高等院校自动化专业系列教材

现代控制理论

王　翼　编著

机械工业出版社

本书介绍了现代控制系统的基本理论和控制系统分析与设计的主要方法，内容涉及线性控制系统、最优控制系统和随机控制系统，由浅入深，富有启发性。每章附有习题，主要算法给出了应用 MATLAB 求解的方法，使读者通过本书的学习，既能打下扎实的理论基础，又能掌握应用 MATLAB 对控制系统进行分析与设计的技能。

本书可以作为高等学校自动控制或自动化专业本科生的教材，研究生的教学参考书，经济、管理类专业经济控制论课程的教学参考书，也可以供工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

现代控制理论/王翼编著．—北京：机械工业出版社，2005.1
（高等院校自动化专业系列教材）
ISBN 7-111-15326-X

Ⅰ．现… Ⅱ．王… Ⅲ．现代控制理论-高等学校-教材 Ⅳ．0231

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 098334 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
责任编辑：郭燕春 版式设计：冉晓华 责任校对：王 欣
责任印制：李 妍
北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2005 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
787mm×1092mm 1/16·14.75 印张·362 千字
0 001—5 000 册
定价：21.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68993821、88379646
封面无防伪标均为盗版

高等院校自动化专业系列教材编审委员会

主　任　袁著祉

副主任　王桂增　席裕庚

委　员（以姓氏笔画为序）

田作华　李华德　陈大钦　张长水

贾　磊　韩崇昭　薛定宇

出 版 说 明

自动化技术是一门集控制、系统、信号处理、电子和计算机技术于一体的综合技术，广泛用于工业、农业、交通运输、国防、科学研究以及商业、医疗、服务和家庭等各个方面。自动化水平的高低是衡量一个国家或社会现代化水平的重要标志之一，建设一个现代化的国家需要大批从事自动化事业的人才。高等院校的自动化专业是培养国家所需要的专业面宽、适应性强，具有明显的跨学科特点的自动化专门人才的摇篮。

为了适应新时期对高等教育人才培养工作的需要，以及科学技术发展的新趋势和新特点，并结合最新颁布实施的高等院校自动化专业教学大纲，我们邀请清华大学、南开大学、上海交通大学、西安交通大学、东北大学、华中科技大学、山东大学、北京科技大学等名校的知名教师、专家和学者，成立了教材编写委员会，共同策划了这套面向高校自动化专业的教材。

本套教材定位于普通高等院校自动化类专业本科层面。按照教育部颁发的《普通高等院校本科专业介绍》中所提出的培养目标和培养要求，适合作为广大高校相关专业的教材，反映了当前教学与技术发展的主流和趋势。

本套教材的特色：

1. 作者队伍强。本套教材的作者都是全国各院校从事一线教学的知名教师和相关专业领域的学术带头人，具有很高的知名度和权威性，保证了本套教材的水平和质量。

2. 观念新。本套教材适应教学改革的需要和市场经济对人才培养的要求。

3. 内容新。近 20 年，自动化技术发展迅速，与其他学科的联系越来越紧密。这套教材力求反映学科发展的最新内容，以适应 21 世纪自动化人才培养的要求。

4. 体系新。在以前教材的基础上重构和重组，补充新的教学内容，各门课程及内容的组成、顺序、比例更加优化，避免了遗漏和不必要的重复。根据基础课教材的特点，本套教材的理论深度适中，并注意与专业教材的衔接。

5. 教学配套的手段多样化。本套教材大力推进电子讲稿和多媒体课件的建设工作。本着方便教学的原则，一些教材配有习题解答和实验指导书，以及配套学习指导用书。

机械工业出版社

前　言

现代控制理论自20世纪50年代末产生以来，至今已经历了近半个世纪，在此期间从理论到实践都得到了长足的发展，为人们提供了可以很好地研究动态系统并获得理想性能的方法。由于动态系统的广泛存在，现代控制理论的思想和方法已经应用于工业、农业、国防、航天、交通运输、经济、管理、生物、医学等领域。因此，有人提出，自然科学和社会科学工作者，都应具备一定的现代控制理论知识，这对拓展思路、提高工作水平是大有裨益的。

本书介绍了现代控制理论的基本理论和方法，包括控制系统基础，线性系统理论，最优控制，卡尔曼滤波与线性二次型高斯问题四部分，共10章。线性系统部分详细讲述了定常线性系统的能控性、能观测性和标准分解，然后介绍了反馈控制系统的设计、观测器的设计和鲁棒控制。最优控制部分介绍了连续时间系统的变分法和最大值原理，离散时间系统的变分法和最大值原理及动态规划。考虑到卡尔曼滤波与线性二次型高斯问题在诸多领域内的广泛应用，在第10章对卡尔曼滤波与线性二次型高斯问题作了简单的介绍。每章后面均有一定数量的习题，以帮助读者掌握所学内容。本书内容涵盖了现代控制理论的基本内容，曾在南开大学自动化系讲过多遍，并经过多次修改。

本书的编写宗旨是：

1. 基本理论讲解清楚，为进一步深入学习和应用打下了一个扎实的基础。

2. 现代控制理论的思想和方法已经广泛应用于多种领域，本书通过实例，介绍了现代控制理论在工程、航天、经济、管理和医学等领域中的应用。

3. MATLAB软件为控制系统的分析与设计提供了一个强有力的工具，本书涉及的主要算法都给出了相应的MATLAB函数和调用格式，以方便读者应用。这可以使读者把学习本书的主要精力放在掌握现代控制理论的思想、方法和对控制系统作进一步的分析和研究上，而不是花很多时间进行矩阵的运算和解微分方程。

为了帮助读者掌握本书所讲的分析和设计方法，本书还提供了一些设计方法，以及应用这些方法解例题的MATLAB程序，所有这些程序都是由黄兴博开发的。他的工作给读者学习本书带来很大的方便，在此向他表示深切的谢意。在本书的编写过程中，得到了卢桂章教授、袁著祉教授、辛运帏教授的大力支持和帮助，在此一并表示感谢。

本书最后定稿是在美国完成的，网上丰富的技术资料和通过图书馆网络借阅新书的方便，使我收集到了很多很新的资料，为保证本书的先进性创造了条件。

由于本人水平所限，错误和不当之处在所难免，衷心欢迎读者提出批评和建议。

王　翼

目　　录

出版说明
前言

第 1 章　控制系统导论 …… 1
1.1　现代控制理论引论 …… 1
1.2　控制系统的状态空间描述 …… 2
1.2.1　控制系统的状态变量和状态方程 …… 2
1.2.2　控制系统的状态流图模型 …… 4
1.2.3　线性控制系统和非线性控制系统的线性化 …… 4
1.3　线性控制系统的动态响应 …… 5
1.3.1　连续时间线性控制系统的动态响应 …… 5
1.3.2　连续时间线性控制系统的离散化 …… 6
1.3.3　离散时间线性控制系统的动态响应 …… 7
1.3.4　化初始条件响应为单位阶跃响应及相应的 MATLAB 程序 …… 8
1.4　定常线性系统的传递函数阵 …… 9
1.4.1　定常线性系统的传递函数阵 …… 9
1.4.2　应用 MATLAB 命令求传递函数阵 …… 11
1.5　控制系统设计的一般步骤 …… 12
1.6　控制系统的实例 …… 12
1.7　习题 …… 16

第 2 章　控制系统的结构性质 …… 18
2.1　动态系统的稳定性 …… 18
2.1.1　稳定性的基本概念 …… 18
2.1.2　定常线性动态系统的稳定性分析 …… 19
2.1.3　非线性系统在均衡点附近的稳定性 …… 21
2.2　定常线性系统的能控性 …… 21
2.2.1　能控性的定义 …… 21
2.2.2　定常线性系统的能控性 …… 22
2.2.3　离散时间定常线性系统的能控性与能达性 …… 24
2.2.4　连续系统离散化对能控性的影响 …… 25
2.2.5　关于能控性定义的说明 …… 25
2.3　定常线性系统的能观测性 …… 26
2.3.1　能观测性的定义 …… 26
2.3.2　定常线性系统能观测性的判据 …… 26
2.3.3　应用 MATLAB 判断能控性与能观测性 …… 28

2.4 能控性与能观测性的对偶性 …… 29
2.5 系统的能控结构形式与能观测结构形式 …… 30
2.5.1 线性系统的坐标变换及其特性 …… 30
2.5.2 能控子空间 …… 32
2.5.3 定常线性系统的能控结构形式——能控部分的分离 …… 33
2.5.4 不能观测子空间 …… 38
2.5.5 定常线性系统的能观测结构形式——能观测部分的分离 …… 39
2.5.6 能控性与能观测性的 PBH 判据 …… 42
2.5.7 求控制系统的能控结构形式与能观测结构形式的 MATLAB 程序 …… 43
2.6 定常线性系统的标准分解 …… 46
2.6.1 卡尔曼标准分解定理 …… 46
2.6.2 系统的零点极点相消问题的讨论 …… 49
2.7 最小实现问题 …… 52
2.7.1 单输入单输出系统的传递函数的实现 …… 52
2.7.2 多输入多输出系统的传递函数阵的实现 …… 55
2.7.3 最小实现 …… 58
2.8 习题 …… 60

第 3 章 反馈控制系统的设计 …… 64
3.1 引言 …… 64
3.2 应用李雅普诺夫第二方法设计反馈控制系统 …… 65
3.2.1 设计方法 …… 65
3.2.2 设计实例 …… 66
3.2.3 对于离散系统的相应结果 …… 67
3.3 极点配置问题 …… 67
3.3.1 应用状态反馈配置极点 …… 67
3.3.2 极点配置算法的改进 …… 74
3.3.3 极点位置的确定 …… 76
3.3.4 应用极点配置设计倒摆控制系统的 MATLAB 程序 …… 77
3.3.5 其他极点配置方法简介 …… 80
3.3.6 装置有噪声时的极点配置问题 …… 81
3.4 镇定问题 …… 82
3.5 应用状态反馈的解耦控制 …… 82
3.5.1 应用状态反馈解耦 …… 83
3.5.2 能用状态反馈实现解耦的充分必要条件 …… 83
3.6 习题 …… 85

第 4 章 观测器和动态反馈 …… 87
4.1 观测器的结构 …… 87
4.2 观测器存在的基本定理 …… 88
4.3 观测器的设计方法 …… 89
4.3.1 全状态观测器 …… 89

4.3.2 降维观测器 …… 91
4.3.3 应用 MATLAB 设计观测器的程序 …… 93
4.4 带观测器的状态反馈控制器 …… 95
4.4.1 极点分离定理 …… 95
4.4.2 带有观测器的状态反馈控制器的传递函数阵 …… 96
4.4.3 观测器极点位置的确定 …… 97
4.5 动态反馈与动态补偿器的设计 …… 97
4.6 习题 …… 99

第 5 章 鲁棒控制 …… 101
5.1 鲁棒控制器 …… 101
5.2 鲁棒控制器存在的条件 …… 101
5.3 鲁棒控制器的一般结构 …… 102
5.4 鲁棒控制器的设计 …… 103
5.4.1 伺服补偿器的设计 …… 103
5.4.2 互补控制器的设计 …… 103
5.5 习题 …… 105

第 6 章 最优控制 …… 106
6.1 最优控制问题的提法 …… 106
6.1.1 最优控制问题的一般提法 …… 106
6.1.2 实现最优控制的必备条件 …… 107
6.1.3 几种典型的最优控制问题 …… 107
6.2 解无约束最优控制问题的变分法 …… 108
6.2.1 最简单的变分问题 …… 109
6.2.2 欧拉-拉格朗日方程 …… 109
6.2.3 可变端点问题 …… 112
6.2.4 推广到一般泛函 …… 115
6.2.5 推广到多变量的情况 …… 117
6.2.6 无约束最优控制问题的解 …… 118
6.3 最大值原理及其应用 …… 126
6.3.1 最大值原理 …… 126
6.3.2 最大值原理的其他形式 …… 130
6.4 应用举例 …… 131
6.5 习题 …… 136

第 7 章 线性二次型最优控制问题 …… 140
7.1 线性二次型问题的重要性 …… 140
7.1.1 什么是线性二次型问题 …… 140
7.1.2 研究线性二次型问题的重要性 …… 140
7.2 线性二次型问题的解 …… 142
7.3 非时变状态调节器 …… 146

7.3.1 非时变状态调节器的设计 …… 146
7.3.2 闭环系统的稳定性 …… 149
7.3.3 代数里卡蒂方程的解法 …… 150
7.3.4 设计非时变状态调节器的 MATLAB 程序 …… 153
7.3.5 非时变状态调节器的频率特性 …… 154
7.4 具有指定稳定度的最优调节器 …… 157
7.5 跟踪问题 …… 159
7.6 带有观测器的最优调节器 …… 160
7.7 习题 …… 162

第 8 章 离散时间系统的最优控制 …… 164
8.1 解离散时间无约束最优控制问题的变分法 …… 164
8.1.1 最简单的离散型变分问题 …… 164
8.1.2 自由端点问题 …… 165
8.1.3 推广到一般形式的变分问题 …… 166
8.1.4 推广到多变量问题 …… 167
8.1.5 解离散无约束最优控制问题的变分法 …… 167
8.2 离散的最大值原理 …… 170
8.3 离散的线性二次型问题 …… 173
8.3.1 离散的线性二次型问题的解 …… 173
8.3.2 解离散的线性二次型问题的 MATLAB 程序 …… 177
8.4 习题 …… 178

第 9 章 动态规划 …… 179
9.1 动态规划的基本思想 …… 179
9.1.1 多阶决策问题 …… 179
9.1.2 最优性原理 …… 181
9.2 动态规划的基本方程 …… 181
9.2.1 动态规划基本方程的推导 …… 181
9.2.2 应用动态规划的基本方程解最优控制问题 …… 183
9.2.3 应用动态规划解最优经济增长问题 …… 186
9.3 应用动态规划解一般线性二次型问题 …… 188
9.3.1 一般的离散时间线性二次型问题 …… 188
9.3.2 一维问题的解 …… 188
9.3.3 推广到多变量的情况 …… 193
9.3.4 应用 MATLAB 解离散的跟踪问题举例 …… 193
9.4 连续时间系统的动态规划法 …… 196
9.5 习题 …… 198

第 10 章 卡尔曼滤波与线性二次型高斯问题 …… 200
10.1 线性二次型高斯问题的提法 …… 200
10.2 卡尔曼滤波——最优线性递推滤波 …… 201

10.2.1 卡尔曼滤波 …… 201
10.2.2 稳态卡尔曼滤波器 …… 204
10.3 线性二次高斯问题的解 …… 206
10.4 习题 …… 210

附录 …… 211
附录 A 二次型的期望值的计算 …… 211
附录 B MATLAB 简介及本书使用的 MATLAB 程序 …… 211

参考文献 …… 223

第 1 章　控制系统导论

1.1　现代控制理论引论

控制理论是系统理论的一个分支，随着现代科学技术的发展，对控制的精度要求也越来越高，人们遇到的系统越来越复杂，各个领域的控制系统的复杂程度在不断提高。控制任务越来越复杂的主要原因是：需要处理多输入、多输出的问题、时变的问题和非线性的问题。研究这种控制系统的方法，通常是基于状态空间的方法。基于状态空间法的控制理论称为现代控制理论。而始于 20 世纪 30 年代，基于传递函数和频域技术，主要处理单输入、单输出的定常线性系统的问题的控制理论，则称之为经典控制理论。现代控制理论是在 20 世纪 50 年代末、60 年代初发展起来的。现代控制理论采用状态空间描述，不仅可以刻画系统的输入输出关系，而且还揭示了系统内部的特性，如能控性、能观测性等。经典控制理论，通常只反映了系统的输入输出关系，因而有它的局限性。在研究多变量系统时，虽然也采用描述输入输出关系的传递函数阵，但它只能反映系统的输入输出之间的外部关系，而不能确定系统的内部结构。具有完全相同的传递函数阵的系统可以有完全不同的内部结构，这说明传递函数阵没有完全揭示系统内部的动态特性。

除了上面讨论的处理时变线性系统和非线性系统的问题以外，状态空间法的另一个重要特点是，它提供了对控制系统进行分析与设计的系统化的方法，可以方便地使用向量-矩阵等有力的数学工具，并可使用计算机处理问题，对设计者的经验依赖较少。因此，现代控制理论不仅广泛应用于解决工程上提出的越来越复杂的的自动控制系统的分析与设计问题，还广泛应用于经济、生态、医学、交通等领域的一系列复杂问题的分析与控制（或决策），成为研究动态系统的重要工具。

对于某些很复杂的系统，可能很难建立它的状态方程，但有时可借助于系统的输入输出信号的测量，采用系统辨识的方法得到系统的传递函数，从而可以用经典的方法设计控制系统。也可以通过系统辨识得到近似的状态空间模型，用状态空间的方法进行分析与设计。

现代控制理论和经典控制理论的划分是历史上形成的，已沿用多年。现今基于状态空间的方法和基于传递函数的方法都有很大的发展，两者在发展的过程中互相补充、互相促进。本书仅限于向读者介绍基于状态空间法的主要成果。

在 50 年代末 60 年代初，科学家对现代控制理论的贡献主要有以下三个方面：

1）由卡尔曼（R.E.Kalman）提出的线性控制系统的状态空间方法及能控性和能观测性的概念，奠定了现代线性控制系统理论的基础，并提出了卡尔曼滤波，它在随机系统的分析与控制中得到了广泛的应用。

2）由庞特里亚金等人提出的最大值原理，深入地研究了最优控制问题。

3）由贝尔曼（R.Bellman）提出的动态规划，它广泛应用于各类最优控制问题。

从 20 世纪 50 年代末到现在已经过去了近半个世纪，在此期间现代控制理论得到了很大

的发展，并广泛应用于各种领域。尽管如此，现代控制理论的最重要的基础仍然是上面提到的三个方面。本书主要讲解这三个方面的基本内容，及其在多个领域中的应用。

控制理论在以上基础上的进一步发展是多种多样的，特别值得提出的是以下三个方面。

1）鲁棒控制。最优控制和卡尔曼滤波需要精确的数学模型和外部干扰的统计特征。一些实际系统有时不具备这些条件，鲁棒控制就是研究当模型有误差和有未知外部干扰时的控制问题。这方面的研究在实际应用中很重要。

2）复杂系统的控制。生物和医学系统的控制具有内在的复杂性，它们常常由若干互相关联的子系统构成。当通过对个子系统的模型的分析和各个子系统之间的关联关系不能很好地分析整个系统的行为时，将面临复杂系统的控制问题。

3）人-机系统。很多控制系统中存在人和机器的相互作用，当设计这样的系统时必须用一致的术语描述人和机器的行为，再对系统的控制进行研究。

一般地说，控制是影响动态系统的行为以达到预期目标的过程，或者说，控制是为实现一定目的进行的调节、操纵、管理指挥等活动，而控制系统则是能调节一个过程或装置完成一个控制任务的有组织的系统，它以某种要求的方式对能量流、信息流、货币流或其它量进行调节或控制。控制理论则是研究控制系统的分析与设计的有关问题。因此，控制系统广泛存在于各类动态系统之中，控制理论有极其广泛的应用。宋健教授在《自动化》杂志的发刊词中写了这样一段话来描述控制理论应用的广泛性："凡是能用定量方法描述的自然现象和社会现象，只要可能由人进行控制的，都可以用控制论的方法进行研究，并能得到人们预想不到的结果。"由于上述原因，现代控制理论不仅是自动化学科的基础，也是很多其他学科的基础。

本章以下的内容介绍了控制系统的状态和状态方程的基本知识，并讨论定常线性系统的状态方程与传递函数阵的关系。书中给出了常见于微分方程教材中的定常线性系统的动态响应，以及单位阶跃响应的 MATLAB 程序。最后介绍了几个最常见的控制系统的实例，包括宇航方面的、工程方面的、医学方面的、管理方面的和经济方面的实例。读者通过这些实例可以看到现代控制理论应用的广泛性。

1.2 控制系统的状态空间描述

1.2.1 控制系统的状态变量和状态方程

现代控制理论在研究实际控制系统时，首先要建立它的数学模型——状态方程和输出方程。下面先介绍状态的概念。

动态系统的状态是最小的一组变量，只要知道了这组变量在 $t = t_0$ 时刻的值和 $t \geqslant t_0$ 时刻的输入，就能完全确定系统在任何未来时刻 $t \geqslant t_0$ 的行为。这最小的一组变量称为该动态系统的状态。换句话说，系统的状态是为与 t_0 时刻以后的输入一起决定系统在 $t \geqslant t_0$ 时刻的未来行为需要知道的 t_0 时刻的最少的信息。如果系统的状态包含 n 个变量 x_1，x_2，…，x_n 则称该动态系统是 n 维系统。这 n 个变量写成列向量 $[x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$，称为该动态系统的状态向量。由 n 维状态向量 x 构成的向量空间称为该系统的状态空间。

在动态控制系统中，除状态变量以外还包含另外两种变量：输入变量和输出变量。动态控制系统所遵循的内在规律的数学描述是这个系统的数学模型，它常常是描述状态变量、输入变量和输出变量之间的内在关系的数学方程式。连续系统的数学模型常常是一个或一组一阶微分方程，它们称为动态控制系统的状态方程。

在动态控制系统中输入变量包含能对系统起调节控制作用的控制变量和外界干扰变量。

【例 1-1】 *RCL* 网络系统　如图 1-1 所示的 *RCL* 网络，图中 $v_c(t)$ 是电容两端的电压，$i_L(t)$ 是通过电感的电流，$y(t)$ 是电阻两端的电压，$u(t)$ 是加在网络上的电流。为建立这个网络的数学模型，依据电学中的基尔霍夫 (G.R.Kirchhoff) 定律，先写出下列方程：

$$i_c = C\dot{v}_c = u(t) - i_L$$

$$L\dot{i}_L = v_c - Ri_L$$

令 $x_1 = v_c$，$x_2 = i_L$，则上面两个方程化为：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}u\\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2\end{aligned}\right\} \tag{1-1}$$

系统的输出是电阻两端的电压

$$y(t) = Rx_2 \tag{1-2}$$

利用微分方程组 (1-1) 和变量 $x_1(t)$，$x_2(t)$ 的初始值 $x_1(t_0) = x_{10}$，$x_2(t_0) = x_{20}$，可以惟一确定系统未来的行为 $x_1(t)$，$x_2(t)$ 和系统的输出 $y(t)$。也就是说，如果已知 v_c 和 i_L 在 t_0 时刻的值，又知道 $u(t)$，$t \geqslant t_0$，那么，对任意 $t \geqslant t_0$ 时刻，$v_c(t)$ 和 $i_L(t)$ 都被惟一确定了，因此 $x_1 = v_c$，$x_2 = i_L$ 是 *RCL* 网络系统的两个状态变量，$x = [x_1 \quad x_2]^T$ 是该系统的状态向量，微分方程 (组) (1-1) 是该网络系统的状态方程 (组)，电阻两端的电压 $y(t)$，是可以测量的，称为该系统的输出变量，方程 (1-2) 为该网络系统的输出方程。电压 $u(t)$ 可以对状态变量 $x_1 = v_c$，$x_2 = i_L$ 起到控制作用，为该网络系统的控制变量。

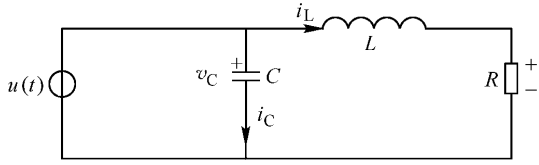


图 1-1　*RCL* 网络系统

(1-1) 和 (1-2) 写成向量-矩阵的形式为：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix}0 & -1/C\\ 1/L & -R/L\end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix}1/C\\ 0\end{bmatrix}u \tag{1-3}$$

$$\boldsymbol{y} = [0 \quad R]\boldsymbol{x} \tag{1-4}$$

一般电路网络的状态变量的个数是储能元件的个数 (如电容、电感等)，电路系统的状态变量常选为电容两端的电压和通过电感的电流。本例也可以选取电容两端的电压和电感两端的电压作为该系统的两个状态变量。

【例 1-2】　升降机系统　升降机系统是生产和生活中常见的一类系统，工业生产中的提升机和高层建筑的电梯都是这类系统。图 1-2 是升降机系统的示意图。设升降机的质量为 m，质心到地面的距离为 $x(t)$，升降机受牵引力 u 和重力 mg 的作用。依据牛顿第二定律，描述该系统的数学模型为

$$m\ddot{x} = u - mg$$

这样，一个动力学系统的状态完全由升降机的位置 x 和速度 $\dot{x}$ 决定。令 $x_1 = x$ (t)，$x_2 = \dot{x}$，则上述二阶微分方程可转化为如下的包含两个一阶微分方程的方程组：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{m}u - g \end{cases} \tag{1-5}$$

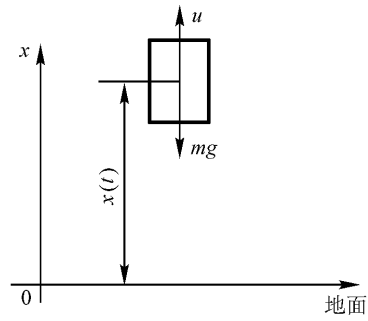


图 1-2　升降机系统

升降机的位置 $x_1 = x$ (t) 和速度 $x_2 = \dot{x}$ (t) 是该系统的状态变量，式 (1-5) 是该系统的状态方程。系统的输出方程为

$$y = x_1 \tag{1-6}$$

状态方程 (1-5) 和输出方程 (1-6) 构成了升降机系统的一种状态空间描述。

1.2.2　控制系统的状态流图模型

动态控制系统的一种常见的状态空间描述是状态流图。对系统建立状态流图是很有益的，利用它可以将状态变量与传递函数联系起来。如果我们已经知道了控制系统的状态方程，就可以画出该系统的状态流图。下面通过例 1-1 中的 RCL 网络系统来讲解如何由状态方程 (1-1) 和输出方程 (1-2) 画出描述该系统的状态流图。

设 U (s) 和 Y (s) 分别为 u (t) 和 y (t) 的拉普拉斯变换，由状态方程可以直接画出状态流图，见图 1-3。

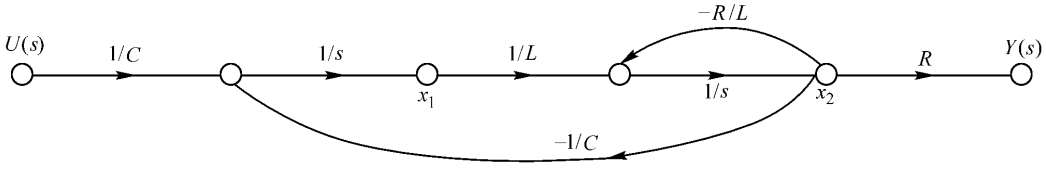


图 1-3　RCL 电路的状态流图

在图 1-3 中，$1/s$ 表示积分算子，出现在它的箭头后面的变量是出现在它的箭头前面的变量的时间导数。

依此方法可以画出对应于系统的状态方程的状态流图。如果通过简便的方法可以得到系统的传递函数，可以应用第 2 章中讲的方法先由系统的传递函数得到系统的一个状态空间表现，再由状态方程画出对应于系统的的状态流图。

1.2.3　线性控制系统和非线性控制系统的线性化

用微分方程描述的控制系统的一般形式为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)$$

式中，$\boldsymbol{x}$ 是 n 维状态向量；$\boldsymbol{u}$ 是 m 维控制向量；$\boldsymbol{y}$ 是 r 维输出向量。当 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 都是 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 的线性函数时，称为线性控制系统，否则称为非线性控制系统。线性控制系统的一般形式是

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u} \tag{1-7}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u} \tag{1-8}$$

式中，$\boldsymbol{A}$ (t)，$\boldsymbol{B}$ (t)，$\boldsymbol{C}$ (t)，$\boldsymbol{D}$ (t) 分别是 $n \times n$，$n \times m$，$r \times n$ 和 $r \times m$ 矩阵。线性控制系统具有很多优点，比较容易处理，因此，可以在一定精度范围内用线性模型近似时，

尽量采用近似的线性模型。

实际上，任何控制系统都具有一定的非线性成分，只是有不少系统的非线性影响不大，在一定的条件下可以近似地看作线性系统。一些非线性的影响较大，不能近似看作线性的系统，在一定的条件下也可以线性化。例如技术上可以将一个非线性系统在它的均衡点附近线性化。为了叙述简单，仅以二维非线性动态系统为例，并略去控制变量。设非线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,y)\\ \dot{y} &= g(x,y)\end{aligned}$$

在点 (x^0, y^0) 处，$f(x^0, y^0)=0$，$g(x^0, y^0)=0$ 成立，则称 (x^0, y^0) 是该系统的均衡状态。设函数 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 有连续的一阶偏导数，则在均衡状态 (x^0, y^0) 附近线性化的方法是：在均衡状态 (x^0, y^0) 附近做 Taylor 展开，取到一阶项，得到近似式

$$\begin{aligned}f(x,y) &= f(x^0,y^0) + f_x(x^0,y^0)(x-x^0) + f_y(x^0,y^0)(y-y^0)\\ &= f_x(x^0,y^0)(x-x^0) + f_y(x^0,y^0)(y-y^0)\\ g(x,y) &= g(x^0,y^0) + g_x(x^0,y^0)(x-x^0) + g_y(x^0,y^0)(y-y^0)\\ &= g_x(x^0,y^0)(x-x^0) + g_y(x^0,y^0)(y-y^0)\end{aligned}$$

由此得到近似的线性微分方程组

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_x(x^0,y^0)(x-x^0) + f_y(x^0,y^0)(y-y^0)\\ \dot{y} &= g_x(x^0,y^0)(x-x^0) + g_y(x^0,y^0)(y-y^0)\end{aligned}$$

在研究这个二维非线性动态系统在它的均衡状态附近的行为时，便可以用其近似的线性微分方程组代替，这样可以使问题的难度降低很多，研究的结果在工程上也容易应用。由于这一原因，线性系统的研究在控制理论及应用中占有非常重要的地位。下一节，将给出关于线性系统的动态响应的一些结果。

1.3 线性控制系统的动态响应

1.3.1 连续时间线性控制系统的动态响应

线性控制系统的动态响应在线性控制系统的分析与设计中非常重要，本节涉及的很多内容可以在一般微分方程的著作中找到，读者可参看文献 [1]、[2]，这些内容本节不再推证。

由式 (1-7)、(1-8) 描述的连续时间线性控制系统，如果初始状态 $x(t_0)$ 已给定，则对应输入 $u(t)$ 的动态响应 $y(t)$，可将微分方程式 (1-7) 的解代入式 (1-8) 算出。

初值问题

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0\end{cases} \tag{1-9}$$

的解为

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{1-10}$$

式中 $\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)$ 是式 (1-9) 的状态转移矩阵，它是下列矩阵微分方程组的初值问题的解：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t,t_0) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\\ \boldsymbol{\Phi}(t_0,t_0) = \boldsymbol{I}\end{cases} \tag{1-11}$$

状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)$ 具有如下性质：

(1) 可分离性 设 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是式 (1-9) 对应的齐次方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} \tag{1-12}$$

的一个基本解，即 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是以式 (1-12) 的 n 个线性无关解向量构成的矩阵，则

$$\boldsymbol{\Phi}(t, t_0) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0) \tag{1-13}$$

(2) 惟一性 式 (1-9) 的状态转移矩阵是唯一的。

(3) 传递性 对任意的 t_1，t_2，t_3 成立

$$\boldsymbol{\Phi}(t_1, t_2)\boldsymbol{\Phi}(t_2, t_3) = \boldsymbol{\Phi}(t_1, t_3) \tag{1-14}$$

(4) 可逆性 $\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)$ 可逆，并有

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t, t_0) = \boldsymbol{\Phi}(t_0, t) \tag{1-15}$$

由解式 (1-10)，得到线性控制系统 (1-7)、(1-8) 的输出响应为：

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{C}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t, \tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{1-16}$$

在线性控制系统 (1-7)、(1-8) 中，当输入为零并且 $\boldsymbol{D}=0$ 时，解式 (1-10) 化为

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t, t_0)\boldsymbol{x}_0 \tag{1-17}$$

那么

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)\boldsymbol{x}_0 \tag{1-18}$$

称为系统的初始条件响应或零输入响应。

当线性控制系统 (1-7)、(1-8) 中的矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$ 均为常数矩阵时，称为定常线性控制系统或非时变线性控制系统，其一般形式为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{1-19}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \tag{1-20}$$

由定常线性系统 (1-19)、(1-20)，可得

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-21}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t}\boldsymbol{C}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \tag{1-22}$$

式中 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 是矩阵指数。

1.3.2 连续时间线性控制系统的离散化

当应用数字计算机对线性控制系统进行控制时，控制 $\boldsymbol{u}(t)$ 是由计算机产生的，经数模转换后送到实际系统实施控制。计算机控制系统的框图见图 1-4。

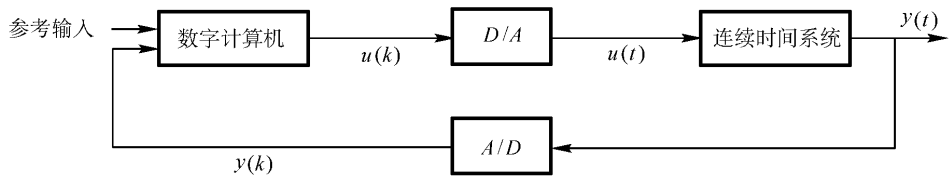


图 1-4 计算机控制系统

设计算机控制系统的采样周期为 T，那么在第 k 个时间周期内控制 $\boldsymbol{u}(t)$ 取常值，即在时间区间 $[kt, (k+1)T]$ 上，控制 $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}(kT)$。简记为 $\boldsymbol{u}(kT) = \boldsymbol{u}(k)$，$\boldsymbol{x}(kT) = \boldsymbol{x}(k)$，对 $t = t_{k+1} = (k+1)T$ 和 $t_0 = t_k = kT$ 应用解式 (1-10) 可得

第 2 章　控制系统的结构性质

控制系统的稳定性、能控性与能观测性是控制系统的结构本身固有的，称为控制系统的结构性质。稳定性、能控性与能观测性是控制系统三个非常重要的概念，它们在现代控制理论的很多论题的研究中起着重要的作用。稳定性是设计控制系统的基本要求，能控性与能观测性描述了控制系统的输入与状态的关系和输出与状态的关系。对于由矩阵组（A，B，C，D）代表的定常线性系统，如式（1-19）、式（1-20），矩阵对（C，A）描述了系统的输入为 0 时，系统的输出与状态的关系，矩阵对（A，B）描述了系统的输入与状态的关系。对于定常线性系统，简单地说，系统的稳定性研究当系统偏离均衡状态时，是否能随着时间的演化返回均衡状态的问题；系统的能控性研究是否存在一个控制 u，将任意初始状态在有限时间内转移到所希望的状态的问题，即状态能否被输入控制的问题。系统的能观测性是研究是否可由一段有限时间的输出决定系统的初始状态的问题，即初始状态能否被输出观测的问题。

2.1　动态系统的稳定性

2.1.1　稳定性的基本概念

控制系统的稳定性分析是很重要的。由微分方程描述的系统的稳定性在微分方程的教材中有详细的论述，本节介绍本书将用到的基本概念和结果。这里讨论的稳定性是李雅普诺夫意义下的稳定性，下面给出它的定义。

设 $\bar{x}$ 是动态系统

$$\dot{x} = f(x)$$

的均衡状态，即 $f(\bar{x}) = 0$。如果从 $\bar{x}$ 临近的任一点 x_0 出发的轨线总保持在 $\bar{x}$ 的临近，则称均衡状态是稳定的，否则称均衡状态是不稳定的。具体地说，一点 x_0 从 $\bar{x}$ 临近出发是指 x_0 位于以 $\bar{x}$ 为中心、半径为 δ 的小球 $S(\delta)$ 内，轨线总保持在 $\bar{x}$ 的临近是指轨线总保持在 $\bar{x}$ 为中心半径为 ε 的小球 $S(\varepsilon)$ 内，这里 $\varepsilon > \delta$，如图 2-1 所示。

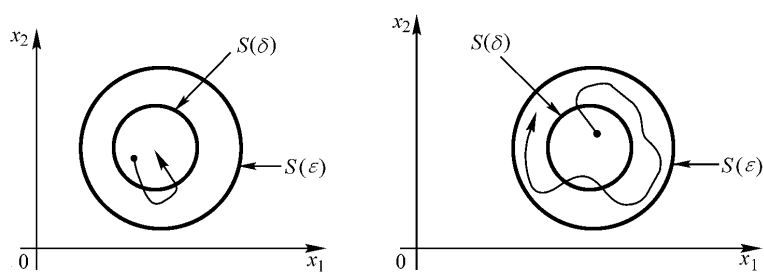


图 2-1　二维情况下的稳定性和渐近稳定性

注意这里没有要求系统的状态趋向均衡状态 $\bar{x}$。如果均衡状态是稳定的，并且当 $t \to \infty$