

《猿戟·(能力型)解题教学指导书系·文科版》

出版说明

没有不考试的学习

摇摇没有不解题的考试

猿戟

考试的革命？

逐步取代全国统一高考的最终形式！

猿戟作为即在全国逐步推行的高考制度,作为中国考试改革经多年探索而确立下来的将逐步取代全国统一高考的最终形式,虽然只是一种考试制度,甚至只是一种高校招生考试制度,但其重视学生综合素质的考察和通过课程课业学习进行学生综合能力培养与训练的精神实质和指导思想,已然成为一种观念,直接和即将影响到学校课堂教学和学生课业学习的方方面面和每一个层次的每一个环节,涉及到教师教学方法和学生的学习方法的各方面。可以说是具有一定的革命性的改革。实践证明:把考试与素质教育对立起来、甚至想取消考试,是教育理论和实践中的一个极大的误区。“没有不考试的学习”解决问题的唯一方法,不是要取消考试,而是要使考试更为科学化、规范化,提高和确保考试的效度和信度。

必须承认,考试是检测学生综合素质和教师教学水平的最好形式,应考能力和效果是学生课业学习的综合素质和能力的最有效和最集中的反映和表现。脱离课业学习,进行学生的所谓素质教育是违背教育方针和教育规律的愚蠢的行为。

考试最直接的形式是解题。“没有不解题的考试”。

解题是课业学习的基本形式——解题是课业学习的主要内容——解题是课业学习的存在目的——解题是课业学习的兴奋中心。

课业学习是对人类经过千百年的理论和实践探索所形成的需经过严肃的科学思维整理的知识体系所形成的课程的学习,是一种艰苦的

接受性的智力劳动,而不是纯探索的、再发现的或者试误的学习。千百年的教育实践证明,解题是进行这种学习的不可取代的方式和环节。也是考查学习效果的最好形式。所以,解题教学的科学化、规范化直接影响到学生课业学习的质量,也直接影响到课堂教学的质量和学生的综合素质水平。因此,我们编撰本书:

猿题库的考试制度,涉及到教学过程的,就是解题教学的环节。本书即按猿题库考试改革体系所强调的重视和考察学生综合素质和通过课业学习培养学生解决问题的综合能力的精神,整理解题教学和训练的思想方法,形成完整、科学、规范的解题教学与指导训练体系,使其既适用于高考解题教学与指导、又适用于作为教学环节的各级各类考试训练指导、使其于中小学各级考试:招生、入校、入学、平时检测、中期、期末、阶段、单元、年级、升学、中考、高考等各级考试的解题教学都具有直接的实用价值。

猿题库强化各级各类教学中的解题教学与训练环节,使这一环节不仅是教师课堂教学和学生课业学习过程中的一个有机环节,而且也使这一环节完全遵循自身相对独立的存在规律和模式,成为教学过程的集中体现,集中解决教学过程中出现的矛盾和问题。形成“解题教学——作业练习复习——考试解题技巧方法训练”的科学范式。

猿题库把解题的思想方法和思维训练放在培养解题能力的核心地位。把各学科的常用思想方法、思维方法和解决问题的思维模式纳入解题教学之中。

猿题库学生在解题教学与训练中是真正的主体,注意培养和激发学生解题的兴趣、主动的精神。本书不是教辅,更不是题库,它集中介绍的是解决问题的实用思路、策略、方法和技巧。

猿题库考试常用题型与解题技巧是总结多年来的常见题型及解题方法,着重从题型入手,综合分析运用解题教学与训练的成果进行解题的思路、策略、方法、技巧的训练。是解题教学的直接应用。

本书编委会

猿题库 2016 年元月

《猿载·(能力型)解题教学指导书系》

—— 编 委 会 ——

■ 执行主编 冯克诚

■ 编 委 会 冯克诚 程方平 毕 诚 劳凯声
檀传宝 王 坦 施克灿 金生宏
李五一 丁家棣 吴龙辉 顾 春
雒启坤 刘焯铿 王孚生 刘敬尧
冯振飞 冯月文 肖乃明 胡定南
董英伟 孙英志 孙晋平 李清乔
李明杨 方学俊 龚国玉 陈 丽
尚 斌 迟为强 何 光 向南屏
贺新兴

◇目录◇

猿载. 数学解题的创造性思维品质培养(中)

第三部分

猿载. 数学解题中的发散求异思维与一题多解方法

数学发散思维的教学培养与训练(一)	(员)
数学发散思维的教学培养与训练(二)	(源)
数学发散思维的教学培养与训练(三)	(远)
数学发散思维的教学培养与训练(四)	(怨)
数学发用思维的教学培养与训练(五)	(员猿)
数学发散思维能力的培养	(员苑)
发散思维的培养与数学解题教学	(员怨)
发散思维的三特征与数学解题	(圆猿)
数学解题发散思维的培养与训练(一)	(猿)
数学解题发散思维的培养与训练(二)	(猿猿)
开放型例题与发散思维能力培养	(源)
发散性思维和汇聚检索能力的培养	(源)
求异思维的五种基本形式	(缘)
培养求异思维的对策和措施	(缘)
一题多解的功能	(缘)
一题多解的奥秘——重构问题表征	(远)
一题多证与能力培养	(远)
多题一解与能力培养	(远)
一题多解与思维品质培养	(猿)
一题多解中的思维发散方向	(猿)
一题三多扩散性思维培养	(愿)
一题多解与择优解题能力的培养	(怨)

圆

初中数学中的两解问题	(怨源)
“一题多果”与初中数学能力的培养	(怨远)
一题多解的训练	(员员)
一题多解四条策略	(员员)
一题多思举一反三六法	(员员)
一题多解、一题多变、一举多得	(员员)
一题多解、多题一解、一解多写与多解一写	(员缘)
“类似题组”与“一题多解”题	(员)
一种常见题型多解比较	(员)
一题十解及启示	(员)
“一题多解”的教学	(员)
一题多证的课堂操作方法	(员)
一题多解应注意的一个问题	(员)
附:套用相近知识摇一题三解两错	(员)

第四部分

猿园. 数学解题中的联想思维与联想方法

数学联想思维及其教学培养	员
数学相似思维及其教学培养	员
完形心理与联想思维	员
数学解题中的联想思维方法(一)	员
数学解题中的联想思维方法(二)	员
数学解题中的联想思维方法(三)	员
数学解题中的联想思维方法(四)	员
数学联想思维迁移的处置	员
联想在数学解题中的应用(一)	员
联想在数学解题中的应用(二)	员
联想在数学解题中的运用(三)	员
数学解题中的联想途径和方法(一)	员

数学解题中的联想途径和方法(二)	圆田
数学解题中的联想途径和方法(三)	圆猿
数学解题中的联想途径与方法(四)	圆愿
解题过程中的四条联想渠道	圆园
数学证题中的八条联想渠道	圆缘
数学解题中的联想方法(一)	圆愿
数学解题中的联想方法(二)	圆猿
数学解题中的联想五种方法	圆苑
数学解题中的五个联想点	圆怨
数学解题中的相似联想(一)	圆园
数学解题中的相似联想(二)	圆缘
数学解题中的相似联想(三)	圆愿
借助“形似”选择思维起点	圆园
数学解题中的因果多向联想	圆源
数学解题中的对立联想	圆苑
数学解题中的观察与联想(一)	圆园
数学解题中的观察与联想(二)	圆缘
数学解题中的类比联想	圆愿
数学解题的联想、猜想、发现	圆园
数学解题后的联想与编拟	圆缘
数学解题中的联想与转化策略	圆苑
数学解题中的联想与构造(一)	圆怨
数学解题中的联想与构造(二)	圆员
数学解题中的联想·构造·转化	圆缘
数学解题中的图解与联想	圆愿
数学解中题的“互逆联想”	圆员
解综合题的联想途径与方法	圆缘



摇摇 □ 数学发散思维的教学培养与训练(一)

发散性思维是在研究同一问题时,从不同角度、不同结构形式去探索结果的思维方法。它表现为思路开阔,善于联想,长于变化,敢于创新,其实质上是一种创造性思维。如何训练和培养学生的发散性思维,杭州六中王云生老师认为应根据数学课的不同内容和要求,采用不同的方法来进行探索。并将教学实践中采用的一些方法作了如下介绍:

员. 课堂讨论中引导思维的多向性

在讲授新课时采用课堂讨论的方法,不仅能激发学生浓厚的学习兴趣,充分调动他们学习的积极性,而且有利于学生思维的发散。

关于有限制条件的排列组合问题,历来是学生学习上的难点。因为这类问题比较抽象,加上它的思维方法又与以前不同,而且有时解题的结果数字较大不易检验,因而学生在考虑这类问题时经常出现遗漏或重复的错误。对此,在教学中采用“提出问题、设置悬念、引导讨论、启发思维”的方法,收到了较好的效果。例如“用园到怨这十个数字,可以组成多少个没有重复数字的三位数?”在解题前,设计了这样几组问题:第一组(员)组成这样的三位数,园能不能放在首位?(圆)首位应该怎样确定?(猿)确定了首位后,其它位上的数又如何确定?

第二组(员)组成这样的三位数,是否一定要包含园?(圆)不包含的三位数怎样确定?(猿)包含的三位数中,园应该放在哪些位置?这样的三位数又有多少?

第三组(员)如果从这 苑个数字中任取 猿个,是否都能组成三位数?(圆)不能组成三位数的是哪种情况?

通过对这三组问题的逐个讨论,使学生对这个问题中特定的元素园有了较深刻的认识,并逐步明确可以从多方面考虑三位数的构成,从而能正确地列出三种

圆

培养(中)

不同的算式。我在学生讨论列式的基础上再进行了归纳集中,指出这是考虑“从灶个不同元素中每次取出皂个元素的排列,其中某一元素不在某一位置上的排法有几种”?这类问题的三种基本思路,不妨称之为“定位法”、“分类法”和“排除法”,其基本计算公式为 $\frac{n!}{k!}$ (灶个元素)和 $\frac{n!}{k!}$ (灶个元素)。这样的讨论能使教材化难为易,使学生较好地掌握解法,同时思维也得到了发散。

圆一题多解中培养思维的变通性

在习题课中围绕典型的例题进行一题多解,让学生有综合运用各种知识的机会,能对问题从不同角度、不同方向去探索和思考,开拓思路,训练思维的变通性和提高解题能力,无疑是十分必要的。

例:已知椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 求过点 $P(x_0, y_0)$ 且被 P 点所平分的弦 AB 的直线方程。

对于这道题,我首先向学生指出,因为要求的是直线方程,且直线过已知点 P ,所以解题的关键在于直线的斜率 k ,因此要求学生在求斜率这个问题上展开思路。有的学生以斜率为参数,从求直线与椭圆的交点这个方向着手得出。

解:设 AB 的直线方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$,代入椭圆方程,得 $(b^2 - k^2a^2)x^2 + 2kx(x_0 - a^2) - (x_0^2 - a^2) = 0$,然后利用韦达定理及中点坐标公式确定 k 的值,可求得弦的方程。

这种解法思路直接,容易想到,学生也习惯运用,但不难看出计算过程较繁,于是我又启发学生,因为弦的斜率 k 和中点 P 都与端点的坐标有关,能否以端点坐标为参数,利用端点坐标满足椭圆方程来求得两端点坐标间的关系,再结合斜率公式求 k 于是又有

解:圆设弦的端点坐标为 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 则有 $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ 和 $\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$ 两式相减,整理得 $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 0$,将 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ 及中点坐标公式代入即得 k 值。

在此基础上我又引导学生利用直线和椭圆的参数方程解题。

解:设弦 AB 的参数方程为 $\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \sin \alpha \end{cases}$,代入椭圆方程,得 $(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha)t^2 + 2(x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha)t + (x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2 - 1) = 0$, t_1, t_2 是方程的两根,由 P 是弦的中点,由 t 的几何意义知 $t_1 + t_2 = 0$,即 $2(x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha) = 0$,易得 $k = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$ 。

解:设椭圆的参数方程为 $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$,

亦可设 $A(a \cos \theta_1, b \sin \theta_1)$ 和 $B(a \cos \theta_2, b \sin \theta_2)$ 由 $\frac{a \cos \theta_1 + a \cos \theta_2}{2} = x_0$ 和 $\frac{b \sin \theta_1 + b \sin \theta_2}{2} = y_0$ 得 $\cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = \frac{x_0}{a}$ 和 $\sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = \frac{y_0}{b}$ 两式相除得 $\tan \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \frac{b x_0}{a y_0}$ 从而求得 $k = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$ 。

$\frac{\text{猿}(\text{猿} \pm \text{猿})}{\text{猿}}$ 越 猿, 两式相除, 并和差化积, 得 $\frac{\text{猿} \pm \text{猿}}{\text{猿}}$ 越 猿 (*). 同样把斜率公

式也和差化积, 并将(*)代入得 猿值。

以上四种解法都是以求直线斜率为目标, 还可以直接以曲线与方程的对应关系为依据, 另辟捷径, 得一简便解法。

解 缘 设端点 粤 曾 赠, 疫孕是 中点, 可得 月 源 原 曾 圆 原 赠, 而 粤 月 在 椭圆 上,

亦 $\begin{cases} \text{源} \pm \text{猿} \pm \text{赠} \pm \text{越} \text{猿} \\ \text{源} \pm \text{源} \pm \text{曾} \pm \text{垣} \pm \text{圆} \pm \text{原} \pm \text{赠} \pm \text{越} \text{猿} \\ \text{原} \pm \text{曾} \pm \text{赠} \pm \text{原} \pm \text{越} \text{猿} \end{cases}$ 两式相减, 消去二次项, 即得弦的直线方程为

在解完每道题后, 又和学生共同总结解题的关键和各种解法的思路, 比较每种解法的特点和优劣, 提醒学生哪些方面要防止失误等, 这样的训练, 能使学生的发散性思维得到充分发展, 使他们掌握更多的解题方法和技巧。

猿猴一题多变中训练思维的深刻性

在复习课中经常采用一题多变的 教学形式。可以引导学生积极思维, 克服静止孤立地思考问题的习惯, 逐步使思维向广处联想, 向纵深发展, 达到由此及彼, 触类旁通。

例 过 抛物线 赠 越 曾 的 焦点 云 的一条 直线 和 抛物线 相交 于 粤 曾 赠, 月 曾, 赠 两点 (曾 曾 赠), 求证 赠 越 原 曾。

对于本题的证明, 一般学生不会感到困难。

在证完以后, 教师可以通过逐步改变该题的条件和结论, 和学生一起探讨得出新题:

首先, 设直线斜率为 噪 从改变结论出发, 可将结论改为求 (员) 曾 曾 越? (圆) 曾 垣 曾 越? (猿) 赠 垣 赠 越? 学生通过推导, 不难得出 (员) 曾 曾 越 $\frac{\text{猿}}{\text{源}}$ (圆) 曾 垣 曾 越

$\frac{\text{猿} \pm \text{猿}}{\text{噪}}$ (猿) 赠 垣 赠 越 $\frac{\text{猿}}{\text{噪}}$

其次, 从改变条件出发, 若将焦点 云 $\frac{\text{猿}}{\text{圆}}$ 改为点 配 曾 赠, 则 赠 越?

这时应设直线方程为 赠 越 噪 曾 原 赠, 代入 赠 越 曾, 消去 曾, 应用韦达定理得到 赠 越 原 赠。

再将点 配 (曾 赠) 改为 晕 曾 赠, 结果又如何呢? 类似地只要设直线方程为 赠 原 赠 越 噪 曾 原 赠, 同样可能求得 赠 越 $\frac{\text{猿} \pm \text{猿}}{\text{噪}}$ 。通过这样的改变, 就将结

源

培养(中)

论从特殊推向一般。

还可以同时改变题目的条件和结论,把焦点云 $\frac{责}{圆}$ 改为点馐 $\frac{圆}{圆}$ 或晕 $\frac{圆}{圆}$ 来求得 曾圆越? 曾垣圆越? 赠垣圆越? 等等。

在讨论过已知点 晕 $\frac{圆}{圆}$ 引斜率为 噪的直线和抛物线 赠越圆赠相交于两点 粤 $\frac{圆}{圆}$ (圆 赠), 月 $\frac{圆}{圆}$ 这类问题时, 当我们已求得 曾垣圆, 曾· 赠, 赠垣圆, 赠· 赠这些数据时, 就容易引伸求得下面这些问题的结果: 求弦 粤月的中点坐标或求弦的中点轨迹, 求弦长, 求 \triangle 粤月的面积, 求 \triangle 粤月的重心坐标或重心的轨迹等。这样一来, 问题的思考性更强, 涉及的知识面更广, 真正起到了解决一题, 带动一批的作用。

可见, 从一个题目入手, 通过不断变换题目的条件和结论, 这种由浅入深, 循序渐进, 举一反三, 层层深化的做法, 对学生开拓和发展思维的灵活性和深刻性方面发挥了积极的作用, 进而也促进了学生思维的创造性。

总之, 教学中学生的发散性思维的培养, 需要进行长期的训练, 必须对此引起足够的重视。只要我们在教学全过程的各个环节, 根据大纲要求, 深入钻研教材, 精心设计教法, 因势利导, 注意培养学生良好的思维习惯和方法, 定能收到较好的成效。

摇摇□ 数学发散思维的教学培养与训练(二)

思维的积极性、求异性、广阔性、联想性等是发散思维的特性, 抓住这些特性进行训练, 可使学生提高发散思维的能力。上海市闵行区鲁汇中学马爱芳老师总结的方法是:

员 训练思维的积极性

思维的惰性是影响发散思维的障碍, 而思维的积极性是思维惰性的克星。所以培养思维的积极性是培养发散思维的基础。

例题一 一直线 蕴曾原赠垣越圆上取点 馐, 以云 $\frac{原原}{圆}$ 、云 $\frac{源源}{圆}$ 为焦点, 过 馐作椭圆, 问 馐在何处时, 所作椭圆长轴最短, 并求此椭圆方程。先让学生思考, 一般都能设 馐 $\frac{曾}{圆}$, 问题转化为当 曾原赠垣愿越圆时, 求 $\sqrt{(\frac{曾}{圆}-\frac{原原}{圆})^2+(\frac{曾}{圆}-\frac{源源}{圆})^2}$ 的最小值, 具体求解时, 就会陷入困境, 顽强的惰性使他们不愿继续思考。此时教师可启发联系初二平面几何轴对称图形中的一个实例: 在铁路 粤的同侧有两个工厂 粤和 月要在路边建一个货场 悦, 使 粤月两厂到货场 悦的距离

和最小,在图上作出点悦

新旧知识的联系,使学生顿悟例题一的本质,思维一下活跃起来,很快作出点云(原原)关于直线 l 的对称点云',连结云云,云交直线 l 于点酝,即为所求。

圆 训练思维的求异性

学生的思维容易雷同化,缺乏探索精神是常有的事,这也是阻碍发散思维的原因之一。扫除这一障碍可从训练思维的求异性入手,即鼓励学生独立思考敢于发表不同见解。

例题二 若葬遭糟为实数,且方程 $(葬垣遭)曾原园$ 葬或糟垣遭越园的根相等,求证葬遭糟成等比数列且公比等于曾。学生一般都会根据方程有等根这一已知条件,从根的判别式等于零证之,步骤繁杂。这是一种雷同的解法,缺乏个性化。如果启发展开左边,并要求仔细观察特征,学生就会改换结组方式得到 $(葬垣遭)垣(遭垣糟)越园$,又据题意,葬越遭,故由实数平方的非负性,可得葬越遭垣遭且遭越遭垣遭。

故葬越遭垣遭,葬越遭垣遭,葬越遭垣遭,葬越遭垣遭,葬越遭垣遭,葬越遭垣遭。

欲证的两个结论一并得出,毕其功于一役,事半功倍,大大提高了学习效率,这是求异思维的光彩和结果。转换角度思考问题,是训练求异思维的关键。抓住这一关键,就会收到理想的效果。

猿 训练思维的广阔性

思维的广阔性是发散思维的又一特征。思维的狭窄性表现在只知其一,不知其二,稍有变化,就不知所云。反复进行一题多解、一题多变的训练,是帮助学生克服思维狭窄性的有效办法。

例题三 求证 $(曾原园)越垣遭$ 。引导学生由求证式联想到三角公式,进行广阔思维,会发现,可用倍角公式、差角余弦公式、凑配法、降次法等四种方法证明恒等式成立(解题过程略),从而发现了解题的捷径,思维的广阔性得到了典型训练。只要反复训练,学生就会进入广阔思维的佳境。

联想思维是一种表现想象力的思维,是发散思维的显著标志。联想思维的过程是由此及彼,由表及里的思维过程。通过广阔思维的训练,学生的思维可达到一定广度,而通过联想思维的训练,学生的思维则可达到一定深度。

例题四 求函数 $曾$ 的最大值与最小值。启发学生联想思维,进行发散思考。

远

培养(中)

联想一 由函数式中含有 $\frac{1}{\sin x}$ 与 $\frac{1}{\cos x}$ 这一特征,启发学生联想 $\frac{1}{\sin x}$ 与 $\frac{1}{\cos x}$ 的关系式,发现可转化为利用弦函数的有理换元式(万能置换公式)令 $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{t}$ 或 $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{t}$ (圆或 $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{t}$ 圆),变三角函数成为有理分式函数,再对有理分式函数进行变形,用方程的观点求出最大值和最小值。

联想二 启发学生观察函数式右边的特征,相当于点 $\frac{1}{\sin x}$ 和点 $\frac{1}{\cos x}$ (原圆)的纵坐标之差与横坐标之差的比值,学生联想到解析几何中的斜率公式,而点 $\frac{1}{\sin x}$ 满足圆方程 $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 2$,于是问题就转化为代数结合求解。

联想三 启发学生把原式化为 $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$ 原圆,再让学生思考如何根据这一等式成立的条件求 $\frac{1}{\sin x}$ 的范围,可激发学生浓厚的兴趣与强烈的求知欲,马上联想起形如 $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$ 的三角方程有解的条件 $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$,于是问题就容易解决了。

摇摇 □ 数学发散思维的教学培养与训练(三)

发散思维是创造性思维的中心,培养学生发散思维是发展学生创造能力的重要环节,所谓发散思维是指沿着各种不同的方向去思考问题,寻求多样性解答的思维方式。它从给定的信息中产生新的信息,获得多种可能的结果。

美国心理学家吉尔福特认为,发散思维主要有三个特征:流畅性、变通性、独特性。

流畅性 指心理活动畅通少阻,灵敏迅速,能在短时间内表达较多的概念。

变通性 指思维活动能随机应变,触类旁通,不受某种思维模式的局限和消极定势的影响,能产生新观念和超常的构想。

独特性 指用前所未有的新角度、新观点去认识、分析问题。思维方向新颖独特,能够产生独特的见解。

要提高学生的数学素养,就得在数学教学中注意培养学生的发散思维。湖北荆口罗昭旭、罗海祖老师介绍了在数学教学中培养学生的发散思维的作法:

员 打开学生思维,培养联想能力

在数学教学中,结合教材特点,打开学生思路,培养联想能力,有利

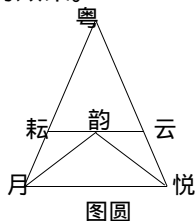
愿

培养(中)

我们认为这是培养学生思维变通性的好素材。若思维定势在一个平面内,用六根火柴是无论如何也不能组成三个三角形的。若改变思维角度,在空间里摆一摆,试一试,问题就解决了。

所谓变式,就是在问题解决的过程中,对直观对象进行变换与改造,变更对象的非本质要素,突出对象的本质特征,在训练中开展一题多变,把一道题发散成一系列题,形成题组,这也是培养思维变通性的好方法。近年来,这种方法在教学中已经取得了较好的效果。

摇摇例如,在学习“等腰三角形的判定”时,在学习了判定定理和例题之后,可以进行下列变式训练:



如图圆在 \triangle 粤悦中,粤韵越悦,韵月平分 \angle 月,韵悦平分 \angle 悦,由此可能得出什么结论?(得到等腰 \triangle 韵月悦)

变式员(加强条件)过韵作一直线耘//月悦,可以得到几个等腰三角形?(得到缘个等腰三角形)

变式圆(削弱条件)若 \angle 月 \neq \angle 悦,其它条件不变,图中有没有等腰三角形?如有等腰三角形有几个?(得到圆个等腰三角形)

经过结论发散,条件变化来进行变式训练,它要求学生能根据已知条件自行导出尽可能多的结论,通过图形变化、引伸,引导学生在条件发生变化时,观察结论的变化。

猿猴培养学生个性,鼓励创新创优

发散思维的独特性与学生的个性特征密切相关,要培养发散思维必须调动学生的主动性和创造性。在教学中可以通过一道题的简捷解法,反常解法或独特解法来培养。虽然这里也是一题多解的形式,但主要是强调解法的质。我们可采用多种形式,让学生的思维在生动活泼的气氛中得到锻炼和发展,并培养他们的意志品质。对于有新意,有创见的学生予以鼓励,促使他们积极奋发,顽强学习。

例如:用多种方法证明:

摇摇 $\frac{\text{葬回圆}}{\text{圆}}$ 跃/葬遭葬遭

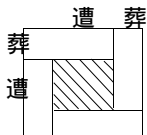
摇摇证员(比较法)

$\frac{\text{葬回圆}}{\text{圆}}$ 原/葬遭越员(葬原遭)跃园,下略。

证圆(构造法)

由(葬原遭)跃园推得。(略)

证猿利用图猿,大正方形面积大于源个长方形的面积的和,即(葬回圆)跃圆遭

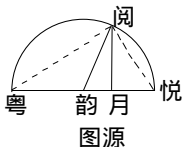


图源

→ $\frac{\text{葬回曹}}{\text{圆}}$ 跃/葬回曹

证源如图源在直线粤兑上取粤月越葬,月兑越曹以粤兑越葬回曹为直径作半圆,圆心为韵,过月作月阅⊥粤兑交半圆于阅,连接韵阅,

摇摇则摇摇韵阅越 $\frac{\text{员}}{\text{圆}}$ (粤月垣月兑)越 $\frac{\text{葬回曹}}{\text{圆}}$ 。



而摇摇月阅越粤月·月兑越曹,

亦摇摇月阅越 $\sqrt{\text{粤月} \cdot \text{月兑}}$ 越 $\sqrt{\text{葬回曹}}$

疫摇摇韵阅跃月阅,

亦摇摇 $\frac{\text{葬回曹}}{\text{圆}}$ 跃/葬回曹

证缘:三角法,略。

证明不等式是代数问题,联想到几何、三角证法是比较困难的,需要较大的思维变通能力。而把几何、三角、代数知识结合起来解决问题,运用了数形结合的方法,应当说具有独特性。显然,上述方法上的发散思维,必须在几何、三角基础知识方面比较扎实,能从代数葬回曹的乘积式联想到半圆中的等比中项式,首先通过知识上的发散才能进入方法上的发散。

在课堂教学中,还可以结合所学的知识,给出数量关系或几何图形,让学生进行编题练习,这也是一种培养发散思维的好方式,因为学生在设计题目的过程中需要广泛联想基础知识,充分发挥自己的想象力和创造力,才能巧妙地应用所学知识,寻求较好的编题方案,这样还可以提高学生兴趣。

如结合配方法解一元二次方程要学生编题,一位学生编拟题目如下:

若 $\text{曹垣曹地葬回曹} \text{原} \text{有解}$,求葬回的取值范围。

此题跳出了对于常系数的限制,升华到变系数的问题,不能不说明只要我们鼓励学生积极思考就能够有效地发展他们的思维独特性。

摇摇□数学发散思维的教学培养与训练(四)

发散思维被看做是创造思维的核心,培养学生发散性思维是培养创造能力的重要一环。安奋老师总结在数学教学中,培养学生的发散性思维可从以下方面着手:

员爰一题多解

在教学过程中,对于一些题,教师要引导学生尽可能用多种方法,

园

培养(中)

从各条途径寻求答案,并给以恰当评价,找出最优方法,培养学生思维的变通性。

例 员 解方程 $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}$

解法(员) 疫 $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}$ 将方程两边都除以 $\frac{\sin x}{\cos x}$ 得 $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}$, 即 $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}$,

亦其解集为 $\{x \mid \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}, x \in \mathbb{R}\}$.

解法(圆) 疫 $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}$ 将方程两边都乘以 $\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}}$ 得:

$$\frac{\sqrt{\cos x} \sin x}{\sqrt{\cos x} \cos x} = \frac{\sqrt{\cos x} \sin x}{\sqrt{\cos x} \cos x},$$

即 $\frac{\sqrt{\cos x} \sin x}{\sqrt{\cos x} \cos x} = \frac{\sqrt{\cos x} \sin x}{\sqrt{\cos x} \cos x}$,

$$\frac{\sqrt{\cos x} \sin x}{\sqrt{\cos x} \cos x} = \frac{\sqrt{\cos x} \sin x}{\sqrt{\cos x} \cos x},$$

亦其解集为 $\{x \mid \frac{\sqrt{\cos x} \sin x}{\sqrt{\cos x} \cos x} = \frac{\sqrt{\cos x} \sin x}{\sqrt{\cos x} \cos x}, x \in \mathbb{R}\}$.

解法(猿) 将原方程变为

$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}$ 原方程和差化积得:

$$\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\text{即 } \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x},$$

亦其解集为 $\{x \mid \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}, x \in \mathbb{R}\}$.

解法(源) 将原方程变形为

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x},$$

根据同名三角函数值若相等则有

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (\text{无解}),$$

$$\text{或 } \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\text{即 } \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x},$$

亦其解集为 $\{x \mid \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}, x \in \mathbb{R}\}$.

解法(缘) 将方程两边平方得:

员垣愿普越园, 泽愿普越原

亦其解集为 { 普普越噪, 噪 在 }。

另外还有解法 (远) 将原方程移项再两边平方 (苑) 将原方程变形为 噪普越员 ; (愿) 用万能公式等。

找出以上 愿种解法后, 教师要引导学生进行评价。指出前四种解法不仅简便而且不至于产生增根、遗根, 因此是重要的常用的方法。

圆由特殊到一般

在教学中, 对一些题可以进行由简到繁、由特殊到一般的推广。让学生大胆联想和猜想, 培养学生思维的广阔性。

例 圆求证 精普越 精普越 精普越 员愿

证明 精普越 精普越 精普越

摇摇 泽愿普越 精普越 精普越
圆普普越

摇摇 泽愿普越 精普越 泽愿普越
圆泽普越 圆泽普越

摇摇 泽愿普越 越愿
圆泽普越

其证明思路可以推广到下列

例 猿求证 :

精普圆 · 精普圆 ... 精普圆 越 泽普圆 (灶 晕)
圆泽普圆

证明 左边 越 精普圆 · 精普圆 ... 精普圆 · 泽普圆
圆泽普圆 圆泽普圆

越 精普圆 · 精普圆 ... 精普圆 · 泽普圆
圆泽普圆 圆泽普圆

越 泽普圆 圆泽普圆 摇摇亦原等式成立。

猿由一般到特殊

在数学教学中, 对一些题教师要引导学生分析其特殊性。要敢于