普通高等教育规划教材

现代控制理论

郭圣权　毕效辉　主编
安永泉　张文华　参编
吴聚华　主审

中国轻工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

现代控制理论/郭圣权，毕效辉主编．—北京：中国轻工业出版社，2007.1

普通高等教育规划教材

ISBN 7-5019-5641-3

Ⅰ．现…　Ⅱ．①郭…　②毕…　Ⅲ．现代控制理论-高等学校-教材　Ⅳ．0231

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 116031 号

内 容 提 要

本书由多年主讲该课程的几位教师联合编写。内容包括状态空间概念，状态方程建立及求解，李亚普诺夫稳定理论，能控、能观性，极点配置和观测器，以及最优控制问题和基本解决方法：即变分法，动态规划和极大值原理。书中编入大量例题和习题，并将难点和重点寓于例题和习题之中。不少例题求解时都使用了 Matlab 这一当代流行的实用工具。

全书论述清楚，层次分明，语言精练，基本概念、定理和定义叙述扼要、准确。

本书可用作高校自动化学科及相关专业本科教材，也可用于工程技术人员进修和自学。

责任编辑：王　淳

策划编辑：王　淳　　责任终审：孟寿萱　　封面设计：刘　鹏

版式设计：马金路　　责任校对：郎静瀛　　责任监印：胡　兵　张　可

出版发行：中国轻工业出版社（北京东长安街 6 号，邮编：100740）

印　　刷：　　印刷厂

经　　销：各地新华书店

版　　次：2007 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

开　　本：787×1092　1/16　　印张：14.5

字　　数：371 千字

书　　号：ISBN 7-5019-5641-3/TP・084　　定价：22.00 元

读者服务部邮购热线电话：010-65241695　85111729　传真：85111730

发行电话：010-85119817　65128898　　传真：85113293

网　　址：http://www.chlip.com.cn

Email：club@chlip.com.cn

如发现图书残缺请直接与我社读者服务部联系调换

50393J4X101ZBW

前　言

“现代控制理论”与“自动（经典）控制理论”一样，是自动化专业的重要理论基础。在状态空间框架下，它研究控制系统分析及综合的概念、理论和方法。它是高等学校自动化类本科学生的一门必修课。

本书由中北大学自动控制系和西南科技大学自动化系多年讲授该课程的几位教师联合编写。编写过程中遵照教育部“自动控制理论”课程教学大纲的要求，吸收了两校相关专业教学和教改的成果，并参考了国内外近期出版的著名教材和相关著作。

全书由绪论和 1～6 章组成。前五章讲授状态空间概念，状态方程，状态方程求解，能控、能观性，稳定性和极点配置及观测器；第 6 章讲授最优控制。

为了将重点和难点讲透，并便于学生理解和掌握，每章都编入了大量例题和习题，有意识地将书中的重点和难点寓于例题和习题之中，反复引导学生学习理解。

书中大部分例题都涉及到 Matlab 工具箱的应用和有关程序的编写，学生如能深入其中，在大学学习阶段就可熟悉和掌握这一实用工具。

本书可用作自动化学科和相关专业本科生学习“现代控制理论”课程的教材，也可用作工程技术人员进修和自学。

本书 1、4 两章由中北大学安永泉编写；第 2 章由西南科技大学毕效辉编写；3、5 两章由中北大学张文华编写；中北大学郭圣权编写了绪论和第 6 章，并对全书作了统稿和校核。全书由郭圣权教授、毕效辉教授主编，由太原科技大学吴聚华教授主审，北京工业大学王德滨对此书进行了审阅，并提出修改意见。

由于水平有限，书中难免有错误和不当之处，恳请广大读者批评指正。

编者

目　　录

绪论…… 1

第 1 章　控制系统状态空间模型…… 5

1.1　引言 …… 5

1.2　化系统的一般时域描述为状态空间描述 …… 9

1.3　化系统的频域描述为状态空间描述…… 13

1.4　状态向量的线性变换（坐标变换）…… 19

1.5　由状态空间表达式求传递函数阵…… 26

1.6　列写系统状态方程的 Matlab 方法 …… 29

1.7　习题举例…… 32

1.8　习题…… 34

第 2 章　控制系统的状态方程求解 …… 37

2.1　引言…… 37

2.2　线性定常齐次状态方程的解…… 37

2.3　线性定常非齐次状态方程的解…… 43

2.4　状态转移矩阵的计算方法…… 45

2.5　线性时变系统状态方程的解…… 49

2.6　连续时间系统的离散化…… 53

2.7　线性定常离散系统状态方程求解…… 57

2.8　习题举例…… 61

2.9　习题…… 64

第 3 章　控制系统的能控性和能观测性 …… 66

3.1　引言…… 66

3.2　线性连续系统的能控性…… 66

3.3　线性连续系统的能观测性…… 78

3.4　线性定常离散系统的能控性和能观测性…… 86

3.5　能控性与能观测性的对偶关系…… 90

3.6　线性定常系统的能控标准型和能观测标准型…… 91

3.7　线性定常系统的结构分解…… 97

3.8　传递函数阵的实现 …… 105

3.9　传递函数阵中零极点相消与系统能控性和能观测性之间的关系 …… 111

3.10　习题举例…… 113

3.11　习题…… 116

第 4 章　李亚普诺夫稳定性分析…… 120

4.1　李亚普诺夫第二法概述 …… 120

4.2　李亚普诺夫意义下的稳定性 …… 122

4.3 李亚普诺夫稳定性定理 …… 123
4.4 线性系统的李亚普诺夫稳定性分析 …… 126
4.5 变量梯度法 …… 131
4.6 利用 Matlab 分析系统稳定性 …… 134
4.7 习题举例 …… 138
4.8 习题 …… 142
第 5 章 控制系统的状态空间综合 …… 144
5.1 引言 …… 144
5.2 状态反馈和输出反馈 …… 144
5.3 极点配置 …… 146
5.4 系统镇定 …… 153
5.5 解耦控制 …… 154
5.6 状态观测器 …… 157
5.7 降维观测器 …… 162
5.8 带状态观测器的状态反馈系统 …… 165
5.9 习题举例 …… 169
5.10 习题 …… 172
第 6 章 最优控制 …… 174
6.1 引言 …… 174
6.2 预备知识：向量和矩阵的导数 …… 174
6.3 最优控制问题 …… 176
6.4 最优控制的数学分类 …… 178
6.5 动态规划 …… 178
6.6 泛函及变分法 …… 182
6.7 庞特里亚金极小值原理 …… 184
6.8 线性二次型最优控制问题 …… 186
6.9 习题举例 …… 206
6.10 习题 …… 222
参考文献 …… 226

绪　论

0.1　控制理论的发展

“工程控制论”* 的奠基人，著名科学家钱学森先生在新版“工程控制论”** （钱学森、宋健著）的“序”中说，控制论与量子论、相对论是20世纪上半叶的三大伟绩。

20世纪40、50年代，人们在解决诸如蒸汽机飞轮调速、航海罗盘稳定、冶炼炉温度调节等工程实践问题时，渐渐地形成了反馈和控制的概念与理论。奈奎斯特、伯德、伊万思、尼柯尔斯等学者们就单输入-单输出系统的分析和设计，相继研究成功频域和复域技术。奈奎斯特1932年发表“Regeneration Theory”论文；伯德1945年发表“Network Analysis and Feedback Design”论文；伊万斯1948、1950年发表“Graphical Analysis of Control Systems”和“Control System Synthesis by Root Locus Method”论文；尼柯尔斯等1947年出版“Theory of Servomechanisms”著作，分别阐明了奈奎斯特图、伯德图、根轨迹图和尼柯尔斯轨线的作图规则与技术。从此，蕴含着系统分析和设计技术的图形理论、基于拉普拉斯变换的传递函数、劳斯-胡尔维茨系统稳定性判据等集成了一度称作“调节原理”的“经典控制理论”。此后，人们在分析、设计单变量控制系统时有了理论指导，工作走向自觉。

当年维纳对控制理论发展的贡献是创造性的。1948年他发表“Cybernetics”（控制论），把控制问题和通讯问题统一在一个框架下考虑，并研究了有噪声情况下滤波、平滑和预报问题。

工农业生产的发展，航海航空业的进步，特别是空间飞行的开发，诸如化工生产过程中压力、温度和流量控制的相互制约，导航系统中速度、位置和姿态等多元信息的需求，卫星轨道控制、机器人多自由度运动等都涉及到多输入-多输出系统的分析和设计。交通运输要求路线最短，运费最省；空间飞行要求燃料消耗最少，运行轨道最优；如此种种，系统愈来愈复杂，性能指标要求愈来愈高，环境适应性更加苛刻。以致非线性和噪声问题也不得不认真对待。

计算机科学的飞速发展为控制系统分析和设计提供了强有力的计算工具，一定程度上起了推波助澜的作用。

20世纪50年代后期、60年代初期控制理论进入了一个新的发展时期。1952年贝尔曼发表“The Theory of Dynamic Programming”论文；1960年庞特里亚金发表“The Theory of Optimal Processes：Maximum Principle”论文；同年卡尔曼发表“A new Approach to Linear Filtering and Prediction Problem”论文，并在这一年莫斯科召开的第一届IFAC大会

---

* 钱学森，“Engineering Cybeenetics”（工程控制论），1954年出英文版，1956年出俄文版，1957年出德文版，1958年出中文版。

** 钱学森、宋健，工程控制论，北京：科学出版社，1980。

上宣读了论文“On the General Theory of Control System”。提出了系统状态能控、能观的概念，阐述了在状态空间框架下系统分析和设计问题。1961 年卡尔曼和布西发表“New Results in Linear Filtering and Prediction”论文。卡尔曼滤波器不受约束维纳理论的平稳随机过程假设和解积分方程等的限制，且可递推计算，推动了滤波、平滑和预报的工程应用。“现代控制理论”渐渐形成。

系统分析的基础是数学模型，为研究模型误差对反馈控制器性能的影响，20 世纪 80 年代中后期鲁棒控制理论日臻完善。

与此同时，可概括为智能控制的神经网络控制、模糊控制、进化算法相继得到蓬勃发展，并在工程应用中有了成功应用的范例。

钱学森先生的新版“工程控制论”的“序”中说：“作为技术科学的控制论，对工程技术、生物和生命现象的研究和经济科学，以及对社会研究都有深刻的意义，比起相对论和量子论对社会的作用有过之无不及”。在阐明了量子论、相对论是基础理论，而控制论是技术科学之后，他又说：“作为技术科学的控制论，能不能把工程控制论、生物控制论、经济控制论、社会控制论等等作为基础科学理论控制论派生出来的技术科学呢?”“如果这就是我们要建立的基础科学理论控制论，那我们可以从这一新版‘工程控制论’看到，我们达到的离我们的目的还有一段距离，深度还很差，要真正建立这门基础科学，还有待今后控制论专业工作者们的努力。”

伴随科技进步和工农业生产、交通运输、金融贸易、社会治安、生命科学、军事变革、空间探索等的发展，同其他科学理论一样，产生于人类社会实践又推动人类社会实践进步的控制理论，在 21 世纪一定会更快地发展，成为一门基础科学理论，并为人类社会做出更大的贡献。

0.2 现代控制理论

概括地讲，现代控制理论是以一对方程：

$$\dot{X}(t)=A(t)X(t)+B(t)U(t) \tag{0-1a}$$

$$Y(t)=C(t)X(t)+D(t)U(t) \tag{0-1b}$$

为基础，研究控制系统分析和综合的理论。

方程（0-1a）称作系统的状态方程，是一个一阶向量微分方程，它描述系统状态向量$X(t)$在初始状态 $X(t_0)$ 和输入 $U(t)$ 作用下的动态行为。方程（0-1b）称作系统的输出方程，是一个代数方程，它表达系统的输出 $Y(t)$ 受系统状态 $X(t)$ 和外部输入 $U(t)$ 影响的状况。

这组方程可描述多输入-多输出系统，也可描述单输入-单输出系统，既适用于时不变（定常）系统，也适用于时变系统；将 A、B、C、D 适当变换一下，它也能描述离散系统。对于非线性系统，常用的方法是在标称工作点附近的一个邻域内将系统线性化，此时 A、B、C、D 代表的是线性化后的参数矩阵。

这里所说的系统，并非实际的物理系统，而是代表物理系统的数学模型。基于方程(0-1a)和（0-1b）研究系统分析和综合问题，包括下列三项内容：

（1）建立数学模型

研究的目的和操作范围不同，一个物理系统可能有几种不同的数学模型。遵循一定的物理定律，如克希柯夫电压、电流定律，牛顿力学定律等，通过分析或实验，建立物理系统的

数学模型，如微分方程、差分方程，或状态方程（0-1a）和（0-1b）。这部分内容通称为数学建模或系统辨识。

（2）系统分析

系统分析分定性分析和定量分析。定性分析一般指：分析系统的稳定性、状态能控性和能观性。定性分析很重要，认识系统从此开始。定量分析时常常要求建立系统各种性能指标之间的关系式，往往要借助计算机进行仿真。

（3）系统设计

系统设计是根据建立的数学方程，研究物理系统在运行环境下，为使系统实现性能指标，如上升时间、超调量、静态误差等，应如何设计补偿器？系统设计分有约束设计（即严格设计）和无约束设计。无约束设计，一般不考虑物理可实现性，是纯理论设计。有约束设计要考虑物理可实现的约束，补偿器设计的制约因素较多，设计难度也较大。

应用现代控制理论进行系统设计，最典型的代表是最优控制系统的设计。最优控制的目的是使系统的某种性能指标达到最优，例如空间飞行器要求燃料消耗最少，导弹拦截控制要求运行时间最短等。

最优化系统性能指标可表述为：

$$J = S[X(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[X(t), U(t), t]\mathrm{d}t \tag{0-2}$$

J 是一个标量，在此它替代经典控制理论的设计指标，如最大超调量、上升时间、阻尼比、稳定裕度等，表达控制时间最短，或控制能量最省，或运行轨迹最优等最优控制系统的性能指标。

这类控制系统的设计问题属多变量控制系统设计，用经典的设计方法很难奏效。经过许多学者们多年的努力，多变量控制系统的最优设计已经有了解决问题的理论方法和实现技术。LQG 问题的成功解决，被称作现代控制理论重要的成果。现在最优控制系统已经在空间飞行、交通运输、武器制导，甚至金融领域得到了成功应用。

在解决最优控制问题中，系统辨识、自适应控制、鲁棒控制、智能控制、最佳估计等一系列现代控制理论的专门学科得到了很好的开发。

0.3 控制理论的现代频率法

提到现代控制理论，一般多指它的时域处理方法，即时域法。这种处理方法在宇航领域，如卫星和飞船的发射、控制、跟踪等方面获得了成功应用，但在某些复杂工业过程领域的应用，却不尽如意。对比分析，主要原因是，对于工业系统，①受控对象的数学模型很难做到精确；②受控对象的性能指标不像宇航问题那样好表达；③用时域最优控制、最优滤波技术设计的控制器过于复杂，难于物理实现。

20 世纪 60 年代后期，以及 70 年代，针对复杂工业对象多变量控制系统的分析、设计问题，英国学者罗森勃劳克（H. H. Rosenbrok）1969 年发表“Design of Multivariable Control Systems Using The，Inverse Nyquist Array”论文；麦克法兰（A. G. . J. Macfarlane）1970 年发表“The Return-Difference and Return-Ratio Matrices and use in Analysis and Design of Multivariable Feedback Control Systems”论文；麦克法兰和贝莱恰蒂（J. J. Belletrutti）1973 年发表“The Characteristic Locus Design Method”论文；梅尼

（D. Q. Mayne）和茨奇（S. C. Chuang）1973 年发表“Sequential Return Difference Method for Designing Linear Multivariable systems”论文；欧文斯（D. H. Owens）1974 年发表“Dyadic Expansion for The Analysis of Linear Multivariable”论文，以及相继发表的一系列论文，提出并日渐完善地论述在频域和复域应用广义奈奎斯特-伯德图（Generalised Nyquist-bode Diagrams）和广义根轨迹图解决多变量系统的分析和设计理论，以及工程实践问题。这就形成了一个现代控制理论的新学派，即现代频率学派。他们的方法称现代频率法（或新频率法）。

事实上，除了时域法和频域法之外，学者们还开发出了分析研究多变量控制系统的代数法、几何法等一些别的方法。

本书只涉及时域法，绪论中所以提现代频域法，一是告诉学生，他（她）们在经典控制理论中学习过的频域法，仍是有用的，且在多变量控制理论中有了新的发展；二是扩展学生的知识视野，使其明白现代控制理论有多种处理方法，方法不同，解决问题的优势不同，实用的系统工作环境也不同，以诱导学生的学习兴趣。

第 1 章　控制系统状态空间模型

1.1　引言

经典控制理论，研究当系统在一定的输入作用下，观察分析其输出，从而确定系统的动态性能，即把系统的输入输出关系，所谓外部关系，当作研究对象。这种研究方法常把系统的内部当作一个黑匣子，如图 1-1 所示。



图 1-1

不管系统的内部关系如何复杂，单输入-单输出系统的动态特性总可以由高阶微分方程描述：

$$y^n+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny=b_0u^{(n)}+b_1u^{(n-1)}+\cdots+b_{n-1}\dot{u}+b_nu$$

对于定常系统，也可用传递函数表示，即

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=G(s)$$

式中，s 是拉氏算子；$Y(s)$ 是输出的拉氏变换函数；$U(s)$ 是输入的拉氏变换函数。经典控制理论研究问题，在复数域和频率域内通常采用不同的方法。经典理论设计系统时，性能指标常常依赖设计者的经验和试探确定。设计单变量定常系统尚可，设计多变量系统/时变系统困难会很大。

现代控制理论，常采用时域方法研究系统的内部结构。通过分解系统的内部结构，得到叫作“状态”的 n 个基本组元（一个组元对应物理系统中的一个储能元件）。定义“状态”为整体基本组元特性的表征。状态的每个组元由一个一阶微分方程描述。研究这 n 个基本组元之间，以及它们与系统的输入、输出的关系，是现代控制理论的基本内容。古典控制理论所研究的外部关系，现代控制理论也会清楚表达。

现代控制理论适应了系统更加复杂的研究任务和高精度的性能要求，可更方便地分析多输入-多输出系统、时变系统、非线性系统，以及随机系统等，亦便于使用计算机。

1.1.1　状态空间描述

1.1.1.1　基本概念

（1）**状态**　动态系统在特定时间点的状况（status）表征量。已知初始时间 $t=t_0$ 的**状态** $\boldsymbol{X}(t_0)$，与 $t\geqslant t_0$ 时的输入量 $u(t)$，则可唯一确定系统在 $t\geqslant t_0$ 后的**状态** $\boldsymbol{X(t)}$。系统在 t_0 时刻的**状态是** t_0 时刻之前动态系统运行历史结果的描述。**状态是**时间 t 的函数，现时的**状态与过去的状态和将来的状态，一般说，不会相同**。

（2）**状态变量**　为完全描述系统运动状态，需要一个变量个数最少的最小变量组。这些变量称作**状态变量**。n 阶系统有 n 个状态变量。

(3) **状态向量** 若 x_1，…，x_n 为描述系统的最小变量组，则 $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$ 为状态向量。

(4) **状态空间** 由 x_1 轴，x_2 轴，…，x_n 轴所组成的 n 维空间称为状态空间（n 维欧式空间）。每一个状态向量 x 为状态空间中的一个状态点。

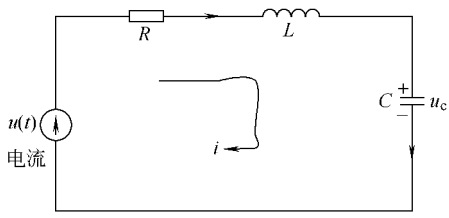


图 1-2 *RLC* 网络

(5) **状态方程** 描述系统运动的一组微分方程，n 阶系统有 n 个一阶微分方程。对单输入-单输出系统，状态方程是将描述系统的一个 n 阶微分方程改变为由 n 个一阶微分方程组来表述。

例 1-1 *RLC* 网络，如图 1-2 所示。其中 $u(t)$ 为输入变量，$u_c(t)$ 为输出变量，试求其状态空间描述。

解：1. 确定状态变量

根据克希柯夫定律，可得

$$\begin{cases}Ri+L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+u_c=u(t)\\ i=C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}\end{cases}\tag{1-1}$$

选取 $\begin{cases}x_1=u_c(\text{输出量})\\x_2=i(\text{中间量})\end{cases}$ 为状态变量

2. 列写一阶微分方程组

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{C}x_2\\ \dot{x}_2=\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{L}(-x_1-Rx_2)+\dfrac{1}{L}u(t)\end{cases}\tag{1-2}$$

3. 建立状态空间描述

令 $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_c\\i\end{bmatrix}$，则

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=\begin{bmatrix}0&\dfrac{1}{C}\\-\dfrac{1}{L}&-\dfrac{R}{L}\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}0\\\dfrac{1}{L}\end{bmatrix}u(t) &&\text{（状态方程）}\\ y&=u_c=[1\quad 0]X &&\text{（输出方程）}\end{aligned}\right\}\tag{1-3}$$

上例中，令 $A=\begin{bmatrix}0&\dfrac{1}{C}\\-\dfrac{1}{L}&-\dfrac{R}{L}\end{bmatrix}$，称为系统矩阵；$B=\begin{bmatrix}0\\\dfrac{1}{L}\end{bmatrix}$，称为输入矩阵；$C=[1\quad 0]$，称为输出矩阵。方程（1-3）可写成：

$$\dot{x}=Ax+Bu$$
$$y=Cx$$

对于一般的 n 阶线性多输入-多输出系统(图 1-3)。

假设多输入、多输出系统中包含 n 个积分器，又设系统中有 r 个输入量 $u_1(t)$，$u_2(t)$，…，$u_r(t)$ 和 m 个输出量 $y_1(t)$，$y_2(t)$，…，$y_m(t)$。定义积分器的 n 个输出量为状

态变量 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$。于是可以用下列方程描述系统：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1(t)&=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n;u_1,u_2,\cdots,u_r;t)\\ \dot{x}_2(t)&=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n;u_1,u_2,\cdots,u_r;t)\\ &\vdots\\ \dot{x}_n(t)&=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;u_1,u_2,\cdots,u_r;t)\end{aligned}\right\}\tag{1-4}$$

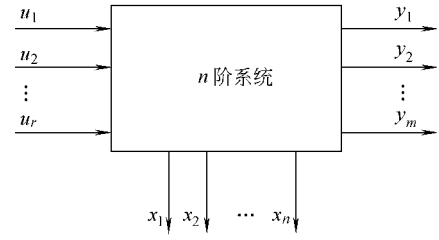


图 1-3　多输入-多输出系统示意图

系统的输出量 $y_1(t),y_2(t),\cdots,y_m(t)$ 可表示为：

$$\left.\begin{aligned}y_1(t)&=g_1(x_1,x_2,\cdots,x_n;u_1,u_2,\cdots,u_r;t)\\ y_2(t)&=g_2(x_1,x_2,\cdots,x_n;u_1,u_2,\cdots,u_r;t)\\ &\vdots\\ y_m(t)&=g_m(x_1,x_2,\cdots,x_n;u_1,u_2,\cdots,u_r;t)\end{aligned}\right\}\tag{1-5}$$

定义

$$x(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{bmatrix},F(X,u,t)=\begin{bmatrix}f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n;u_1,u_2,\cdots,u_r;t)\\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n;u_1,u_2,\cdots,u_r;t)\\ \vdots\\ f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;u_1,u_2,\cdots,u_r;t)\end{bmatrix}$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\\ \vdots\\ y_m(t)\end{bmatrix},G(X,u,t)=\begin{bmatrix}g_1(x_1,x_2,\cdots,x_n;u_1,u_2,\cdots,u_r;t)\\ g_2(x_1,x_2,\cdots,x_n;u_1,u_2,\cdots,u_r;t)\\ \vdots\\ g_m(x_1,x_2,\cdots,x_n;u_1,u_2,\cdots,u_r;t)\end{bmatrix}$$

$$u(t)=\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\\ \vdots\\ u_r(t)\end{bmatrix}$$

则方程（1-4）和方程（1-5）可写成

$$\dot{x}(t)=F(X,u,t)\tag{1-6}$$

$$(y)t=G(X,u,t)\tag{1-7}$$

方程（1-6）为状态方程，方程（1-7）称为输出方程。将方程（1-6）和方程（1-7）围绕运行状态线性化，则有下列线性化状态方程和输出方程：

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)\tag{1-8}$$

$$y(t)=C(t)x(t)+D(t)u(t)\tag{1-9}$$

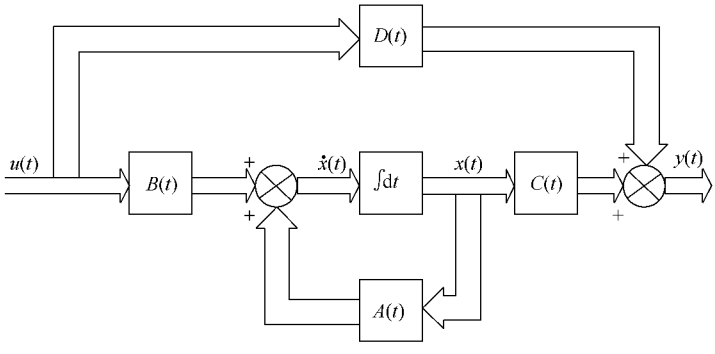


图 1-4　状态空间内的线性连续时间控制系统的方框图

式中，$A(t)$ 为系统矩阵；$B(t)$ 为输入矩阵；$C(t)$ 为输出矩阵；$D(t)$ 称为直接传输矩阵。

（6）**状态空间模型**　系统状态方程和输出方程的组合。状态空间模型也可用方框图表示（图 1-4）。

如果向量函数 A、B、C 和 D 不显含时间 t，则称该系

统为定常系统。在这种情况下，方程（1-8）和方程（1-9）可以简化为：

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \tag{1-10}$$

$$y(t)=Cx(t)+Du(t) \tag{1-11}$$

方程（1-10）是线性定常系统的状态方程，方程（1-11）是同一系统的输出方程。在本书中，我们将主要研究由方程（1-10）和方程（1-11）描述的系统。

1.1.1.2 状态变量的非唯一性

描述系统的状态变量组不是唯一的，通常会有多组状态变量可供选择。前述例 1-1 中，取过

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_c\\i\end{bmatrix}$$

现取

$$\bar{x}=\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\\bar{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i\\\int i\mathrm{d}t=Cu_c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\Cx_1\end{bmatrix} \tag{1-12}$$

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}_1=-\dfrac{R}{L}\bar{x}_1-\dfrac{1}{LC}\bar{x}_2+\dfrac{1}{L}u\\\dot{\bar{x}}_2=\bar{x}_1\end{cases} \tag{1-13}$$

则

$$\bar{y}=\frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t$$

或写成向量形式：

$$\left.\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\\dot{\bar{x}}_2\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}-\dfrac{R}{L}&\dfrac{1}{LC}\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\\bar{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{L}\\0\end{bmatrix}u\\\bar{y}&=\begin{bmatrix}0&\dfrac{1}{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\\bar{x}_2\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{1-14}$$

建立了新的状态方程。

根据式（1-12），$\bar{x}_1=x_2$，$\bar{x}_2=Cx_1$，即$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\\dot{\bar{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\C&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

亦即 $\bar{x}=Px$，$x=P^{-1}\bar{x}$，$P=\begin{bmatrix}0&1\\C&0\end{bmatrix}$（$P$ 满秩）

P 称为转换矩阵。

可以看出，状态变量的选择是非唯一的，且从理论上讲，由于满秩的 P 有无穷多，因此状态变量的选择有无穷多种，实际常取有物理意义的量作状态变量。

1.1.2 状态空间表达式的模拟结构图

在状态空间分析中，常采用模拟结构图反映系统各状态变量之间的信息传递关系，这对建立系统状态空间表达式也是一种辅助方法。

状态空间表达式的结构图可按照下列步骤绘制：

① 积分器的数目应等于状态变量数，每个积分器的输出表示相应的状态变量；

② 根据所给的状态方程和输出方程，画出相应的加法器和比例器；

③ 箭头代表信号流向，把这些元件连接起来。

1.1.2.1 由标量微分方程画模拟结构图

对于一阶标量微分方程：

$$\dot{x}=ax+bu$$

它的模拟结构图，如图 1-5 所示。

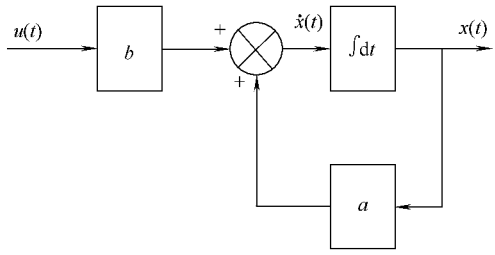


图 1-5　一阶标量微分方程的模拟结构图

对于三阶微分方程：

$$\dddot{x}+a_2\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_0x=bu$$

可改写成：

$$\dddot{x}=-a_2\ddot{x}-a_1\dot{x}-a_0x+bu$$

它的模拟结构图，如图 1-6 所示。

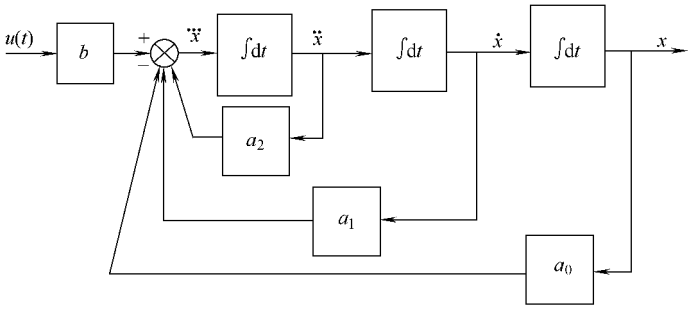


图 1-6　三阶标量微分方程的模拟结构图

1.1.2.2 由状态空间表达式画模拟结构图

例 1-2　已知系统状态空间表达式为：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_3=-6x_1-3x_2-2x_3+u\end{cases}$$

$$y=x_1+x_2$$

图 1-7 为根据上面的表达式画出的结构图。

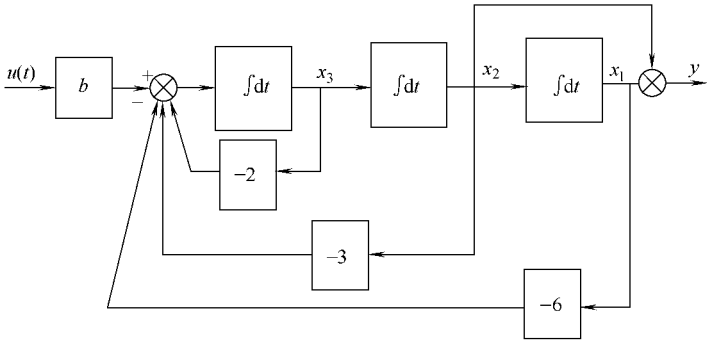


图 1-7　系统模拟结构图

1.2　化系统的一般时域描述为状态空间描述

在经典控制理论中，控制系统的时域模型通常用输出与输入间的一个单变量高阶微分方程**描述**，它的一般形式如下：

$$y^n+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny=b_0u^{(n)}+b_1u^{(n-1)}+\cdots+b_{n-1}\dot{u}+b_nu$$

由 1.1 节可知，线性定常系统的状态空间表达式为：

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases} \tag{1-15}$$

将一般时域描述化为状态空间表达式的步骤是：选择系统的状态变量，并由 $a_i(i=1,\cdots,n)$，$b_j(j=0,1,\cdots,n)$ 定出相应的系数矩阵 A、B、C、D。下面分两种情况说明。

1.2.1 微分方程中不含输入函数的导数项

线性微分方程如下：

$$y^n+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny=b_nu$$

1.2.1.1 选择状态变量

一个 n 阶系统，具有 n 个状态变量，当给定 $y(0),\dot{y}(0),\cdots,y^{(n-1)}(0)$ 和输入 $u(t)$ 时，系统在 $t\geqslant 0$ 时的运动状态就完全确定了，所以可以取 $y,\dot{y},\ddot{y},\cdots,y^{(n-1)}$ 为系统的一组状态变量，即

$$\begin{cases}x_1=y\\ x_2=\dot{y}\\ \vdots\\ x_n=y^{(n-1)}\end{cases}$$

1.2.1.2 将高阶微分方程化为状态变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一阶微分方程组

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\dot{y}=x_2\\ \dot{x}_2=\ddot{y}=x_3\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}=y^{(n-1)}=x_n\\ \dot{x}_n=y^{(n)}=-a_ny-a_n\dot{y}-\cdots-a_1y^{(n-1)}+b_nu\\ =-a_nx_1-a_{n-1}x_2-\cdots-a_1x_n+b_nu\end{cases}$$

系统输出关系式为：$y=x_1$

1.1.2.3 将一阶微分方程组化为向量形式

状态方程为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ & & & & \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}u \tag{1-16}$$

输出方程为：

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} \tag{1-17}$$

例 1-3 设系统输入-输出微分方程为：

$$\dddot{y}+6\ddot{y}+11\dot{y}+6y=6u$$

选 $x_1=y,x_2=\dot{y},x_3=\ddot{y}$ 为状态变量，可导出系统的状态方程和输出方程：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 6\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

1.2.2 微分方程中包含输入函数的导数项

线性微分方程为：

$$y^n+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny=b_0u^{(n)}+b_1u^{(n-1)}+\cdots+b_{n-1}\dot{u}+b_nu \tag{1-18}$$

现在微分方程的右边出现了 u 的导数项，选择状态变量时要使导出的一阶微分方程组等式右边不出现 u 的导数项，以免破坏方程解的存在与唯一性。为此，选择状态变量时通常把输出 y 和输入 u 的各阶导数做适当组合。

1.2.2.1 选择状态变量

令

$$\begin{cases}x_1=y-\beta_0u\\ x_2=\dot{y}-\beta_0\dot{u}-\beta_1u\\ x_3=\ddot{y}-\beta_0\ddot{u}-\beta_1\dot{u}-\beta_2u\\ \vdots\\ x_n=y^{(n-1)}-\beta_0u^{(n-1)}-\beta_1u^{(n-2)}-\cdots-\beta_{n-2}\dot{u}-\beta_{n-1}u\\ x_{n+1}=y^{(n)}-\beta_0u^{(n)}-\beta_1u^{(n-1)}-\cdots-\beta_{n-1}\dot{u}-\beta_nu\end{cases} \tag{1-19}$$

式中的系数 $\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_n$ 待定，它们可由下面方法确定：

用 $a_n,a_{n-1},\cdots,a_1$ 分别乘式（1-18）中相应方程的两端，并移项，得

$$\begin{cases}a_ny=a_nx_1+a_n\beta_0u\\ a_{n-1}\dot{y}=a_{n-1}x_2+a_{n-1}\beta_0\dot{u}+a_{n-1}\beta_1u\\ a_{n-2}\ddot{y}=a_{n-2}x_3+a_{n-2}\beta_0\ddot{u}+a_{n-2}\beta_1\dot{u}+a_{n-2}\beta_2u\\ \quad\vdots\\ a_1y^{(n-1)}=a_1x_n+a_1\beta_0u^{(n-1)}+a_1\beta_1u^{(n-2)}+\cdots+a_1\beta_{n-2}\dot{u}+a_1\beta_{n-1}u\\ y^{(n)}=x_{n+1}+\beta_0u^{(n)}+\beta_1u^{(n-1)}+\cdots+\beta_{n-1}\dot{u}+\beta_nu\end{cases}$$

不难看出，上述各方程左端相加等于线性微分方程的左端，上述各方程右端相加也等于线性微分方程的右端，即

$$\begin{aligned}&\{x_{n+1}+a_1x_n+\cdots+a_{n-1}x_2+a_nx_1\}+\{\beta_0u^{(n)}+(\beta_1+a_1\beta_0)u^{(n-1)}+\\&(\beta_2+a_1\beta_1+a_2\beta_0)u^{(n-2)}+\cdots+(\beta_{n-1}+a_1\beta_{n-2}+\cdots+a_{n-2}\beta_2+a_{n-1}\beta_0)\dot{u}+\\&(\beta_n+a_1\beta_{n-1}+\cdots+a_{n-1}\beta_1+a_n\beta_0)u\}=b_0u^{(n)}+b_1u^{(n-1)}+\cdots+b_{n-1}\dot{u}+b_nu\end{aligned} \tag{1-20}$$

等式两边 $u^k(k=0,1,\cdots,n)$ 的系数应相等，所以

$$\begin{cases}\beta_0=b_0\\ \beta_1=b_1-a_1\beta_0\\ \beta_2=b_2-a_1\beta_1-a_2\beta_0\\ \vdots\\ \beta_n=b_n-a_1\beta_{n-1}-\cdots-a_{n-1}\beta-a_n\beta_0\end{cases} \tag{1-21}$$

这是由 a_i 和 b_j 计算 $\beta_k(k=0,1,\cdots,n)$ 的关系式。事实上，β_i 叫做马尔科夫参数，也可对式（1-18）表示的系统传递函数，运用长除法 $\dfrac{b_0 s^n+b_1 s^{n-1}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1 s^{n-1}+a_2 s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$ 得到。

1.2.2.2 导出状态变量的一阶微分方程组和输出关系式

对式（1-19）求导数，并考虑到式（1-20）中，

$$\{x_{n+1}+a_1 x_n+\cdots+a_{n-1}x_2+a_n x_1\}=0$$

可得

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\dot{y}-\beta_0\dot{u}=x_2+\beta_1 u\\ \dot{x}_2=\ddot{y}-\beta_1\ddot{u}-\beta_1\dot{u}=x_3+\beta_2 u\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}=x_n+\beta_{n-1}u\\ \dot{x}_n=x_{n+1}+\beta_{n-1}u=-a_n x_1-a_{n-1}x_2-\cdots-a_1 x_n+\beta_n u\end{cases}$$

$$y=x_1+\beta_0 u$$

1.2.2.3 化为向量形式

状态方程为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}u \tag{1-22}$$

输出方程为：

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta_0\end{bmatrix}u \tag{1-23}$$

例 1-4 系统输入-输出微分方程为：

$$\dddot{y}+12\ddot{y}+47\dot{y}+60y=3\ddot{u}+11u$$

求其状态空间描述。

解：根据式（1-20），将此系统的传递函数 $\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{3s+11}{s^3+12s^2+47s+60}$ 实施长除，可得

$$\begin{cases}\beta_0=b_0=0\\ \beta_1=b_1-a_1\beta_0=0\\ \beta_2=b_2-a_1\beta_1-a_2\beta_0=3\\ \beta_3=b_3-a_1\beta_2-a_2\beta_1-a_3\beta_0=-25\end{cases}$$

所以状态变量为：

$$x_1=y-\beta_0 u=y$$

$$x_2=\dot{y}-\beta_0\dot{u}-\beta_1\dot{u}=\dot{y}$$

$$x_3=\ddot{y}-\beta_0\ddot{u}-\beta_1\dot{u}-\beta_2 u=\ddot{y}-3u$$

按照前述推导得出的规律写出状态方程和输出方程：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -60 & -47 & -12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 3\\ -25\end{bmatrix}u$$