

问题导引

高中数学

探究学习

第一册 (下)

高中一年级上学期用

总主编 刘宗寅
本册主编 贾庆祥

新大纲
新观念
新思路
新品位



步入情境
探索研究
反馈矫正
拓展创新

山东科学技术出版社 www.lkj.com.cn

给高中生朋友的一封信

——编 者 的 话

亲爱的高中生朋友：

呈现在你面前的是一套全新的学习指导书。为什么这么说呢？那还得从问题导引·探究学习说起。

问题导引·探究学习是一种科学高效的学习方式，是你和同学们将素质教育的要求落实到各科学学习中的重要手段。这种学习方式和手段有着十分丰富的科学内涵。

其一，传统学习，学习的主要是现成的结论，依靠的主要是老师的讲解和教科书的说明，学习的目的主要在于不断地扩展自己的知识容量。而现代学习，既要学习现成的知识，又要掌握获取知识的方法，并能够运用这些方法去探取有关结论，去开辟新的知识领域；学习的目的在于以所获取的知识为载体，不断提高自己的能力，发展自己的智力。显然，现代社会需要的是现代学习，而现代学习需要的则是“探究学习”。现行高中教材和国家教育部最新制定的课程标准都十分重视“探究学习”。今后的高考，也将愈来愈重视对创新意识、探究能力、综合素质的考查。

其二，人的思维自问题始，以思维为核心的人的学习过

程显然也不例外。也就是说,人的学习过程就是不断发现问题、分析问题、解决问题和再去认识更高层次问题的过程。因此,“问题”对学习过程来说,有着至关重要的导引作用。有些同学学习效率不高,学习水平提高不快,一个重要原因就是不会发现问题或不善于提出问题。问题发现不了,提不出来,自然就无法去分析问题和解决问题,久而久之,学习只能处于一种十分被动的状态。而每一位优秀的教师和每一本好的学习指导书都非常重视问题情境的创设,通过提出一系列逻辑性强、符合认知规律和教材知识结构的问题,引导学生进行探究学习,使他们在问题情境中形成科学的思路和良好的习惯,从而能在不断发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的过程中提高自己的学习水平,发展自己的各种能力。

正是基于上述思想,根据教育部 2000 年颁布的《全日制普通高级中学课程计划(试验修订稿)》和全日制普通高级中学各科教学大纲,在充分吸收教育与教学改革最新成果的基础上,我们编写了这套《问题导引·探究学习》丛书。该丛书包括《问题导引·高中语文探究学习》(6 册)、《问题导引·高中英语探究学习》(6 册)、《问题导引·高中数学探究学习》(6 册)、《问题导引·高中物理探究学习》(3 册)、《问题导引·高中化学探究学习》(3 册),共计 24 册。

《问题导引·高中数学探究学习》与《全日制普通高级中学教科书(试验修订本)·数学》同步,依照教材章节顺序,以各章节的重点、难点、易错点、易混淆点为主要内容,引导你

进行探究学习,进而帮助你掌握正确的学习方法,建立科学的思维过程,排除学习中的心理障碍,弄清学习中的疑难问题,提高分析问题和解决问题的能力。本书每节内容包括步入情境、探索研究、反馈矫正、拓展创新四个部分,每章都给出了本章小结与复习和复习参考题。

步入情境 从你和同学们的生活经验和知识水平出发,以生动有趣而又富有启发性的问题(数学的、生活的、科学史的),层层递进地引导你进入本节的探究学习情境,旨在概述本节的重点内容、知识的前后联系,激发你的学习兴趣。

探索研究 用初学者的眼光看教材,提问题。通过问题导引,帮助你正确理解数学概念,掌握定理、性质、公式,以达到夯实知识和技能基础、培养思维能力、发展综合素质的目的。

反馈矫正 围绕本节重点和难点,通过对典型例题的详尽分析解答,讲思路,讲方法,讲技巧,通过对同学们所出现的常见解题错误的剖析以及给出针对性很强的矫正题,帮助你从错误中引出带有普遍性的教训,从正反两个方面加深你对基础知识的理解和基本技能的掌握。

拓展创新 为你精选了数量适当的练习题。这些题目既紧扣教材内容,又有相当的思维空间。通过练习,你既可以对新知识的认识更加系统化、理论化,又可以学会观察与比较、归纳与演绎、分析与综合等数学思维方法。

本章小结与复习和复习参考题 本章小结与复习从不同于教材的角度,把该章的知识点科学地、有序地、有机地

联系起来,并提炼出本章的数学思想方法,从而帮助你构造立体的、网络化的认知结构。所选复习参考题,既有较强的基础性、概念性,又有较强的综合性、思考性,重在训练你运用已学知识解决综合问题的能力。

特别需要说明的是,本书对一些警示性内容、应注意的问题、须特别强调的知识点以及有关资料,采用卡片的形式嵌入有关位置。在阅读这些卡片时,你要仔细体味其中的奥妙。

本书各部分内容既各自独立、各有侧重,又相互照应、紧密联系。问题导引,从理论探索到实际应用;探究学习,由浅入深,由简单到综合。书后还给出了练习题答案,供你参考。

在使用本书的过程中,你应在体验—探究上下功夫,坚持独立思考,先做后看,把阅读与思考、训练与概括结合起来。这样做,定会使你受益匪浅。

由于问题导引·探究学习是一个正在不断深化、备受关注的研究课题,一些新的研究成果将不断涌现。因此,欢迎你和同学们参与这一课题研究并将研究心得告诉我们,以便在本书修订再版时,能将你和同学们的体会和创见融入书中,使其更加完善。

愿本书成为你的良师益友,祝你在问题导引·探究学习中取得优异成绩!

编者
2002年1月

问题导引——

高中数学探究学习

第一册(下)

高中一年级下学期用

总 主 编 刘宗寅

本册主编 贾庆祥



山东科学技术出版社

编 委 会

总 主 编 刘宗寅

副总主编 毕华林

编 委 (以姓氏笔画为序)

卢 巍 毕华林 吕 清 刘宗寅

刘益桢 郝本瑞 贾庆祥 崔玉龙

本册主编 贾庆祥

编 写 者 邵丽云 李伟红 杨育红

审 订 侯秀荣



第四章 三角函数.....	(1)
4.1 角的概念的推广	(1)
4.2 弧度制.....	(10)
4.3 任意角的三角函数.....	(17)
4.4 同角三角函数的基本关系式.....	(26)
4.5 正弦、余弦的诱导公式	(40)
4.6 两角和与差的正弦、余弦、正切.....	(48)
4.7 二倍角的正弦、余弦、正切.....	(61)
4.8 正弦函数、余弦函数的图象和性质	(74)
4.9 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象.....	(88)
4.10 正切函数的图象和性质.....	(103)
4.11 已知三角函数值求角.....	(110)
本章小结与复习.....	(119)
复习参考题.....	(124)
第五章 平面向量.....	(129)
5.1 向量	(129)
5.2 向量的加法与减法	(135)
5.3 实数与向量的积	(147)
5.4 平面向量的坐标运算	(159)
5.5 线段的定比分点	(168)
5.6 平面向量的数量积及运算律	(178)
5.7 平面向量数量积的坐标表示	(188)

问

题

导

引

探

究

学

习



5.8 平移	(196)
5.9 正弦定理、余弦定理.....	(203)
5.10 解斜三角形应用举例.....	(218)
5.11 实习作业.....	(225)
本章小结与复习.....	(229)
复习参考题.....	(232)
综合测试题.....	(237)
参考答案.....	(243)

问

题

导

引

探

究

学

习



第四章 三角函数

问

题

导

引

探

究

学

2

4.1 角的概念的推广



步入情境

某中学数学竞赛小组的活动时间是星期天上午 8 点 30 分到 11 点,在这段时间内,时钟的分针转过了多大角度?如果把时钟拨慢 2 小时 30 分钟,在拨慢的过程中,分针转过了多大角度?这两个角度有什么不同?

在初中,角的定义是“由一点引出的两条射线所组成的图形”,其取值范围是从 0° 到 360° . 根据角的这种定义,无法回答上面的问题,说明用这种“静止”的观点定义角有局限性. 出于研究问题的需要,必须把角的概念进行推广.



探索研究

问题 1 如何用运动的观点来定义角?

导引 本节“步入情境”提出的问题,实质上就是分针绕着钟面的中心从 8 点 30 分的位置旋转到 11 点的位置. 由此,可以得到如下启示:

一个角可以看成“平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到



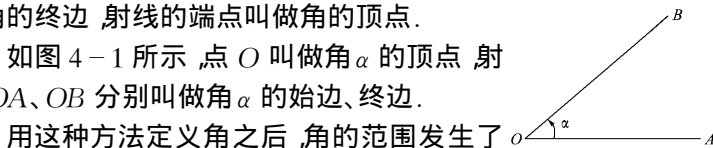
另一个位置所成的图形”，开始的位置叫做角的始边，终止的位置叫做角的终边，射线的端点叫做角的顶点。

如图 4-1 所示，点 O 叫做角 α 的顶点，射线 OA 、 OB 分别叫做角 α 的始边、终边。

用这种方法定义角之后，角的范围发生了如下变化：

(1) 射线按逆时针方向旋转形成的角叫做正角；按顺时针方向旋转形成的角叫做负角；射线不旋转，称它形成一个零角。

图 4-1



这样，由正角扩展到了正角、负角和零角。

例如，图 4-2(1) 中的角为正角，它等于 120° ；图 4-2(2) 中的角为负角，它等于 -60° 。

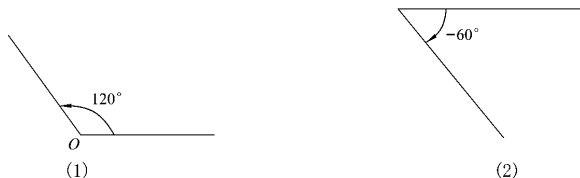
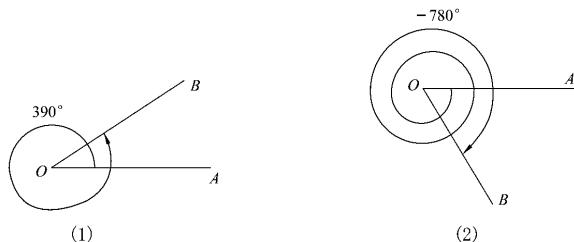


图 4-2

(2) 射线旋转超过一周，形成的角的大小就大于 360° 。例如，图 4-3(1) 中的角为 390° ，图 4-3(2) 中的角为 -780° 。





在本文“步入情境”提出的问题中,第一种情况分针旋转了 -900° ,第二种情况分针旋转了 900° .

这样一来,角的集合就与实数集建立了一一对应关系,为进一步研究三角函数打下了基础.

问题 2 为了便于研究问题,通常在直角坐标系内讨论角,那么,怎么定义象限角呢?

导引 首先,按如下方法建系:以角的顶点为原点,角的始边为 x 轴的非负半轴建立直角坐标系.

规定:角的终边落在第几象限,这个角就叫做第几象限角;如果角的终边落在坐标轴上,这个角就不属于任何象限.

如图 4-4 所示, 30° 角是第一象限角, -60° 角是第四象限角, 180° 角不属于任何象限.

注意:锐角是第一象限角,但是第一象限角却不一定都是锐角,如 380° 角、 -290° 角都是第一象限的角.

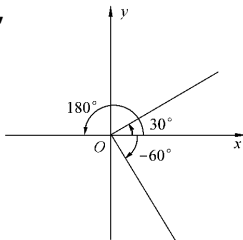


图 4-4

问题 3 有些角的终边在相同的位置,那么,这些角之间有什么关系呢?

导引 由角的定义知: -330° 角、 30° 角、 390° 角的终边重合,它们叫做终边相同的角.例如,与 30° 角终边相同的角有 -690° 、 -330° 、 390° ……它们都与 30° 相差 360° 的整数倍,所以与 30° 角终边相同的角可表示为 $(30^\circ + k \cdot 360^\circ) (k \in \mathbb{Z})$.

一般地,与角 α 终边相同的所有角的集合为

$$\{\beta \mid \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$$

问

题

导

引

探

究

学

习



在角的顶点与原点重合、始边与 x 轴的非负半轴重合的前提下,两个角的终边相同是这两个角相等的必要非充分条件.即如果两个角相等,它们的终边一定相同;如果两个角终边相同,这两个角不一定相等,而是相差 360° 的整数倍.

问

题

导

引

探

究

学

习

由此,可以得出,终边落在 x 轴的非负半轴上的角的集合是

$$\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\} = \{\alpha \mid \alpha = 2k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$$

终边落在 x 轴的非正半轴上的角的集合是

$$\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\} = \{\alpha \mid \alpha = (2k + 1) \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$$

所以,终边落在 x 轴上的角的集合是

$$\begin{aligned} & \{\alpha \mid \alpha = 2k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha \mid \alpha = (2k + 1) \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\alpha \mid \alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

同理可得,终边落在 y 轴上的角的集合是

$$\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$$

当 k 为偶数时,终边落在 y 轴的非负半轴;当 k 为奇数时,终边落在 y 轴的非正半轴.

各象限内角的表示法如下表:

象限角	集合表示
第一象限角	$\{\alpha \mid k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
第二象限角	$\{\alpha \mid k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
第三象限角	$\{\alpha \mid k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
第四象限角	$\{\alpha \mid k \cdot 360^\circ - 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

对于角 $\beta = k \cdot 180^\circ + \alpha$,当 $k = 2n$ ($n \in \mathbb{Z}$) 时, β 与 α 的终边相同;当 $k = 2n + 1$ ($n \in \mathbb{Z}$) 时, β 与 $180^\circ + \alpha$ 的终边相同,而角 α 与 $180^\circ + \alpha$ 的终边互为反向延长线.由此可得,第一、三象限的角的集合是



$$\{\alpha | k \cdot 180^\circ < \alpha < k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\};$$

第二、四象限的角的集合是

$$\{\alpha | k \cdot 180^\circ - 90^\circ < \alpha < k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$$



反馈矫正

【例题 1】 在 0° 到 360° 的范围内, 找出与 $1\,500^\circ$ 、 $-1\,500^\circ$ 终边相同的角.

分析 根据终边相同的角的表示法, 本题可转化为求 $1\,500^\circ$ 、 $-1\,500^\circ$ 被 360° 除所得的余数, 可考虑算式

$$\begin{array}{r} 4 \\ 360^\circ \overline{) 1\,500^\circ} \\ \underline{1\,440^\circ} \\ 60^\circ \end{array}, \quad \begin{array}{r} -5 \\ 360^\circ \overline{) -1\,500^\circ} \\ \underline{-1\,800^\circ} \\ 300^\circ \end{array}.$$

解 因为

$$1\,500^\circ = 4 \times 360^\circ + 60^\circ,$$

$$-1\,500^\circ = (-5) \times 360^\circ + 300^\circ,$$

所以在 0° 到 360° 的范围内, 与 $1\,500^\circ$ 、 $-1\,500^\circ$ 终边相同的角分别是 60° 、 300° .



负角除以 360° , 商数 k 为负整数, $|k|$ 应比被除数是其相反数时的商大 1, 余数才能在 0° 到 360° 的范围内.

问

题

导

引

探

究

学

习



【例题 2】 若 4α 与 20° 角的终边相同, 求适合不等式 $-360^\circ \leq \alpha < 0^\circ$ 的角 α 的集合.

分析 根据终边相同的角的关系, 有

$$4\alpha = 20^\circ + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$

然后, 结合 $-360^\circ \leq \alpha < 0^\circ$ 可确定 k 的值, 从而求出 α .

解: 由题意, 得

$$4\alpha = 20^\circ + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z}),$$

所以 $\alpha = 5^\circ + k \cdot 90^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

又由 $-360^\circ \leq \alpha < 0^\circ$, 得

$$-360^\circ \leq 5^\circ + k \cdot 90^\circ < 0^\circ (k \in \mathbb{Z}),$$

解之, 得

$$-4\frac{5}{90} \leq k < -\frac{5}{90}.$$

因为 $k \in \mathbb{Z}$, 所以 k 取 $-4, -3, -2, -1$, 代入 $\alpha = 5^\circ + k \cdot 90^\circ$, 得

$$\alpha = -355^\circ, -265^\circ, -175^\circ, -85^\circ.$$

所以, 满足条件的集合是

$$\{-355^\circ, -265^\circ, -175^\circ, -85^\circ\}.$$

说明 若不按这种方法, 由 $\alpha = 5^\circ + k \cdot 90^\circ$ 取 k 值试验也可得到结果, 但容易丢解.

【例题 3】 设 α 是第一象限角, 判断 $\frac{\alpha}{2}$ 在第几象限.

解: 因为 α 是第一象限角, 所以

$$k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ (k \in \mathbb{Z}),$$

由此得

$$k \cdot 180^\circ < \frac{\alpha}{2} < k \cdot 180^\circ + 45^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$

当 $k = 2n$ ($n \in \mathbb{Z}$) 时, 有

$$n \cdot 360^\circ < \frac{\alpha}{2} < n \cdot 360^\circ + 45^\circ (n \in \mathbb{Z}).$$

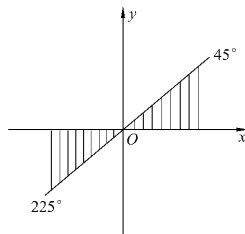


此时, $\frac{\alpha}{2}$ 在第一象限.

当 $k = 2n + 1$ ($n \in \mathbb{Z}$) 时, 有

$$n \cdot 360^\circ + 180^\circ < \frac{\alpha}{2} < n \cdot 360^\circ + 225^\circ.$$

此时, $\frac{\alpha}{2}$ 在第三象限.



所以, $\frac{\alpha}{2}$ 在第一或第三象限, 如图

4-5 中的阴影部分.

图 4-5

常见错误及分析: 有的同学往往把“锐角”与“第一象限角”混为一谈, 从而由 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 得 $0^\circ < \frac{\alpha}{2} < 45^\circ$, 进而得出 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角的错误结论.

矫正题 α 是第二象限角, 判断 $\frac{\alpha}{2}$ 在第几象限.

答案: $\frac{\alpha}{2}$ 在第一或第三象限.

仿照例题 3 的解法, 同理可以得出 α 在第三、四象限时, $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限. 此结果如下表及图 4-6 所示:

α 所在象限	$\frac{\alpha}{2}$ 所在象限
I	I 或 III
II	I 或 III
III	II 或 IV
IV	II 或 IV

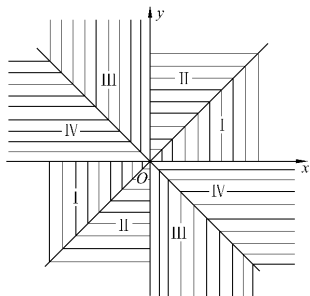


图 4-6

此表应熟记, 以后解题经常用到.

问

题

导

引

探

究

学

习



【例 4】已知集合

$$B = \{\alpha \mid \alpha = k \cdot 120^\circ + 30^\circ, k \in \mathbb{Z}\},$$

$$C = \{\beta \mid k \cdot 360^\circ - 120^\circ < \beta < k \cdot 360^\circ + 60^\circ, k \in \mathbb{Z}\},$$

求 $B \cap C$.

解:由 $\alpha = k \cdot 120^\circ + 30^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$), 有

当 $k = 3n$ ($n \in \mathbb{Z}$) 时, $\alpha = n \cdot 360^\circ + 30^\circ$;

当 $k = 3n + 1$ ($n \in \mathbb{Z}$) 时, $\alpha = n \cdot 360^\circ + 150^\circ$;

当 $k = 3n + 2$ ($n \in \mathbb{Z}$) 时, $\alpha = n \cdot 360^\circ + 270^\circ$.

如图 4-7 所示, 阴影部分为集合 C 所表示的角域, 所以集合 B 、 C 的公共部分是与 30° 、 270° 终边相同的角的集合, 即

$$B \cap C = \{\alpha \mid \alpha = k \cdot 360^\circ + 30^\circ \text{ 或 } \alpha = k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$$

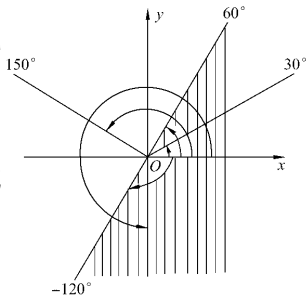


图 4-7



拓展创新

一、选择题

1. 下列命题中, 正确的是()

- (A) 第一象限角必是锐角.
- (B) 终边相同的角必相等.
- (C) 相等角的终边位置必相同.
- (D) 不相等的角其终边位置必不相同.

2. 若角 α 与 β 的终边互为反向延长线, 则()

- (A) $\alpha = -\beta$.
- (B) $\alpha = -k \cdot 360^\circ + \beta$.
- (C) $\alpha = 180^\circ + \beta$.
- (D) $\alpha = k \cdot 360^\circ + 180^\circ + \beta$.

3. 集合 $M = \{\alpha \mid \alpha = k \cdot 90^\circ + 45^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ 与 $P = \{\alpha \mid \alpha = k \cdot 45^\circ,$