
同步训练

高一数学（二）

吉林教育出版社

目 录

第四章 三角函数	1
第一节 角的概念的推广	2
第二节 弧度制	3
第三节 任意角的三角函数	6
第四节 同角三角函数的基本关系式	7
第五节 正弦、余弦的诱导公式	9
第六节 两角和与差的正弦、余弦、正切	10
第七节 二倍角的正弦、余弦、正切	13
第八节 正弦函数、余弦函数的图象和性质	15
第九节 函数 $y = A \sin(\omega x + \phi)$ 的图象	17
第十节 正切函数的图象和性质	19
第十一节 已知三角函数值求角	21
综合能力测试	24
第五章 平面向量	26
第一节 向量	26
第二节 向量的加法与减法	28
第三节 实数与向量的积	30
第四节 平面向量的坐标运算	33
第五节 线段的定比分点	35
第六节 平面向量的数量积及运算律	38
第七节 平面向量数量积的坐标表示	40
第八节 平移	42
第九节 正弦定理、余弦定理	44
第十节 解斜三角形应用举例	46
第十一节 实习作业	48
第十二节 研究性课题 向量在物理中的应用	49
综合能力测试	50
期中测试题	62
期末测试题	64
参考答案	66

第四章 三角函数

知识体系

第一节 角的概念的推广

训练目标

1. 对象限角定义的前提

角的顶点为原点, 角的始边与 x 轴正半轴重合.

2. 与角 α 终边相同的角的表示式

$\beta = k \cdot 360^\circ + \alpha, k \in \mathbb{Z}$. 要注意 k, α 的取值范围, 任意角的表示形式不惟一, 要根据题意中角的范围, 具体处理.

3. 象限角与轴线角的区别

象限角的终边在四个象限内, 轴线角的终边必须在坐标轴上.

例题解析

例1 已知角 α 为第一象限角, 确定角 $\frac{\alpha}{2}$ 所在象限, 并画出变化区域.

解析 如果 α 为第一、二象限角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 在一、三象限, α 为三、四象限角时, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 为二、四象限.

解 首先写出角 α 的一般形式: $k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ (k \in \mathbb{Z})$, 两边同时除以 2, 得 $180^\circ \cdot k < \frac{\alpha}{2} < 180^\circ \cdot k + 45^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

(1) 当 k 为奇数时, 设 $k = 2n + 1, (n \in \mathbb{Z})$, 则

$2n + 1 \cdot 180^\circ < \frac{\alpha}{2} < 2n + 1 \cdot 180^\circ + 45^\circ (n \in \mathbb{Z})$, 此时 $\frac{\alpha}{2}$ 为第三象限的角;

(2) 当 k 为偶数时, 设 $k = 2n (n \in \mathbb{Z})$, 则

$n \cdot 360^\circ < \frac{\alpha}{2} < n \cdot 360^\circ + 45^\circ$ 此时 $\frac{\alpha}{2}$ 为第一象限角. 故角 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一或第三象限角. 变化区域如图 4-1 阴影部分.

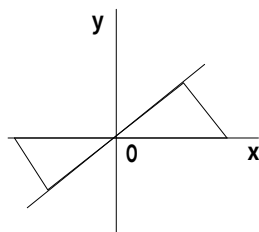


图 4-1

例2 若 α 和 β 的终边关于 y 轴对称, 则必有

()

A. $\alpha + \beta = 90^\circ$

B. $\alpha + \beta = 2k \cdot 180^\circ$

C. $\alpha + \beta = 360^\circ$

D. $\alpha + \beta = (2k + 1) \cdot 180^\circ$

解析 找出 α 与 β 之间的关系:

$\alpha = k \cdot 360^\circ + (180^\circ - \beta)$, 然后对关系式进行讨论.

解 $\because$ 角 α 与 β 的终边关于 y 轴对称,

$\therefore \alpha = k \cdot 360^\circ + 180^\circ - \beta, (k \in \mathbb{Z}), \therefore \alpha + \beta = k \cdot 360^\circ + 180^\circ = (2k + 1) 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$

故本题应选 D.

同步训练

一、填空题

1. 若将时钟拨慢 5 分钟, 则时针转了 _____ 度, 分针转了 _____ 度.

2. 角 α, β 的终边关于 $x + y = 0$ 对称, 且 $\alpha = -60^\circ$, 则 $\beta =$ _____.

3. 若 θ 角的终边与 288° 角的终边相同, 则在 $[0, 360^\circ)$ 内, 终边与 $\frac{\theta}{4}$ 角的终边相同的角是_____.

4. 已知 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角, 则 α 是 _____ 象限角.

二、选择题

1.命题 $P: \alpha$ 是第一象限角; 命题 $Q: \alpha$ 是锐角. 那么 P 是 Q 的 ()

A.充分非必要条件

B.必要非充分条件

C.充分且必要条件

D.既不充分也不必要条件

2.终边在坐标轴上的角的集合可表示为

$$A \left\{ \beta \mid \beta = \frac{k}{2} \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z} \right\}$$
$$B.\{\beta \mid \beta = k \cdot 180^\circ \pm 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$$

c. $\{ \beta \mid \beta = k \cdot 360^\circ \pm 90^\circ, k \in \mathbb{Z} \}$

$$D.\{ \beta | \beta = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z} \}$$

3. 若 α 是第四象限角, 则 $180^\circ - \alpha$ 是

A. 第一象限角

B. 第二象限角

C. 第三象限角

D. 第四象限角

4. 已知角 2α 的终边在 x 轴上方, 那么 α 是

A. 第一象限角

B. 第一、二象限角

C. 第一、三象限角

D. 第一、四象限角

三、解答题

1. 有一个小于 360° 的正角, 这个角的 7 倍角的终边与该角的终边重合, 求这个角.

2. 已知集合 $A = \{\alpha \mid \alpha = k \cdot 360^\circ + 30^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 120^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{\alpha \mid k \cdot 180^\circ + 60^\circ < \alpha < k \cdot 180^\circ + 135^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 求集合 $A \cap B$.

3. α 是第三象限角, 问 $-\alpha$ 是第几象限角.

4. 写出终边落在*一、二、三、四象限角平分线*上的角的集合.

第二节 弧度制

训练目标

1.熟悉弧度角的定义及弧度制.

2. 弧度制与角度制的换算, 只需掌握实质性关系 $180^\circ = \pi$ (弧度), 能准确熟练地记忆一些特殊角的弧度数, 在同一个式子中, 两种量角制不能混用.

3. 使用弧长公式 $l = \frac{n\pi R}{180}$ (其中 n 为圆心角的度数), 化简为 $l = |\alpha| \cdot R$ (α 是圆心角的弧度数).

4. 注意 $\sin 1^\circ$ 与 $\sin 1$ 的区别, 后者表示 1 弧度所对应的正弦值.

例题解析

例1 已知扇形的周长为30cm,当它的半径和圆心角各取什么值时,扇形的面积最大?最大面积是多少?

解析 本题运用扇形面积公式 $S = \frac{1}{2} lR$ 以及 l 与 R 的关系式, 用 R 表示 S , 然后根据 R 的表达式, 讨论 S 的最大值以及这时的半径与圆心角的取值.

解 设扇形半径为 $R\text{ cm}$, 则依题意, 有

$l=30-2R$, $S=\frac{1}{2}lR$, 可得 $S=\frac{1}{2}(30-2R)R$, 即

$S=-\left(R-\frac{15}{2}\right)^2+\frac{225}{4}$, 故当 $R=\frac{15}{2}\text{cm}$ 时, S 有最大值 $\frac{225}{4}\text{cm}^2$, 此时, $l=15\text{cm}$, 由 $|\alpha|=\frac{l}{R}$

$\therefore \alpha=2$.

故当 $R=\frac{15}{2}\text{cm}$, $\alpha=2$ 时, 扇形的面积 S 最大, 且最大值为 $\frac{225}{4}\text{cm}^2$.

例2 已知扇形的周长为 8cm , 面积为 3cm^2 , 求扇形圆心角的弧度数.

解 设扇形的圆心角为 α ($0 < \alpha < 2\pi$), 弧长为 l , 半径为 r , 则有
$$\begin{cases} l+2r=8 & \text{①} \\ \frac{1}{2}lr=3 & \text{②} \end{cases}$$
 由①得 $l=8-2r$

代入② 得 $r^2-4r+3=0 \therefore r=1$ 或 $r=3$, 当 $r=1$ 时, $l=6 \therefore \alpha=\frac{l}{r}=6$ 弧度 当 $r=3$ 时,

$l=2 \alpha=\frac{l}{r}=\frac{2}{3}$ 弧度.

同步训练

一、填空题

1. 如果 $x=n\pi+\frac{\pi}{4}$ ($n \in \mathbb{Z}$), 则 x 的终边在 _____ 象限, 又可以写成集合 _____ 与集合 _____ 的并集.

2. 一个扇形的面积为 1, 周长为 4, 则中心角的弧度数为 _____.

3. 已知 α, β 满足 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, 则 $\alpha-\beta$ 的范围是 _____.

4. 集合 $\left\{ \alpha \mid \alpha = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cap \{ \alpha \mid -\pi < \alpha < \pi \} =$ _____.

5. 单位圆圆周上一点 $A(1, 0)$ 依逆时针方向旋转, 已知点 A 经过 1 秒转过 θ 角 ($0 < \theta < \pi$), 经过 2 秒到达第三象限, 第 14 秒回到原来的位置, 则 $\theta =$ _____.

二、选择题

1. 设集合 $M = \left\{ x \mid x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$, $N = \left\{ x \mid x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ 则 M, N 之间的关系是 ()

A. $M \subset N$

B. $M = N$

C. $M \supset N$

D. $M \neq N$

2. 下列各组角中终边相同的是 ()

A. $2k\pi+1$ 与 $4k\pi+1$ ($k \in \mathbb{Z}$)

B. $\frac{k\pi}{2}$ 与 $k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

C. $k\pi + \frac{\pi}{6}$ 与 $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

D. $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ 与 $\frac{k\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

3. 一个半径为 R 的扇形, 它的周长是 $4R$, 则这个扇形所含弓形的面积是 ()

A. $\frac{1}{2}(2 - \sin 1 \cdot \cos 1) R^2$

B. $\frac{1}{2} R^2 \sin 1 \cdot \cos 1$

C. $\frac{1}{2} R^2$

D. $R^2 - \sin 1 \cdot \cos 1 \cdot R^2$

4. 如果弓形的弧所对的圆心角为 $\frac{\pi}{3}$, 弓形的弦长为 2cm , 则弓形的面积是 ()

A. $\left(\frac{\pi}{9} - 3 \right) \text{cm}^2$

B. $\left(\frac{\pi}{3} - 3 \right) \text{cm}^2$

C. $\left(\frac{2}{3}\pi - 3 \right) \text{cm}^2$

D. $\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{3}{2} \right) \text{cm}^2$

三、解答题

1. 一个扇形 OAB 的面积是 1cm^2 , 它的周长为 4cm , 求中心角的弧度和弧长 AB .
2. 自行车大链轮有 48 齿, 小链轮有 20 齿, 当大链轮转过一周时, 小链轮转过的角度是多少, 合多少弧度.

第三节 任意角的三角函数

训练目标

1. 由于用坐标定义三角函数, 因而坐标的符号即角的终边所在的象限决定三角函数值的符号.
2. 两个角的某三角函数值相等, 不一定是角的终边相同, 更不一定这两个角相等. 如 $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, 但 $\frac{\pi}{6} \neq \frac{5\pi}{6}$.
3. 特殊角的三角函数值, 在计算中易出错, 建议记住两个特殊三角形.

例题解析

- 例 1 (1) 已知 α 的终边经过点 $P(4, -3)$ 求 $2\sin\alpha + \cos\alpha$ 的值;
 (2) 已知角 α 的终边经过点 $P(a, -3)$ ($a \neq 0$), 求 $2\sin\alpha + \cos\alpha$ 的值.
- 解: (1) 由定义知 $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\therefore 2\sin\alpha + \cos\alpha = -\frac{2}{5}$;
 (2) 若 $a > 0$, 则 $2\sin\alpha + \cos\alpha = -\frac{2}{5}$; 若 $a < 0$, 则 $2\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{2}{5}$.

例 2 确定函数 $y = \lg(\sin x \cdot \cot x) + \csc x$ 的定义域.

解 根据题意 $\begin{cases} \sin x \cdot \cot x > 0 & (1) \\ \csc x \geq 0 & (2) \end{cases}$

由 (1) 得 $2k\pi - \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi$ 或 $2k\pi < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) (3)

由 (2) 得 $2k\pi < x < 2k\pi + \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) (5)

由 (3) (5) 可得函数定义域 $\left\{ x \mid 2k\pi < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

例 3 利用任意角的三角函数定义证明 $\frac{1 + \sec\alpha + \tan\alpha}{1 + \sec\alpha - \tan\alpha} = \frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha}$.

解析 用三角函数定义证明三角恒等式的前提是给定的式子都有意义, 然后利用转化的思想, 用“ x, y, r ”的比值代替三角函数值. $\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\tan\alpha = \frac{y}{x}$, 其中 $r^2 = x^2 + y^2$.

证明 依三角函数定义有

$$\text{左边} = \frac{1 + \frac{r}{x} + \frac{y}{x}}{1 + \frac{r}{x} - \frac{y}{x}} = \frac{x + r + y}{x + r - y} = \frac{(x + r + y)(x - r - y)}{(x + r - y)(x - r - y)} = \frac{r + y}{x}$$

$$\text{右边} = \frac{1 + \frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{r + y}{x}, \therefore \text{原等式成立.}$$

同步训练

一、填空题

1. 若 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{2}{3}$, 则 θ 是第_____象限角.

2. 利用单位圆, 借助三角函数线比较下列各组值的大小. (1) $\sin \frac{3}{5}\pi, \sin \frac{4}{5}\pi, \sin \frac{9}{10}\pi$ _____

(由大到小); (2) $\cos 1, \cos 2, \cos 5$ _____ (由大到小).

3. 已知 α 是第三象限角, 试确定下列各式号 $\sin\alpha + \cos\alpha$ _____ 0, $\tan\alpha - \sin\alpha$ _____ 0.

4. 已知 α 的终边经过点 $(a-9, a+2)$ 且 $\cos\alpha \leq 0, \sin\alpha > 0$, 则 a 的取值范围是_____.

5. 若实数 x 满足 $\log_x = 2 + \sin\theta$, 则 $|x+1| - |x-10|$ 的值域是_____.

二、选择题

1. 下列判断中错误的是_____ ()

A. α 一定时, 单位圆中的正弦线一定

B. 在单位圆中, 有相同正弦线的角相等

C. 角 α 和 $\alpha + \pi$ 具有相同的正切线

D. 具有相同正切线的两个角终边在同一直线上

2. 已知集合 $E = \{\theta | \cos\theta < \sin\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, $F = \{\theta | \tan\theta < \sin\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ 且 } \theta \neq \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \frac{3\pi}{2}\}$ 那么 $E \cap F$ 的区

间是_____ ()

A. $(\frac{\pi}{2}, \pi)$

B. $(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{2}\pi)$

C. $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$

D. $(\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi)$

3. $\sin\alpha \neq \sin\beta$ 是 $\alpha \neq \beta$ 的_____ ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 若 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $\sin\theta + \cos\theta$ 的一个可能值是_____ ()

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{2}{7}\pi$

C. $\frac{4}{5}$

D. 1

5. 已知角 α 的终边过点 $P(-4t, 3t)$ ($t \in \mathbb{R}$ 且 $t \neq 0$), 则 $2\sin\alpha + \cos\alpha$ 等于_____ ()

A. ± 1

B. $\pm \frac{2}{5}$

C. $-\frac{2}{5}$

D. $\frac{2}{5}$

三、解答题

1. 计算下列三角函数式的值:

$$(1) \sin \frac{7}{3}\pi \cos \frac{25}{6}\pi - 3 \sin\left(-\frac{23}{6}\pi\right) \cos\left(-\frac{11}{3}\pi\right);$$

$$(2) \tan 405^\circ \sin 90^\circ + \cot 765^\circ \cos 180^\circ - \tan(-300^\circ) + \sin 270^\circ \cot(-690^\circ).$$

2. 已知 $\sin\alpha$ 是方程 $5x^2 - 7x - 6 = 0$ 的根, 求 $\sin^2\left[\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi - \alpha\right] \cos^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \cot\left(\frac{19\pi}{2} - \alpha\right)$ ($k \in \mathbb{Z}$) 的值.

3. 已知 $a \sin\theta + b \cos\theta = c$, $b \sin\theta + a \cos\theta = d$, 求证: $(ac - bd)^2 + (ad - bc)^2 = (a^2 - b^2)^2$.

4. 设 $0 < x < \frac{\pi}{4}$, 试确定 $\sin(x)$, $\sin x$, $\sin(\tan x)$ 的大小.

5. 如果 $\tan\alpha \sin\alpha < 0$ 且 $0 < \sin\alpha + \cos\alpha < 1$, 那么 α 终边在第几象限.

6. 求函数 $f(x) = \log_{\cos x} \frac{1}{\sin 2x - 1}$ 的定义域.

第四节 同角三角函数的基本关系式

训练目标

1. 同角公式 (三类八式) 反映了同角的各三角函数间的基本关系, 利用这些公式可以根据一个角的任意一个三角函数值, 通过恒等变形求此角的其余三个三角函数值, 还可以进行化简、证明.

2. 同角三角函数式的应用有以下三个方面:

- ① 已知一个角的三角函数值, 求同角的其他三角函数值;
- ② 三角函数式的化简;
- ③ 三角函数恒等式的证明.

例题解析

例1 已知 $\sin \alpha = m$ ($|m| \leq 1$), 求 α 的其他五个三角函数的值.

解析 本题 $\sin \alpha = m$ ($|m| \leq 1$), 未给出具体数值, 这样题型较好的解法是“先平方, 后倒商”即首先选与 $\sin \alpha$ 有平方关系的三角函数 $\cos \alpha$, 由 $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - m^2}$ 中正负号的选取, 分象限求其他三角函数值, 即分 α 在第一、四和第二、三象限两种情况, 接下来用倒数关系及商数关系, 就不存在符号问题了. 对于 $\sin \alpha = m$ ($|m| \leq 1$), 除了讨论 α 是象限角情况外 ($|m| < 1$), 还应讨论 α 是轴线角的情况 ($|m| = 1$).

解 ① 当 $m = 1$ 时, $\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, ($k \in \mathbb{Z}$) 从而 $\cos \alpha = 0$, $\csc \alpha = 1$, $\cot \alpha = 0$, $\sec \alpha$ 和 $\tan \alpha$ 不存在.

② 当 $m = -1$ 时, $\alpha = 2k\pi + \frac{3}{2}\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$) 从而 $\cos \alpha = 0$, $\cot \alpha = 0$,

$\csc \alpha = -1$, $\sec \alpha$, $\tan \alpha$ 不存在.

③ 当 $m = 0$ 时, $\alpha = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) 从而当 k 是偶数时 $\cos \alpha = 1$, $\sec \alpha = 1$, $\tan \alpha = 0$, $\cot \alpha$ 和 $\csc \alpha$ 不存在. 当 k 是奇数时 $\cos \alpha = -1$, $\sec \alpha = -1$, $\tan \alpha = 0$, $\cot \alpha$ 和 $\csc \alpha$ 不存在.

5 当 $0 < |m| < 1$ 时, $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - m^2}$. 当 α 为第一、四象限时,

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - m^2}, \sec \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}}, \csc \alpha = \frac{1}{m}, \tan \alpha = \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}, \cot \alpha = \frac{\sqrt{1 - m^2}}{m}.$$

当 α 为二、三象限时, $\cos \alpha = -\sqrt{1 - m^2}$, $\csc \alpha = \frac{1}{m}$, $\sec \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 - m^2}}$, $\tan \alpha = -\frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}$,

$$\cot \alpha = -\frac{\sqrt{1 - m^2}}{m}.$$

例2 化简 ① $\frac{1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta}$;

$$\textcircled{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \csc^2 \alpha}}}$$

解: ① 原式 = $\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) + \cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)}{\sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) + \cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)} = \frac{3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \frac{3}{2}$;

$$\textcircled{2} \text{原式} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \csc^2 \alpha}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sec^2 \alpha}} = \frac{1}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \csc^2 \alpha.$$

同步训练

一、填空题

1. 已知 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 是方程 $2x^2 - x - m = 0$ 的两根, 则 $m =$ _____.
2. 已知角 α 满足 $\sin \alpha = -\frac{5}{3}$, 则 $\tan \alpha =$ _____.
3. 如果 $\sin x + \cos x = 1$, 那么 $\sin^n x + \cos^n x$ ($n \in \mathbb{N}$) 的值是 _____.
4. 如果锐角 θ 满足 $\log (\tan \theta + \cot \theta)^{\sin \theta} = -\frac{3}{4}$, 求 $\log \tan \theta^{\cos \theta} =$ _____.

二、选择题

1. $\sin \alpha - \cos \alpha = -\frac{5}{2}$, 则 $\tan \alpha + \cot \alpha$ 的值是 ()
 A. -4 B. 4 C. -8 D. 8
2. 若 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $\sin x \cos x = \frac{1}{2}$, 则 $\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1+\cos x}$ 的值为 ()
 A. $39+10\sqrt{5}$ B. $9-2\sqrt{15}$ C. $9+2\sqrt{5}$ D. $4-2\sqrt{2}$
3. 如果角 θ 满足条件 $\begin{cases} \sin \theta = \frac{k-3}{k+5} \\ \cos \theta = \frac{4-2k}{k+5} \end{cases}$ 则角 θ 在 ()
 A. 第二象限 B. 第二或第四象限
 C. 第四象限 D. 第一或第三象限
4. 设 $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, ($k \in \mathbb{Z}$), $m = \frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + \cot \alpha}$, 那么 ()
 A. $m < 0$ B. $m > 0$ C. m 可能为 0 D. m 符号不定
5. $\tan \alpha = -2$, 则 $\frac{1}{4} \sin^2 \alpha + \frac{2}{5} \cos^2 \alpha$ 的值等于 ()
 A. $\frac{17}{25}$ B. $\frac{25}{7}$ C. $\frac{7}{25}$ D. $\frac{25}{17}$
6. $\frac{\sin^2 \theta + 4}{\cos \theta + 1} = 2$, 则 $(\cos \theta + 3) \cdot (\sin \theta + 1)$ 的值等于 ()
 A. 4 B. 0 C. 2 D. 0 或 4

三、解答题

1. 求证 $\sec^2 \alpha \cdot \csc^2 \alpha = \sec^2 \alpha + \csc^2 \alpha$.
2. 已知 $\cot^2 \alpha \cos^2 \alpha$ 是方程 $x^2 + px + 1 = 0$ 的根, 求参数 p .
3. 已知 $\tan \beta = -3$ 求值:
 (1) $\frac{3 \sin \beta - 2 \cos \beta}{2 \sin \beta + \cos \beta}$; (2) $4 \sin^2 \beta - 3 \sin \beta \cos \beta$; (3) $\frac{5 \sin^2 \beta + \cos \beta}{2 \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cdot \cos \beta}$.
4. 已知 $a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta = m$, $b \sin^2 \phi + a \cos^2 \phi = n$, $a \tan \theta = b \cdot \tan \phi$ ($a \neq b, a \neq m, b \neq n$), 求证: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$.

第五节 正弦、余弦的诱导公式

训练目标

1. 课本中的五组同名三角函数的公式 $k\pi \pm \alpha$ 或 $k \cdot 180^\circ \pm \theta$ ($k \in \mathbb{Z}$) 与 α 或 θ 各三角函数关系可用“函数名不变, 符号看象限”来概括并记忆. 所谓符号看象限, 即将 θ 看成锐角, 取 $k\pi \pm \theta$ 所在象限的其三角函数的符号. 如 $\cos(\pi - \theta)$, 将 θ 看成锐角, 则 $\pi - \theta$ 在第二象限, 这时余弦值小于 0, 所以 $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$.

2. 利用诱导公式, 求任意角三角函数值, 或化简三角函数式时, 一般可按下列步骤进行:

① 把负角的三角函数化为正角的三角函数.

② 利用终边相同的角三角函数公式, 把大于 360° 的角, 化为 $0^\circ \sim 360^\circ$ 或 $0 \sim 2\pi$ 的角的三角函数.

③ 利用诱导公式化为锐角三角函数的值.

例题解析

例 1 求下列各式的值:

$$\textcircled{1} \frac{\sin 180^\circ + \alpha \cos 660^\circ + \alpha}{\sin(-\alpha)} + \frac{\sin 180^\circ - \alpha \cos(-\alpha)}{\sin 660^\circ - \alpha};$$

$$\textcircled{2} \frac{\cos^2 \beta \pi - \alpha}{\cos^2(-\alpha)} - \frac{\sin(-\alpha + 4\pi) \sin(-\alpha - \pi)}{\sin^2 \beta \pi + \alpha \cos(\pi + \alpha)}.$$

解: ① 原式 = $\frac{-\sin\alpha \cos\alpha}{-\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{-\sin\alpha} = 0$;

$$\textcircled{2} \text{原式} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{\sin(-\alpha) \sin(\pi + \alpha)}{\sin^2 \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{1}{\cos \alpha} = 0.$$

例 2 求证 $\frac{\cos(\alpha - \pi) \cot 6\pi - \alpha}{\tan 6\pi - \alpha \sin(\pi + \alpha)} = \cot^2 \alpha$.

$$\begin{aligned} \text{证明 左边} &= \frac{\cos(\pi - \alpha) \cos 6\pi - \alpha \cos \beta \pi - \alpha}{\sin(\pi + \alpha) \sin 6\pi - \alpha \sin \beta \pi - \alpha} = \frac{-\cos \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos(\pi - \alpha)}{-\sin \alpha \cdot \sin(-\alpha) \cdot \sin(\pi - \alpha)} = \frac{-\cos^2 \alpha \cdot (-\cos \alpha)}{\sin^2 \alpha \cdot \sin \alpha} = \\ &= \frac{\cos^3 \alpha}{\sin^3 \alpha} = \cot^2 \alpha. \end{aligned}$$

同步训练

一、填空题

1. 若 $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{3}{5}$, 则 $\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \alpha\right) - \sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) =$ _____.

2. 已知 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos(\alpha + \beta) = 1$, 则 $\sin 2\alpha + \beta =$ _____.

3. $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin(A + B - C) = \sin(A - B + C)$, 则 $\triangle ABC$ 是 _____ 三角形.

4. $\frac{\sin(k\pi - x)}{\sin x} - \frac{\cos x}{\cos(k\pi - x)}$ 的取值范围是 _____. (其中 $k \in \mathbb{Z}$)

5. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\pi x + \alpha) + 3\cos(\pi x + \beta) + 4$, 其中 α, β 是非零实数, 且满足 $f(2001) = 3$, 则 $f(2002) =$ _____.

二、选择题

1. 已知 $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{3}{5}$, 则 _____ ()

$$A. \cos \alpha = \frac{4}{5} \quad B. \tan \alpha = \frac{3}{4} \quad C. \sec \alpha = -\frac{5}{4} \quad D. \sin (\pi - \alpha) = \frac{3}{5}$$

2. 已知 $\alpha + \beta = 3\pi$, 则下列等式中一定成立的是 ()

$$A. \sin \alpha = \sin \beta \quad B. \cos \alpha = \cos \beta \quad C. \tan \alpha = \tan \beta \quad D. \cot \alpha = \cot \beta$$

3. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(\cos x) = \frac{x}{2}$ ($\pi \leq x \leq 2\pi$), 则 $f(-\frac{1}{2})$ 等于 ()

$$A. -\cos \frac{1}{2} \quad B. \frac{2\pi}{3} \quad C. \frac{5\pi}{6} \quad D. \frac{\pi}{4}$$

4. 对于任意的整数 k , 则 $\frac{\sin(k\pi - \alpha) \cos(k\pi + \alpha)}{\sin[(k+1)\pi + \alpha] \cos[(k+1)\pi - \alpha]}$ 等于 ()

$$A. -1 \quad B. 0 \quad C. 1 \quad D. 2$$

5. 已知 $\cos(\pi + \alpha) = -\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2} < \alpha < 2\pi$, 则 $\sin 2\pi - \alpha$ 的值为 ()

$$A. -\frac{1}{2} \quad B. \pm \frac{3}{2} \quad C. \frac{3}{2} \quad D. -\frac{3}{2}$$

三、解答题

1. 求函数 $y = 2^{\lg \sin 40^\circ + x}$ 的最大值.

2. 求证 $\sin^3(-\alpha) \cos 2\pi + \alpha \tan(-\alpha - \pi) = \sin^4 \alpha$.

3. 已知 $f(n) = \sin \frac{n\pi}{4}$ ($n \in \mathbb{Z}$)

(1) 求证: $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(8) = f(9) + f(10) + \cdots + f(16)$;

(2) 求 $f(1) + f(2) + \cdots + f(1994)$ 的值.

4. 设 $f(\theta) = \frac{2\cos^3 \theta + \cos^2 2\pi - \theta + \cos(-\theta - 3)}{2 + 2\cos^2(\pi + \theta) + \cos 2\pi - \theta}$, 求 $f(\frac{\pi}{3})$ 的值.

第六节 两角和与差的正弦、余弦、正切

训练目标

1. 两角和的余弦公式是整章三角公式的基础, 它的推导思想是独有的, 公式具有一般性.

2. $S_{\alpha \pm \beta}$ 、 $C_{\alpha \pm \beta}$ 是 α, β 为任意角时的恒等式; $T_{\alpha \pm \beta}$ 是 $\alpha, \beta, \alpha \pm \beta$ 使等式两端均有意义时成立的等式.

3. $T_{\alpha \pm \beta}$ 的变用要多于其原始形式的套用.

4. 诱导公式的记忆 对于 $\frac{k\pi}{2} + \theta$ ($k \in \mathbb{Z}$), 记忆口诀“奇变偶不变, 符号看象限”. 指 k 为奇数时, 函数名称改变 (即正弦、余弦互变, 正切、余弦互变), k 为偶数时, 函数名称不变. “符号看象限”指在三角函数的诱导公式中, 不管角 α 是什么样的角, 都把它看做锐角来确定诱导公式中角所在的象限, 然后根据原函数的角所在象限来确定它的符号.

例题解析

例 1 已知 $\cos(\alpha - \frac{\beta}{2}) = -\frac{1}{9}$, $\sin(\frac{\alpha}{2} - \beta) = \frac{2}{3}$, 且 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, 求 $\cos \frac{\alpha + \beta}{2}$.

解 $\because \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < -\beta < 0, \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} < -\frac{\beta}{2} < 0$

$\therefore \frac{\pi}{4} < \alpha - \frac{\beta}{2} < \pi, -\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} - \beta < \frac{\pi}{2}$.

$$\text{又} \because \cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) = -\frac{1}{9} < 0, \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) = \frac{2}{3} > 0,$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} < \alpha - \frac{\beta}{2} < \pi, 0 < \frac{\alpha}{2} - \beta < \frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore \sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) = 1 - \cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) = 1 - \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{10}{9},$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) = 1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

$$\therefore \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\left[\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - \left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)\right] = \cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) +$$

$$\sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) = -\frac{1}{9} \times \frac{1}{3} + \frac{10}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{19}{27}.$$

例2 已知 $\tan\alpha = \frac{1}{7}$, $\tan\beta = \frac{1}{3}$, 且 α, β 都是锐角, 求证 $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}$.

证明 $\because \tan\beta = \frac{1}{3}$,

$$\therefore \tan 2\beta = \tan(\beta + \beta) = \frac{\tan\beta + \tan\beta}{1 - \tan\beta \cdot \tan\beta} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}, \text{ 且 } 2\beta \text{ 是锐角},$$

$$\text{又 } \tan(\alpha + 2\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan 2\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan 2\beta} = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4}} = 1,$$

由 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < 2\beta < \frac{\pi}{2}$, 得 $0 < \alpha + 2\beta < \pi$.

在区间 $(0, \pi)$ 内, 只有 $\frac{\pi}{4}$ 的正切值等于 1,

$$\therefore \alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}.$$

例3 设 $\tan\alpha, \tan\beta$ 是方程 $mx^2 + (2m-3)x + (m-2) = 0$ 的两根, 求 $\tan(\alpha + \beta)$ 的最小值.

解 由已知 $\tan\alpha, \tan\beta$ 是方程的两根.

$$\therefore (10) = (2m-3)^2 - 4m(m-2) \geq 0,$$

$$\therefore m \leq \frac{9}{4}, \begin{cases} \tan\alpha + \tan\beta = \frac{-2m+3}{m} \\ \tan\alpha \cdot \tan\beta = \frac{m-2}{m} \end{cases}$$

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} = \frac{\frac{-2m+3}{m}}{1 - \frac{m-2}{m}} = \frac{3-2m}{2}.$$

$$\because m \leq \frac{9}{4}, \therefore \frac{3-2m}{2} \geq -\frac{3}{4}, \text{ 即 } \tan(\alpha + \beta) \geq -\frac{3}{4}, \therefore \tan(\alpha + \beta) \text{ 的最小值为 } -\frac{3}{4}.$$

同步训练

一、填空题

1. 已知 $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0$, $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0$, 则 $\cos(\alpha - \beta) =$ _____.

2. $\frac{\sin 7^\circ + \cos 15^\circ \sin 8^\circ}{\cos 7^\circ - \sin 15^\circ \sin 8^\circ} =$ _____.

3. 设 $\frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = 4 + 3$, 则 $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ _____.

4. $\frac{3 - \tan 15^\circ}{1 + 3 \tan 15^\circ} =$ _____.

5. 若 $13\sin\alpha + 5\cos\beta = 9$, $13\cos\alpha + 5\sin\beta = 15$, 则 $\sin(\alpha + \beta) =$ _____.

6. 设 $\sin(\alpha + 2\beta) = 3\sin\alpha$, 则 $\frac{\tan(\alpha + \beta)}{\tan\beta} =$ _____.

二、选择题

1. 在锐角三角形中, 一定有 ()

A. $\log_{\cos C} \frac{\sin A}{\cos B} > 0$ B. $\log_{\sin C} \frac{\sin A}{\sin B} > 0$ C. $\log_{\sin C} \frac{\sin A}{\cos B} > 0$ D. $\log_{\cos C} \frac{\cos A}{\sin B} > 0$

2. α, β, γ 都是锐角, $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, $\tan\beta = \frac{1}{5}$, $\tan\gamma = \frac{1}{8}$, 则 $\alpha + \beta + \gamma$ 等于 ()

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{5\pi}{6}$ D. $\frac{5\pi}{4}$

3. $y = \sin x + 3 \cos x$ ($x \in \mathbb{R}$) 的最大值是 ()

A. 1 B. 2 C. $1 + 3$ D. 3

4. 若 $\tan\beta = -\frac{1}{7}$, $\tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$, 且 $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, 则 $2\alpha - \beta$ 的值的 ()

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $-\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{4}$ 或 $-\frac{3\pi}{4}$ D. $\frac{3\pi}{4}$

5. 已知 $\tan\alpha, \tan\beta$ 是方程 $x^2 + 3x + 4 = 0$ 的两根, 且 $\alpha, \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 则 $\alpha + \beta$ 等于 ()

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $-\frac{2}{3}\pi$ C. $\frac{\pi}{3}$ 或 $-\frac{2}{3}\pi$ D. $-\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2}{3}\pi$

三、解答题

1. 求 $\frac{2\cos 10^\circ - \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$ 的值.

2. 求 $[\sin 50^\circ + \sin 10^\circ (1 + 3 \tan 10^\circ)] \cdot 2 \sin 80^\circ$ 的值.

3. 已知 $5 \sin\beta = \sin(2\alpha + \beta)$, 求证 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{3}{2} \tan\alpha$.

4. 证明 $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \tan 2x$.

5. 已知 $\triangle ABC$ 中, 内角 A、B、C 的度数成等差数列且 $\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos C} = -\frac{2}{\cos B}$, 求 $\cos \frac{A-C}{2}$ 的值.

6. 已知 $\tan\alpha, \tan\beta$ 是关于 x 的方程 $m x^2 - 2x - 7m - 3 + 2m = 0$ 的两个实数根, 求 $\tan(\alpha + \beta)$ 的取值范围.

第七节 二倍角的正弦、余弦、正切

训练目标

三角函数的二倍角公式是教学的重点,它是两角和公式的特殊情况,它在三角求值,化简,证明恒等式中应用广泛,如何创造条件使用倍角公式,是活用公式的关键. 4α 是 2α 的二倍, $\frac{\alpha}{3}$ 是 $\frac{\alpha}{6}$ 的二倍,……,由此可见,任意角都是它半角的二倍.而公式 $1+\cos 2\alpha=2\cos^2 \alpha$, $1-\cos 2\alpha=2\sin^2 \alpha$,双向应用分别起缩角升幂和扩角降幂的作用.由公式 $\sin 2x=2\sin x\cos x$,可知 $1\pm\sin 2x=(\sin x\pm\cos x)^2$,可进行无理式的化简和运算.

例题解析

例1 设 α, β 是锐角, $\tan\alpha=\frac{1}{7}$, $\sin\beta=\frac{10}{10}$,求 $\alpha+2\beta$ 的值.

解析 由 $\sin\beta$ 求出 $\tan\beta$ 进而求出 $\tan 2\beta$,再取 $\alpha+2\beta$ 的正切值,并由 α, β 的范围确定 $\alpha+2\beta$ 的值.

解 $\because \beta$ 是锐角, $\sin\beta=\frac{10}{10}$,

$$\therefore \cos\beta=\frac{3}{10}, \tan\beta=\frac{1}{3}, \therefore \tan 2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{4}.$$

$$\text{又 } \tan(\alpha+2\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan 2\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan 2\beta}=\frac{\frac{1}{7}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{3}{4}}=1 \quad \textcircled{1}$$

$$\because \beta\text{是锐角且}\sin\beta=\frac{10}{10}<\frac{2}{2}, \therefore 0<\beta<\frac{\pi}{4}, 0<2\beta<\frac{\pi}{2},$$

$$\therefore 0<\alpha+2\beta<\pi \quad \textcircled{2}$$

$$\text{由}\textcircled{1}、\textcircled{2}\text{得 } \alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}.$$

例2 求函数 $y=\cos^2 x+\sin x\cdot\cos x$ 的值域.

解析 由 $\sin x\cdot\cos x$ 易想到 $\sin 2x$,由降幂公式将 $\cos^2 x$ 用 $\cos 2x$ 来表示,再化为一个角的一个三角函数的形式即可求得.

$$\text{解 } y=\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}\left(\frac{2}{2}\sin 2x+\frac{2}{2}\cos 2x\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\therefore -1\leq\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leq 1, \therefore \frac{1-2}{2}\leq y\leq\frac{1+2}{2}.$$

$$\therefore \text{函数 } y=\cos^2 x+\sin x\cdot\cos x \text{ 的值域为 }\left[\frac{1-2}{2}, \frac{1+2}{2}\right].$$

同步训练

一、填空题

1. 已知 $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{3}$, $\cos 2\alpha = -\frac{5}{13}$, α 与 β 均为钝角, 那么 $\sin(\alpha - \beta) =$ _____.

2. 化简 $\frac{\sin \theta + \sin 2\theta}{1 + \cos \theta + \cos 2\theta} =$ _____.

3. 已知 $\cot \theta = 3$, 则 $\frac{1}{2} \sin 2\theta + \cos^2 \theta =$ _____.

4. $\sin 6^\circ \cdot \sin 42^\circ \cdot \sin 66^\circ \cdot \sin 78^\circ =$ _____.

5. $1 + \cos 4 =$ _____.

6. $\cos \frac{\pi}{11} \cdot \cos \frac{2\pi}{11} \cdot \cos \frac{3\pi}{11} \cdot \cos \frac{4\pi}{11} \cdot \cos \frac{5\pi}{11} =$ _____.

二、选择题

1. 化简 $\tan(45^\circ + A) - \tan(45^\circ - A)$ 为 ()

A. $2 \tan A$ B. $-2 \tan A$ C. $2 \tan 2A$ D. $-2 \tan 2A$

2. $2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2$ 等于 ()

A. $1 + \sin \alpha$ B. $1 + \frac{1}{2} \sin \alpha$ C. $1 + \sin \frac{\alpha}{2}$ D. 1

3. 条件“ $\tan(\alpha - \beta) = 0$ ”是“ $\tan \alpha - \tan \beta = 0$ ”的 ()

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 既不充分也不必要条件 D. 充要条件

4. 若 $\sin 2\theta = \frac{1}{16}$, $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right)$, 则 $\sin \theta - \cos \theta$ 的值为 ()

A. $\frac{5}{16}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $-\frac{15}{4}$ D. $-\frac{15}{4}$

5. 函数 $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \cos\left(\frac{5}{2}\pi + x\right)$ 的最大值、最小值分别是 ()

A. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ B. 1, -1 C. 1, 0 D. $\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$

6. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ 的值为 ()

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{16}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

三、解答题

1. 求证 $\cos^2(\alpha - \beta) - \cos^2(\alpha + \beta) = \sin 2\alpha \sin 2\beta$.

2. 求 $\sec 50^\circ + \cot 80^\circ$ 的值.

3. 求证 $\frac{3 + 4 \cos 2A + \cos 4A}{3 - 4 \cos 2A + \cos 4A} = \cot^2 A$.

4. 求证 $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2(\cos \alpha - \sin \alpha)}{1 + \sin \alpha + \cos \alpha}$.

5. 已知 $\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) = -\frac{1}{9}$, $\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) = \frac{2}{3}$, 且 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, 求

$\cos(\alpha + \beta)$ 的值.

6. 如图 4-2, 已知扇形薄铁板的半径为 1 m, 中心角为 60° , 四边形 PQRS 是扇形的内接矩形, P 点在怎样的位置上, 截得的矩形面积最大? 最大面积是多少? (精确到 0.01 m^2)

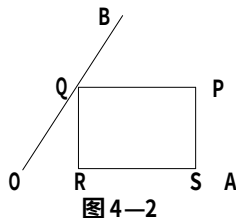


图 4-2

第八节 正弦函数、余弦函数的图象和性质

训练目标

根据三角函数的图象研究三角函数的性质要注意以下几方面：

1. 利用“五点法”作图，关键是选定一个周期，然后将这个周期四等分，根据三个等分点及两个端点（起点和终点），所对应的函数值所确定的点，决定函数图象的形状。

2. 函数的周期是对定义域内的任意值使函数值重复出现，自变量自身需要加的非零常数，即使 $f(x+T) = f(x)$ 成立的非零常数 T ，周期是对自变量自身而言的。正余弦函数的周期为 $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$ 且 $k \neq 0$)，最小正周期为 2π 。

3. 三角函数的单调性，受周期性的影响，每个周期内分别有两个不同单调区间，单调区间是区间角，而不是象限角。

4. 三角函数的图象与 x 轴的交点是其对称中心，正弦曲线的对称中心 $(k\pi, 0)$ ，余弦曲线的对称中心是 $(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0)$ 。

5. 正弦曲线的对称轴方程为 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ，余弦曲线的对称轴方程 $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)。

例题解析

例1 设函数 $f(x) = \sin^2 x + \cos x + \frac{5}{8}a - \frac{3}{2}$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 的最大值为 1，试确定 a 的值。

解： $f(x) = -(\cos x - \frac{a}{2})^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{5}{8}a - \frac{1}{2}$, $\cos x \in [0, 1]$

① $\frac{a}{2} \in [0, 1]$ ，即 $a \in [0, 2]$ 时，要使 $f(x)_{\max} = 1$

则 $\frac{a^2}{4} + \frac{5}{8}a - \frac{1}{2} = 1 \quad \therefore a = \frac{3}{2}$ 或 $a = -4$ (舍)

② $\frac{a}{2} < 0$ ，即 $a < 0$ 时，要使 $f(x)_{\max} = 1$

则 $\frac{5}{8}a - \frac{1}{2} = 1 \quad \therefore a = \frac{12}{5}$ (舍)

③ $\frac{a}{2} > 1$ ，即 $a > 2$ 时，要使 $f(x)_{\max} = 1$

则 $-1 + a + \frac{5}{8}a - \frac{1}{2} = 0 \quad \therefore a = \frac{12}{13}$ (舍)

$\therefore$ 综上所述 $a = \frac{3}{2}$ 时， $f(x)_{\max} = 1$ 。

例2 已知奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = f(x-1)$ ，对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都成立，又当 $x \in (-1, 0)$ 时， $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ ，求 $f(\frac{5}{2})$ 。

解：令 $x-1=t$ ，则 $x=t+1$ ，由已知 $f(x+1) = f(x-1)$ ($x \in \mathbb{R}$)

得 $f(t+2) = f(t)$ ，对任意 $t \in \mathbb{R}$ 都成立，即 $T=2$ 是函数 $f(x)$ 的周期。

$\therefore f(\frac{5}{2}) = f(\frac{5}{2}+2) = f(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}+2) = f(\frac{5}{2}) = f(\frac{1}{2}+2) = f(\frac{1}{2})$ 。