{灶-1}\text{會}_{社} \text{垣}\beta_{园}\text{怎} \end{cases} \tag{员爱员}$$

摇摇将方程组化为矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \text{鱀}_{员} \\ \text{鱀}_{圆} \\ \cdots \\ \text{鱀}_{n-1} \\ \text{鱀}_{社} \end{bmatrix} \text{越} \begin{bmatrix} 园 & 员 & 园 & \cdots & 园 \\ 园 & 园 & 员 & \cdots & 园 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 园 & 园 & 园 & \cdots & 员 \\ \text{原}\alpha_{园} & \text{原}\alpha_{员} & \text{原}\alpha_{圆} & \cdots & \text{原}\alpha_{灶-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{會}_{员} \\ \text{會}_{圆} \\ \cdots \\ \text{會}_{n-1} \\ \text{會}_{社} \end{bmatrix} \text{垣} \begin{bmatrix} 园 \\ 园 \\ \cdots \\ 园 \\ \beta_{园} \end{bmatrix} \text{怎} \tag{员爱园}$$

$$\text{赠越}\,[\text{员摇园}\quad \text{摇园}\quad \text{摇}\cdots\text{摇园}] \begin{bmatrix} \text{會}_{员} \\ \text{會}_{圆} \\ \cdots \\ \text{會}_{n-1} \\ \text{會}_{社} \end{bmatrix} \tag{员爱猿}$$

摇摇或写成简洁形式 $\begin{cases} \text{鱀越弯會垣月怎} \\ \text{赠越灶會} \end{cases}$

式中

$$\text{會越}\begin{bmatrix} \text{會}_{员} \\ \text{會}_{圆} \\ \cdots \\ \text{會}_{n-1} \\ \text{會}_{社} \end{bmatrix},\text{粤越}\begin{bmatrix} 园 & 员 & 园 & \cdots & 园 \\ 园 & 园 & 员 & \cdots & 园 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 园 & 园 & 园 & \cdots & 员 \\ \text{原}\alpha_{园} & \text{原}\alpha_{员} & \text{原}\alpha_{圆} & \cdots & \text{原}\alpha_{灶-1} \end{bmatrix},\text{月越}\begin{bmatrix} 园 \\ 园 \\ \cdots \\ 园 \\ \beta_{园} \end{bmatrix},\text{悦越}\begin{bmatrix} 员 \\ 园 \\ \cdots \\ 园 \\ 园 \end{bmatrix}^{\text{栽}}$$

摇摇式（员爱园）和（员爱猿）即为式（员爱园）所述系统的状态空间表达式（或动态方程）。

以 會$_{员}$，會$_{圆}$，…，會$_{社}$为状态变量，根据式（员爱园）和（员爱猿）可画出系统的结构图如图 员爱豫所示。

例 员爱摇设系统的输入输出微分方程为

$$\text{赠}^{(3)} \text{垣} 圆\text{赠}^{(2)} \text{垣} 源\text{赠}^{(1)} \text{垣} 远\text{赠越}\text{迂怎}$$

试求该系统的状态空间表达式。

解 取状态变量为