高等学校教材

现代控制理论

钟秋海摇编著

高等教育出版社

内容简介

本书从工程实用的角度向读者介绍现代控制理论的五大部分：线性系统理论（状态空间分析方法、李亚普诺夫稳定性分析、状态反馈与极点配置）、最优控制理论（变分法、极大值原理和动态规划）、最优估计理论（最小方差、极大验后、极大似然、线性最小方差、最小二乘估计和卡尔曼滤波）、系统辨识方法（直接法、相关法、递推最小二乘法、辅助变量法、广义最小二乘法、增广矩阵法和多步最小二乘法）和自适应控制理论（模型参考自适应、自校正自适应）。为了便于学习，书后安排了附录一、常用 [illegible] 命令及其示例及附录二、矩阵运算与概率统计。

本书是作者在多年教学实践与科研的基础上，通过总结提高编写成的，尽可能做到理论紧密联系实际。为便于读者掌握，除了列举丰富的例子以外，还在各章后选配了适量的练习题。本书读者对象为大学本科生、研究生以及各行业对控制理论感兴趣的科技工作者、工程技术人员。

摇图书在版编目（悦[illegible]）数据

摇现代控制理论 辕钟秋海编著援—北京：高等教育出版社，[illegible]
摇[illegible]

摇Ⅰ援现…摇Ⅱ援钟…摇Ⅲ援现代控制理论 原高等学校 原教材摇Ⅳ援[illegible]

摇中国版本图书馆 悦[illegible]数据核字（[illegible]）第 [illegible]

出版发行摇高等教育出版社
社摇摇址摇北京市西城区德外大街 [illegible]号
邮政编码摇[illegible]
总摇摇机摇[illegible]

购书热线摇[illegible]
免费咨询摇[illegible]
网摇摇址摇[illegible]
摇摇摇摇[illegible]

经摇摇销摇新华书店北京发行所
印摇摇刷摇

开摇摇本摇[illegible]
印摇摇张摇[illegible]
字摇摇数摇[illegible]

版摇摇次摇摇摇年摇月第 [illegible]版
印摇摇次摇摇摇年摇月第[illegible]次印刷
定摇摇价摇[illegible]元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。
版权所有摇侵权必究

物料号：[illegible]

策划编辑摇金春英

责任编辑摇李葛平

封面设计摇于文燕

责任绘图摇朱摇静

版式设计摇范晓红

责任校对摇殷摇然

责任印制摇摇摇摇

前　言

控制理论是一门非常活跃和不断拓展的学科。控制理论以数学、工程学及计算机科学为基础，它从一开始就是一门交叉学科。利用这些学科，控制理论将其强有力的理论结果建立在先进技术之上。同时，它作为控制系统工程的基础，成为自动化、计算机和机器人等一切新技术产业革命的核心。控制理论的应用成果遍及整个社会的各个方面，其中包括人们的日常生活。我们国家要实现四个现代化，其基础就是要全面提高工业、农业、国防自动化的水平。所以，当前的科学和技术环境向控制理论提出了前所未有的挑战和发展的机会。

为了迎接挑战，给不同行业的工程技术人员、高校本科生、研究生开拓自己的专业范围，便于他们学习现代控制理论，本书一方面注重基本概念的阐述，另一方面还给每章配以适量的习题供学习参考，便于读者自学、自检。因此，有一定数学基础的工程技术人员都可以阅读和自学本书内容。

本书主要包括：（一）线性系统理论（即状态空间分析方法，第二、三章），（二）最优控制理论（第四章），（三）最优估计理论（第五章），（四）系统辨识理论（第六章），（五）自适应控制（第七章）等五大部分。本书后面附录介绍了常用 MATLAB 命令及其示例和相关数学知识，方便读者使用参考。本书由浅入深，力求从工程角度出发，注重物理概念的叙述，配以适当数量的工程应用实例，以达到理论与实践的紧密结合。

本书承蒙北京航空航天大学秦世引教授仔细审稿，并提出了建设性的意见，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免有错误和不妥之处，敬请读者批评指正。

钟秋海

2006 年 6 月

目　　录

第一章摇概论 …… 员
第一节摇控制理论的发展 …… 员
第二节摇现代控制理论的基本内容 …… 猿
第二章摇状态空间分析方法 …… 愿
第一节摇系统的状态空间表达式 …… 愿
第二节摇状态空间表达式的解 …… 源员
第三节摇线性连续系统状态空间表达式的离散化 …… 缘怨
第四节摇线性系统的能控性与能观性 …… 苑猿
第五节摇线性系统的结构分解 …… 怨愿
第六节摇状态反馈与极点配置 …… 员员员
第七节摇状态观测器 …… 员员苑
习题 …… 员员愿
第三章摇李亚普诺夫稳定性分析 …… 员员愿
第一节摇李亚普诺夫稳定性定理 …… 员员愿
第二节摇李亚普诺夫方法在线性系统中的应用 …… 员猿源
第三节摇李亚普诺夫方法在非线性系统中的应用 …… 员猿怨
第四节摇李亚普诺夫方法的其他应用 …… 员源苑
习题 …… 员缘员
第四章摇最优控制 …… 员缘猿
第一节摇最优控制问题的数学描述 …… 员缘猿
第二节摇最优控制中的变分法 …… 员缘远
第三节摇连续系统的最优控制 …… 员远员
第四节摇离散系统的最优控制 …… 员愿怨
习题 …… 员怨员
第五章摇随机最优估计 …… 员怨远
第一节摇随机系统的有关基础知识 …… 员怨愿
第二节摇基本估计方法 …… 员愿怨
第三节摇基本离散线性系统的 运蓬蔡滤波 …… 员怨怨
第四节摇一般离散线性系统的 运蓬蔡滤波 …… 猿员员
第五节摇有色噪声情况下离散线性系统的 运蓬蔡滤波 …… 猿员怨
第六节摇连续线性系统的 运蓬蔡滤波 …… 猿猿远

第七节摇运营基础滤波的稳定性和误差分析 …… 猿源苑
第八节摇运营基础滤波与最优控制的关系 …… 猿愿缘
习题 …… 猿愿愿
第六章摇系统辨识 …… 猿员员
第一节摇系统辨识的基本概念 …… 猿员员
第二节摇非参数模型的辨识方法 …… 猿员远
第三节摇参数模型的辨识方法 …… 猿圆源
第四节摇带相关噪声动态参数模型的辨识 …… 猿缘缘
第五节摇模型阶的辨识 …… 源园缘
习题 …… 源园怨
第七章摇自适应控制系统 …… 源园愿
第一节摇自适应控制的基本概念 …… 源园愿
第二节摇模型参考自适应控制 …… 源员远
第三节摇自校正自适应控制 …… 源圆员
习题 …… 源猿愿
附录一摇常用 酝耘罗耘遭造命令及其示例 …… 源源源
附录二摇矩阵运算与概率统计 …… 源缘苑
参考文献 …… 源缘愿

第一章摇概摇摇论

第一节摇控制理论的发展

我们的祖先是自动控制技术最早的发明者和应用者。[illegible]多年前,我国北宋时代的苏颂和韩公廉发明的水运仪象台,就是采用了天衡、天关、枢衡等机构组成的按反馈原理工作的闭环控制系统,它能在各种情况下保持枢轮转速恒定。这比 [illegible]年俄国 Ползунов 的锅炉水位调节器和 [illegible]年英国瓦特的蒸汽机转速调节器要早 [illegible]年左右。而按扰动补偿原理工作的、实行开环控制的指南车,则是 [illegible]多年前西汉时期发明的。

但是,控制理论作为一门独立的学科在世界上出现,则是 [illegible]世纪 [illegible]年代的事。美国学者维纳([illegible])对控制理论作出了开创性的贡献。他的有关控制论([illegible])是关于生物系统和机器系统中控制和通信科学的思想,为控制论提供了一个框架,按这一框架,控制与信息问题可以纳入统一的形态来考虑。维纳还发展了在噪声存在的情况下对信号进行滤波、预测和平滑的一种方法。利用当时有关平稳随机过程的理论结果,提出了伯德 原申农([illegible])的信息概念。

由于军事技术和生产发展的需要,要求解决工程实践中的许多问题,要求设计的系统是稳定的,过渡过程要快,稳态精度要高。一般处理的系统是单变量的,描述系统的数学模型是微分方程或传递函数,在此基础上提出了许多分析系统品质和设计系统的方法。其中主要是频率法、根轨迹法、相平面法等。

控制理论发展的一个重要阶段始于二次大战之后瓦尔德([illegible])的序列分析与贝尔曼([illegible])的动态规划的提出。这些理论的产生是由最优统计决策问题以及序列规划式资源分配问题所推动的。动态优化问题的核心是解最优性能的动态规划方程,方程一旦解出,则优化反馈控制规律即可确定。不等式约束下的线性规划与非线性规划也在此时取得了进展。在为数字计算机设计的数值计算方法方面也取得很大进展,为计算机的发展和控制理论的发展奠定了坚实的基础。

员

前苏联工程师在 圆园世纪 缘园年代开始对最优暂态问题的研究感兴趣。在这些研究的基础上,庞特里亚金(Понтрягин)提出了关于系统最优轨道的极大值原理。极大值原理开创了在状态与控制都存在约束的条件下,利用不连续控制函数系统地研究最优轨道的方法。它又揭示了与变分法的深刻联系,并刺激了更为抽象的优化问题的理论研究,对非线性泛函分析有重大影响。极大值原理最有意义的贡献是它在 圆园世纪 远园年代推动了最优轨道数值方法的大规模研究工作,终于导致许多空间项目的轨道的设计成功,其中包括阿波罗航天飞机计划的实现。

圆园世纪 缘园年代后期控制理论的另一个里程碑是卡尔曼(远藏藏藏藏藏)或称远藏藏藏藏藏藏藏滤波器的发明。维纳早期的滤波器设计理论受到一些假设条件的限制,要求随机过程是平稳的,并要解一个维纳 原霍甫积分方程或对傅里叶变换进行因式分解。而卡尔曼滤波器没有这些麻烦,而且可以用递推算法在小型计算机上实现。根据对偶性原理,一个线性反馈控制器设计可以等价地描述成滤波器的设计。这些思想在世界范围内产生巨大的冲击,大大地推进了反馈控制与滤波的研究并产生了许多应用。以卡尔曼滤波器为基础的一种计算方法在阿波罗飞船的船上计算机中得到了实现,用于空间飞行任务的轨道修正。

控制理论的这些成就吸引了许多有志者、特别是数学家们参加理论研究,他们将许多新的研究工具引入,导致了控制理论在 圆园世纪 远园年代末到 苑园年代迅速拓广并变得多样化。其中较活跃的分支是线性系统理论。随着能控性、能观测性、标准型、状态空间实现以及线性二次型高斯(藏藏藏藏)调节器问题等概念的引入,使之成为线性系统理论整体发展的概念性基础。线性系统理论已成为向非线性系统和分布参数系统拓广的模式及控制理论所有新成果的检验基础。线性系统的几何方法在以数值分析作为工具支持下产生了许多重要的新概念,诸如极大不变子空间与极大能控性子空间、干扰解耦、非交互作用控制以及对高增益反馈系统优化的渐近分析等。圆园世纪 远园年代末和 苑园年代初,线性二次型理论在向无穷维系统推广之中取得了进展。从微分几何、李代数和非线性动力学中把若干方法引入到非线性常微分方程所描述的系统的反馈控制研究中,使得反馈线性化和非线性解耦问题获得解决,用非线性动力学方法已将反馈稳定化的作用推广到不能进行反馈线性化的若干非线性系统类。凸分析在运筹学中提供通向数学规划与数值分析的桥梁。凸分析在 圆园世纪 苑园年代初已扩展为“ 非光滑分析 ”,后者已为长期未获解决的一些最优控制问题提供了结果。概率论使得随机控制与滤波理论得以建立。非线性滤波的研究工作已使卡尔曼滤波器得到不断扩展,并注入许多新思想。最优控制问题的随机形式在 圆园世纪 愿园年代引起数学家们的很大兴趣,这一领域是最活跃的领域之一。

圆

□□世纪□□年代以前主要是频率法占据控制理论的舞台，而后代之以状态空间法。到了□□世纪□□年代，以输入、输出或频域分析为基础的设计方法再次兴盛起来，与状态空间法并驾齐驱。□□世纪□□年代控制理论在向鲁棒控制和与计算机科学更紧密联系、结合的方向发展，产生了智能控制、人工智能专家系统等研究方向。频率法看来很适合鲁棒控制的研究，因为它允许所有稳定控制器的参数化，并能选取到一个参数在所有的频率上使性能得到满足。鲁棒控制的 □□法是□□世纪□□年代控制理论的成就之一。与计算机的结合产生离散事件系统理论，将来可以作为对计算机系统性能评估的建模工具。自适应控制理论在进一步发展，同时更广泛、深入地将自适应控制应用于工程实践中去。总之，控制理论在□□世纪□□年代的研究活动仍然非常活跃和多样化，有许多工程实际问题及理论问题有待解决。

第二节□现代控制理论的基本内容

如前所述，□□世纪□□年代后提出的□□□□□的动态规划、庞特里亚金提出的极大值原理和卡尔曼提出的最优递推滤波是控制理论发展的三个重要里程碑，它标志着控制理论一个新阶段的开始。在此之前，控制理论主要内容是依据系统输入输出特性分析的频率法、根轨迹法及相平面法；在此之后，控制理论主要内容就是基于系统内部描述的状态方程进行时域分析的状态空间方法、最优控制、最优滤波、系统辨识和自适应控制等。通常称前者为经典控制理论，后者为现代控制理论。

现代控制理论主要有以下几大部分：

一、线性系统理论

线性系统理论是现代控制理论中最基本的组成部分，也是比较成熟的部分。要分析系统的特性，首先要建立系统的数学模型。经典控制论中用微分方程、传递函数和频率特性来描述，而这里则是用状态方程来描述。状态方程不但描述了系统的输入输出关系，而且描述了系统内部一些状态变量的随时间变化关系。如何建立系统的状态方程，由状态方程如何分析系统的响应特性？系统的稳定性如何？系统状态变量的能控性与能观测性又如何？系统的性能指标不满足要求时，如何利用状态反馈来改善系统的性能使之适合人们的需要？如果状态变量不能直接得到，如何根据对系统的观测量来重构系统的状态，设计状态观测器？等等，都是线性系统理论要解决的主要问题。由于这些分析综合系统的方法都是建立在对系统状态方程的分析上，或者说这些方法是研究在由这些状态变量所构成的状态空间中对状态轨线如何起作用的，所以这些方法也称为状态

空间分析方法。

二、系统辨识

这是现代控制理论中一个很活跃的分支。所谓系统辨识，就是通过观测一个系统或一个过程的输入、输出关系来确定其数学模型的方法。在许多实际系统中，由于根据物理化学定律而推导建立起来的所谓机理模型一般都比较复杂，用它不便于寻求一个最优控制方案。或者由于没有足够的有关系统及其环境的先验知识，因而无法对其设计一个最优控制，因此，面临的首要问题就是通过实验量测系统的输入、输出，从中找出一个既简单又能最恰当地描述该系统特征的数学模型，这样才便于实现最优控制或自适应控制。系统辨识理论不但广泛用于工业、国防、农业和交通等工程控制系统中，而且还应用于计量经济学、社会学、生理学、生物医学和生态学等领域。如对于人 原机器 原环境系统中人的性能、瞳孔和肌肉的控制功能、新陈代谢以及脑电波等，已经获得了很成功的模型。

系统辨识包括结构辨识和参数辨识两大部分。如果对于某系统，其结构（模型类及其阶数）和参数均未知，这类问题称为黑箱问题或完全辨识问题。若系统的结构已知，只是某些参数未知，这类问题称为灰箱问题或部分辨识问题。我们在实际工程中所遇到的辨识问题大多属于灰箱问题。

三、最优控制

最优控制是现代控制理论中一个重要的组成部分。最优控制问题是在已知系统的状态方程、初始条件以及某些约束条件下，寻求一个最优控制向量，使系统的状态或输出在控制向量作用下满足某种最佳准则或使某一指标泛函达到最优值。解决最优控制问题的方法有变分法、庞特里亚金的极大值原理和贝尔曼的动态规划方法等。

由于数字电子计算机和计算数学的迅速发展，使最优控制理论如虎添翼。两者的结合使最优控制成为切实可行。最优控制的应用范围已远远超过了一般理解的工程技术领域，而深入到工业设计、生产管理、经济计划、资源规划和生态保护等领域。凡是作为一个多步决策过程的最优化问题，往往都能转化成用离散型动态规划或最大值原理来求解。

比较典型的一个例子就是宇宙飞船要求在月球表面软着陆（即到月球表面时，速度为零，不能撞击），同时又要求所消耗的燃料最少，问飞船发动机推力怎贼应如何变化才能达到要求？这个问题就可以表述为如下的一个最优控制问题。设飞船质量为 皂（贼，高度为 澡贼，垂直速度为 增贼，发动机推力为 怎贼，重力加速度为 早，不带燃料的飞船质量为 酝，初始燃料总质量为 晕，初始高度为 澡$_0$，初始速度为 增$_0$，建立飞船的运动方程，为

源

$$\frac{\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}}{\text{d}\text{d}\text{d}} \text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}$$

$$\frac{\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}}{\text{d}\text{d}\text{d}} \text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}$$

$$\frac{\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}}{\text{d}\text{d}\text{d}} \text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}$$

其中 运为推力比例常数。方程的初始条件为 澡园 越晕,增园 越曾,皂(园 越转垣晕。如果假设经过 栽时间飞船在月球着陆,则终点条件为 澡栽 越园,增栽 越园。实际的发动机推力不可能无限大,而是有限制的,即应满足

$$园 \leqslant \text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d} \leqslant \alpha$$

限制条件下,寻求 怎(贼)的变化规律,使性能指标

$$允 \text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}$$

取极大值,也就是所消耗的燃料最少。

实际问题中的指标要求往往可以用“多、快、好、省”来表达。如“多”可指产量高;“快”可指时间短、投产快;“好”可指产品质量好、精度高等;“省”可指能源、材料消耗少,等等。只要把实际问题中的数学模型建立起来,约束条件和指标要求用数学表达式表达出来,经过一定的变换就可以化为最优控制理论可解的问题。因此,使最优控制理论得到最广泛的使用。

四、最优估计

最优估计也是现代控制理论的一个重要分支。在通信工程中,接收到的信号总是由有用信号和干扰噪声混合组成的。

$$\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}$$

希望从接收信号 赠(贼)中分离出有用信号 杂(贼),就要用到最优估计,即由赠(贼)求杂(贼)的估计 $\hat{杂}$(贼)。

验后数据处理也要用到最优估计。例如由地面跟踪系统和遥测系统观测记录了飞船或卫星的飞行参数 赠(贼),它是飞行的状态 载(贼)的函数,其中还有干扰噪声。需根据 赠(贼)估计出飞行器状态 $\hat{载}$(贼),以评价导航系统的精度。

为了实现对随机系统的最优控制,首先就需要求出系统状态的最优估计。因为常常是状态信息不能直接得到,而是通过对状态的观测 赠(贼)来求得状态的最优估计 $\hat{载}$(贼),然后再由最优控制理论求得由状态 $\hat{载}$(贼)反馈所构成的最优控制 怎(贼),系统方程为

$$\hat{载}(\text{d}\text{d}\text{d}) \text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}$$

$$再(\text{d}\text{d}\text{d}) \text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}\text{d}$$

其中 宰(贼,灾(贼为干扰噪声,系统方框图如图 员原员所示。

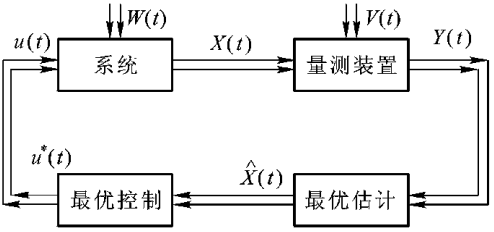


图 员原员遥最优估计与最优控制的方框图

解决最优估计最有效的方法是 运[illegible]滤波。

五、自适应控制

自适应控制也是现代控制理论中近年来发展比较快的一个活跃的分支。对于控制对象的结构或参数会随环境条件的变化而有大的变化的情况,为了保证控制系统在整个控制过程中都满足某一最优准则,那么最优控制器的参数就需要随时加以调节变化才行。换句话说,控制器的参数要适应环境条件的变化而自动地调整其参数,使得整个系统仍然满足最优准则。因此,这类控制系统称为自适应控制系统。

自适应控制一般分为两大类:一类称为模型参考自适应控制([illegible]);另一类称为自校正自适应控制([illegible])。它们的原理框图分别如图 员原圆 葬、(遭所示。模型参考自适应控制系统中有一个理想的参考模型,命令信号输入到实际系统和参考模型。参考模型的理想输出 赠(贼与实际系统的输出 赠贼之间的误差 藻贼及被控对象输入 怎贼输出 赠贼用来设计最优校正,然后将控制器的参数作相应调整,使系统的实际输出 赠贼跟上理想输出 赠(贼,消除误差 藻贼。而自校正自适应控制系统则是随时根据被控对象的输入输出辨识出被控对象的参数向量 θ,根据现时对象的参数和目标函数,即时求出最优控制器参数,然后将原控制器的参数作相应调整。这种方法是一面辨识系统的参数,一面计算最优控制,然后校正控制器参数。它把系统辨识和最优控制有机地结合起来了。

自适应控制最初应用在飞机的自动驾驶仪上,后来在导弹、火箭和航天技术方面得到优先使用。随着计算机技术的发展,自适应控制已广泛用于化工、冶金和电力系统自动化的控制上。可以预料,自适应控制将会更加广泛地应用到社会生产和人类生活的各个方面。

现代控制理论除了以上几大部分以外,还有分布参数系统理论、微分对策理论、大系统理论及可靠性理论等,新近发展起来的智能控制和鲁棒控制以及离散

事件系统理论表现出很强的生命力。随着科学技术的发展和学科的相互渗透，还会不断提出新的控制理论。

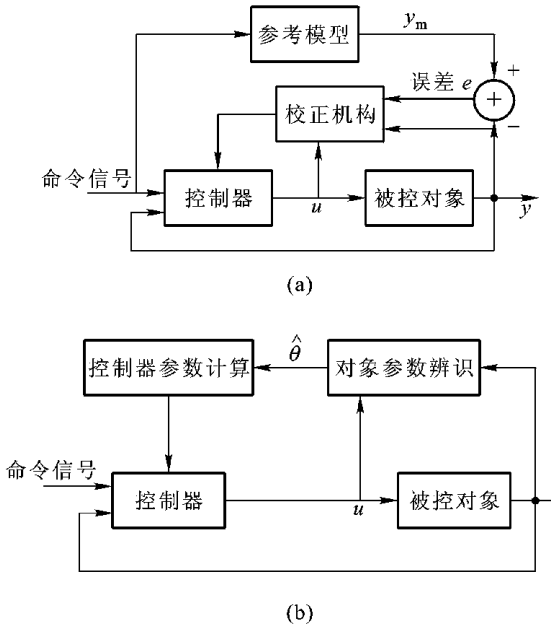


图 员原圆猿 自校正自适应控制

第二章摇状态空间分析方法

在古典控制理论中，主要考察系统输出与输入的关系，因而整个理论是基于传递函数来分析与设计系统的。而传递函数是从系统的外部观察系统时得出的系统数学模型的一种描述，不涉及系统内部的动态过程，因而传递函数被称为系统的外部描述模型。从能否完全揭示系统的全部运动状态来论，传递函数显然有其不足之处。

在现代控制理论中，系统是用一组状态变量构成的一阶微分方程组来描述的，这组状态变量能够表达系统内部运动的全部动态过程，因而它能更深刻地刻画系统的特征。由于系统的状态空间描述不但能反映系统外部的行为，而且能揭示系统内部的运动规律，所以它被称为系统的内部描述模型。由于状态空间方法可以很方便地处理初始条件，又可以适用于非线性系统、多输入多输出系统、时变系统、随机系统和离散系统，同时又可以很方便地用计算机求解，所以它很快就发展起来，并得到广泛的应用。

第一节摇系统的状态空间表达式

一、基本概念

状态与状态空间的概念并不是什么新东西，它是 [illegible] 等人在 [illegible] 世纪 [illegible] 年代末将古典力学中的广义坐标推广到控制系统分析中来的。我们知道，对于一个不受约束的质点系 则(曾贵,赠贵,扎贵)，则(曾圆,赠圆,扎圆)，…，则(曾越,赠越,扎越)，它有 猿越个独立坐标 曾贵,赠贵,扎贵,曾圆,赠圆,扎圆,…,曾越,赠越,扎越。若该质点系有 泽个约束条件，约束方程为

枣(曾贵,赠贵,扎贵,…,曾越,赠越,扎越) 越园摇蚤越员圆猿…，泽

那么，独立坐标就变成(猿越原泽 越噪个，我们可以用一组线性无关的变量 择贵,择圆,…,择噪来表示 曾贵,赠贵,扎贵,…,曾越,赠越,扎越。这些 择贵,择圆,…,择噪就称为广义坐标，其数目等于质点系的自由度。每个自由度上可以用力学定律列出一个二阶微分方程，而二阶微分方程又可以化为两个一阶微分方程，因而 噪个自由度的质点系就有圆噪个线性无关的一阶微分方程组来描述它，这 圆噪个变量就是所谓的状态。

愿

什么叫状态？系统的状态是表示系统过去、现在、将来运动状态的、数量最小的一组变量。只要知道了系统在 贼=贼圆时刻的这组变量和 贼≥贼圆时刻的系统输入作用，就完全能够确定系统在 贼≥贼圆时刻上的运动状态。如质点作直线运动，描述它的状态就只要位置和速度，在平面上的质点运动则要四个状态来描述，而空间质点运动则需六个状态。能够完全确定系统状态的最小一组变量称为状态变量，如 曾员(贼，曾圆(贼，…，曾灶(贼。在任何时刻 贼=贼圆，状态变量的值就是该时刻系统的状态，如 曾员(贼圆)，曾圆(贼圆)，…，曾灶(贼圆)。

若完全描述一个给定系统的动态行为需要 灶个状态变量 曾员(贼，曾圆(贼，…，曾灶(贼，那么由这 灶个状态变量作为分量的向量 载(贼)称为系统的状态向量，即

$$载(贼)=\begin{bmatrix} 曾_1(贼) \\ 曾_2(贼) \\ \vdots \\ 曾_n(贼) \end{bmatrix}$$

摇摇状态空间摇以各状态变量 曾员(贼，曾圆(贼，…，曾灶(贼为坐标轴所构成的 灶维空间称为状态空间。系统在任意时刻的状态都可用状态空间中的一点来表示。因此，状态随时间变化就在状态空间描绘出一条曲线，该曲线称为状态轨线。

状态方程摇描述系统状态变量与系统输入作用之间相互关系的一阶微分（或差分）方程组称为系统的状态方程。描述系统的输出量与状态变量、系统输入量之间相互关系的方程组称为输出方程（或称观测方程、量测方程）。系统的状态方程和输出方程（观测方程）统称为系统的状态空间表达式。

如何选取一个系统的状态变量，得出系统的状态空间表达式，其方法和结果是不唯一的。下面举几个例子来说明。

例 圆原-摇如图 圆原-所示一个由质块、弹簧和阻尼器组成的机械系统，外作用力 云圆作用在质块 皂上，弹簧的刚度为 噪，阻尼器的阻尼系数为 ρ，其外壳有一速度 增圆，质块与地面可视为光滑的无摩擦。设质块的位移为 曾，根据牛顿定律可列出系统的动态方程为

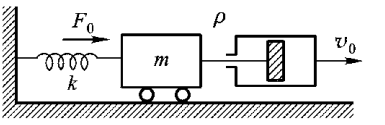


图 圆原-摇质块、弹簧、阻尼器系统

$$皂曾越云圆原噪曾垣\rho(增圆原曾$$

或改写为

$$皂曾垣\rho曾垣噪曾越云圆垣\rho增圆$$

把 云圆和 增圆看作系统的两个输入，位移 曾作为系统输出，则可得到系统输出对各输入的传递函数

$$\frac{载(泽)}{云圆(泽)}越\frac{员}{皂泽^{圆}垣\rho泽垣噪}$$

怨

$$\frac{载(泽}{灾_{园}(泽} 越 \frac{\rho}{皂_{泽}垣_{\rho}泽回噪}$$

若选择状态变量 $曾_{员}$越$曾$，$曾_{圆}$越$曾$，令输入 $云_{园}$越$怎_{员}$，增越$怎_{圆}$，则有

$$\begin{cases} 曾_{员} 越 曾_{圆} \\ 曾_{圆} 越原\frac{噪}{皂}曾_{员} 原\frac{\rho}{皂}曾_{圆} 垣\frac{员}{皂}怎_{员} 垣\frac{\rho}{皂}怎_{圆} \end{cases}$$

即得状态方程为

$$\begin{bmatrix} 曾_{员} \\ 曾_{圆} \end{bmatrix} 越 \begin{bmatrix} 园 & 员 \\ 原\frac{噪}{皂} & 原\frac{\rho}{皂} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 曾_{员} \\ 曾_{圆} \end{bmatrix} 垣 \begin{bmatrix} 园 & 园 \\ 员 & \rho \\ 皂 & 皂 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 怎_{员} \\ 怎_{圆} \end{bmatrix}$$

若系统输出用 赠表示，则输出方程为

$$赠越曾_{员} 越[员 摇园] \begin{bmatrix} 曾_{员} \\ 曾_{圆} \end{bmatrix}$$

摇摇例 圆原圆摇如图 圆原圆所示的 砸黔电路，怎贼为输入电压，怎$_{悦}$(贼为输出电压。根据基尔霍夫定律可以写出该电路的回路方程为

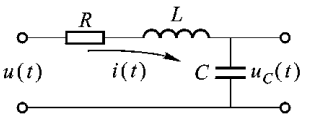


图 圆原圆摇 砸黔电路

$$怎贼 越砸\cdot 蚕贼 垣缮\frac{凿蚕贼}{凿贼} 垣怎_{悦}(贼$$

$$怎_{悦}(贼 越\frac{员}{悦}\int 蚕贼凿贼$$

很容易得到输出 怎$_{悦}$(贼对输入 怎贼的传递函数为

$$\frac{哉_{悦}(泽}{哉(泽} 越 \frac{员}{缮黔_{泽}垣砸凿_{泽}垣员}$$

摇摇由电路理论可知，如果电流 蚕贼和电容电压 怎$_{悦}$(贼的初始值 蚕$_{园}$、怎$_{悦园}$以及 贼 $=$ 贼$_{园}$时的输入电压 怎贼已知，则 贼 $=$ 贼$_{园}$时电路的状态就完全可由 蚕贼，怎$_{悦}$(贼确定，因此 蚕贼，怎$_{悦}$(贼可作为该电路的一组状态变量，即令

$$曾_{员}(贼 越蚕贼$$

$$曾_{圆}(贼 越怎_{悦}(贼 越\frac{员}{悦}\int 蚕贼凿贼$$

可得

$$\begin{cases} 曾_{员}(贼 越原\frac{砸}{缮}曾_{员}(贼 原\frac{员}{缮}曾_{圆}(贼 垣\frac{员}{缮}怎贼 \\ 曾_{圆}(贼 越\frac{员}{悦}曾_{员}(贼 \end{cases}$$

写成矩阵形式

$$员园$$

$$\begin{bmatrix} \text{會}_{\text{員}}(\text{贼}) \\ \text{會}_{\text{圓}}(\text{贼}) \end{bmatrix} \text{越} \begin{bmatrix} \text{原}\frac{\text{砸}}{\text{蕴}} & \text{原}\frac{\text{员}}{\text{蕴}} \\ \frac{\text{员}}{\text{悦}} & \text{园} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{會}_{\text{員}}(\text{贼}) \\ \text{會}_{\text{圓}}(\text{贼}) \end{bmatrix} \text{垣} \begin{bmatrix} \frac{\text{员}}{\text{蕴}} \\ \text{园} \end{bmatrix} \text{怎贼}$$

系统的输出为

$$\text{赠贼 越怎}_{\text{悦}}(\text{贼 越會}_{\text{圓}}(\text{贼 越}[\text{园摇员} \begin{bmatrix} \text{會}_{\text{員}}(\text{贼} \\ \text{會}_{\text{圓}}(\text{贼} \end{bmatrix}$$

摇摇若选择 怎$_{\text{悦}}$(贼和 怎$_{\text{悦}}$(贼 作为两个状态变量，即令 會$_{\text{員}}$(贼 越怎$_{\text{悦}}$(贼，會$_{\text{圓}}$(贼 越$\frac{\text{怎}_{\text{悦}}(\text{贼}}{\text{凿贼}}$，则可得

$$\begin{cases} \text{會}_{\text{員}}(\text{贼 越會}_{\text{圓}}(\text{贼} \\ \text{會}_{\text{圓}}(\text{贼 越原}\frac{\text{员}}{\text{蕴悦}}\text{會}_{\text{員}}(\text{贼 原}\frac{\text{砸}}{\text{蕴}}\text{會}_{\text{圓}}(\text{贼 垣}\frac{\text{员}}{\text{蕴悦}}\text{怎贼} \end{cases}$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \text{會}_{\text{員}}(\text{贼} \\ \text{會}_{\text{圓}}(\text{贼} \end{bmatrix} \text{越} \begin{bmatrix} \text{园} & \text{员} \\ \text{原}\frac{\text{员}}{\text{蕴悦}} & \text{原}\frac{\text{砸}}{\text{蕴}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{會}_{\text{員}}(\text{贼} \\ \text{會}_{\text{圓}}(\text{贼} \end{bmatrix} \text{垣} \begin{bmatrix} \text{园} \\ \frac{\text{员}}{\text{蕴悦}} \end{bmatrix} \text{怎贼}$$

输出方程则为

$$\text{赠贼 越怎}_{\text{悦}}(\text{贼 越}[\text{员摇园} \begin{bmatrix} \text{會}_{\text{員}}(\text{贼} \\ \text{會}_{\text{圓}}(\text{贼} \end{bmatrix}$$

摇摇由上可见，状态变量的选择并不是唯一的。但是，状态变量必须是能够完全描述系统特性的一组最少变量，这些变量是相互独立的。在物理系统中，一般选择系统里的储能元件上与储能有关的参量，如电感中的电流，电容上的电压、电流或电荷，弹性元件的位移、速度、加速度等量作为状态变量。因此，在物理系统中，状态变量的个数就等于系统中独立储能元件的个数。但有时由于数学上的需要，也可以用一些物理量的线性组合作为状态变量，或对于更广泛的一类社会经济系统、生态环境系统，状态变量就不一定具有明确的物理意义。如在例 圆原圆中，可以选择 會$_{\text{員}}$(贼 越怎$_{\text{悦}}$(贼 垣砸· 蚤贼，會$_{\text{圓}}$(贼 越怎$_{\text{悦}}$(贼 越$\frac{\text{员}}{\text{悦}}\int$ 蚤贼则

$$\text{會}_{\text{圓}}(\text{贼 越}\frac{\text{员}}{\text{砸悦}}\text{會}_{\text{員}}(\text{贼 原}\frac{\text{员}}{\text{砸悦}}\text{會}_{\text{圓}}(\text{贼}$$

$$\text{怎贼 越會}_{\text{員}}(\text{贼 垣}\frac{\text{蕴}}{\text{蕴}}\frac{\text{蚤贼}}{\text{凿贼}}\text{越會}_{\text{員}}(\text{贼 垣}\frac{\text{蕴}}{\text{砸}}\text{會}_{\text{員}}(\text{贼 原}\frac{\text{蕴}}{\text{砸}}\text{會}_{\text{圓}}(\text{贼}$$

整理后可得