数学奥林匹克小丛书·初中卷

四边形:从分解到组合

沈文选　冷岗松　编著

华东师范大学出版社

1 四边形的基本概念与性质

1.1 四边形的基本概念与三角形

四边形是人们日常生活和生产中应用较广的一种几何图形，是平面几何中的基本图形，也是平面几何研究的主要对象. 四边形有凸四边形（每一个内角均小于平角）、凹四边形（有一个内角大于平角）和折四边形（有两条边相交），这里我们只讨论凸四边形和特殊凸四边形. 对于平行四边形、矩形、菱形、正方形、梯形等特殊凸四边形，它们有着一系列美妙的性质，我们将在以后各节分别介绍.

凸四边形有四条边，四个内角. 凸四边形的全等是要求对应边都相等且对应角都相等，凸四边形的相似是要求对应角都相等且对应边都成比例. 凸四边形的内角和为 360°，其外角和也为 360°. 连接凸四边形两个不相邻的顶点的线段称为四边形的对角线. 凸四边形的每条对角线将四边形分割成两个三角形. 因此，开始研究凸四边形时，常通过作辅助线把四边形转化为三角形，运用三角形的知识来研究四边形问题. 例如，前述的四边形的内角和定理即是. 但当我们获得了四边形的这些基本性质后，就可直接运用这些性质，不必再回到三角形的方法中去了. 值得注意的是，在求解某些四边形问题时，常常将四边形分割成一些三角形或将四边形补形成三角形来处理.

例 1 （1）一个凸四边形的四个内角之比为 $1:5:6:6$，求四个内角的度数；

（2）凸四边形的四个内角可能都是钝角吗？最多有几个钝角？最少有几个钝角？

解 （1）设凸四边形的最小内角为 x°，则其他三个内角分别为 $5x^{\circ}$，$6x^{\circ}$，$6x^{\circ}$，根据四边形内角和定理，知

$$x+5x+6x+6x=360.$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADF$ 中,可得

$$DF=\sqrt{AD^2-AF^2}=\sqrt{9-\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle CDF$ 中,可得

$$CD=\sqrt{CF^2+FD^2}=\sqrt{\frac{81}{4}+\frac{27}{4}}=3\sqrt{3}.$$

另解:过 B 作 $BE\perp AC$ 于 E,则 $AE=3$,连 ED,可推证得$\triangle AED$ 为正三角形,则 $ED=AE=EC$,知$\triangle ADC$ 为直角三角形,$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=3\sqrt{3}$.

例 4 如图 1-3,四边形 $ABCD$ 中,$\angle A=60°$,$\angle B=\angle D=90°$,$AD=8$,$AB=7$,则 $BC+CD$ 等于(　　).

A. $6\sqrt{3}$　　B. $5\sqrt{3}$　　C. $4\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{3}$

(2003 年山东省竞赛题)

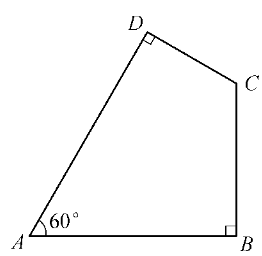


图 1-3

解 选 B. 理由:延长 AD、BC 相交于 E,在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$中,由 $\angle A=60°$,有 $AE=2AB=14$,从而 $DE=AE-AD=6$,又可求得 $BE=7\sqrt{3}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中,可求得 $CD=2\sqrt{3}$,$CE=4\sqrt{3}$.

于是 $BC=BE-CE=3\sqrt{3}$,故 $BC+CD=5\sqrt{3}$.

例 5 (1)如图 1-4,已知四边形 $ABCD$ 中,$AB=AD$,$\angle BAD=60°$,$\angle BCD=120°$. 证明:$BC+DC=AC$.

(2)如图 1-5,四边形 $ABCD$ 中,$AB=BC$,$\angle ABC=60°$,P 为四边形 $ABCD$ 内一点,且 $\angle APD=120°$. 证明:$PA+PD+PC\geqslant BD$.(2000 年江苏省竞赛题)

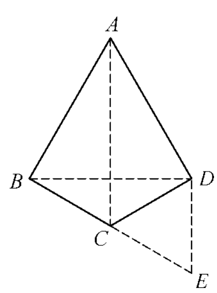


图 1-4

证明 (1)如图 1-4,延长 BC 至 E,使 $CE=CD$,连 DE.

由 $\angle BCD=120°$,知 $\angle DCE=60°$. 又由 $CE=CD$,知$\triangle CDE$ 为等边三角形. 即有 $DE=CD=CE$,$\angle CDE=60°$.

又因 $AB=AD$,$\angle BAD=60°$,连 BD,知$\triangle ABD$ 为等边三角形. 即 $AB=AD=BD$,$\angle BDA=60°$.

连 AC,在$\triangle ACD$ 和$\triangle BED$ 中,由 $\angle ADB=\angle CDE$,知

同理 $S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{6}(26+52)=13,$

$$S_{\triangle CFG}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}S_{\triangle BCD}=\frac{1}{6}(34+26)=10,$$

$$S_{\triangle DGH}=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}S_{\triangle ACD}=\frac{3}{20}(68+34)=15.3.$$

从而 $S_{\text{四边形}EFGH}=S_{\text{四边形}ABCD}-(S_{\triangle AHE}+S_{\triangle BEF}+S_{\triangle CFG}+S_{\triangle DGH})$
$=93.7.$

例 3 点 K 和 L 分别将四边形 $ABCD$ 的边 AB 和 CD 分成 $m:n$ 两部分，线段 BL 和 CK 交于点 P，线段 DK 和 AL 交于点 Q. 求证：$S_{\text{四边形}KPLQ}=S_{\triangle BPC}+S_{\triangle AQD}$.（1961 **年基辅数学奥林匹克题**）

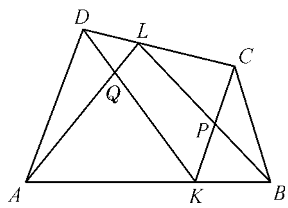


图 1-10

证明 设四边形 $ABCD$ 的面积为 S，由

$$S_{\triangle ADK}+S_{\triangle BCL}=\frac{m}{n+m}S_{\triangle ADB}+\frac{m}{n+m}S_{\triangle DBC}=\frac{m}{n+m}S,$$

以及 $S_{\triangle ADL}+S_{\triangle BCK}=\frac{n}{m+n}S_{\triangle ADC}+\frac{n}{m+n}S_{\triangle ACB}=\frac{n}{m+n}S,$

从而 $$S_{\triangle ADK}+S_{\triangle BCL}+S_{\triangle ADL}+S_{\triangle BCK}=S.$$

故 $S_{\text{四边形}KPLQ}=S-(S_{\triangle ADK}+S_{\triangle BCL}+S_{\triangle ADL}+S_{\triangle BCK})+S_{\triangle ADQ}+S_{\triangle BCP}$
$=S_{\triangle ADQ}+S_{\triangle BCP}.$

例 4 若凸四边形 $ABCD$ 四边长分别为 a、b、c、d，且其对角线所夹锐角为 $45°$. 求证：$S_{ABCD}=\frac{1}{4}(a^2-b^2+c^2-d^2)$.（1984 **年北京市竞赛题**）

证明 如图，令 $AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$，设 AC 与 BD 交于点 O，$\angle BOC=45°$. 又设 $OA=x$，$OB=u$，$OC=y$，$OD=v$，则由公式(1.2-1)，有

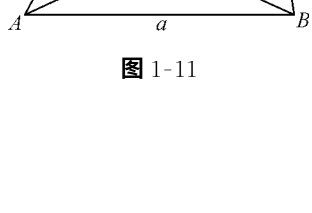


图 1-11

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(x+y)\cdot(u+v)\cdot\sin 45°. \quad ①$$

由余弦定理，并注意到 $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ$，有

$$x^2 + u^2 + 2xu \cdot \cos 45^\circ = a^2, \quad ②$$
$$u^2 + y^2 - 2uy \cdot \cos 45^\circ = b^2, \quad ③$$
$$y^2 + v^2 + 2yv \cdot \cos 45^\circ = c^2, \quad ④$$
$$x^2 + v^2 - 2xv \cdot \cos 45^\circ = d^2. \quad ⑤$$

由 ②－③＋④－⑤，得

$$2\cos 45^\circ \cdot (xu + yu + yv + xv) = a^2 - b^2 + c^2 - d^2.$$

上式与①式比较，注意到 $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$，故

$$S_{ABCD} = \frac{1}{4}(a^2 - b^2 + c^2 - d^2).$$

例 5 如图 1-12，在四边形 $ABCD$ 中，$AD = DC = 1$，$\angle DAB = \angle DCB = 90^\circ$，$BC$、$AD$ 的延长线交于点 P. 求 $AB \cdot S_{\triangle PAB}$ 的最小值.（1994 年四川省竞赛题）

解 设 $DP = x$，则 $PC = \sqrt{x^2 - 1}$.

由 $\mathrm{Rt}\triangle PCD \backsim \mathrm{Rt}\triangle PAB$，有 $\dfrac{CD}{AB} = \dfrac{PC}{PA}$，

则 $$AB = \frac{CD \cdot PA}{PC} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}},$$

从而 $$AB \cdot S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2}AB^2 \cdot PA = \frac{(x+1)^3}{2(x^2-1)} = \frac{(x+1)^2}{2(x-1)}.$$

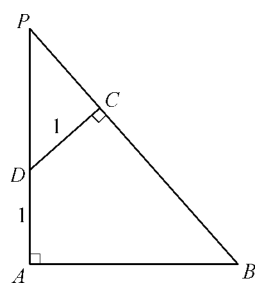


图 1-12

令 $y = \dfrac{(x+1)^2}{2(x-1)}$，得

$$x^2 + 2(1-y)x + (1+2y) = 0.$$

因 x 是实数，则

$$\Delta = 4(1-y)^2 - 4(1+2y) = 4y(y-4) \geqslant 0.$$

而 $y > 0$，从而 $y \geqslant 4$.

故 $AB \cdot S_{\triangle PAB}$ 的最小值是 4.

例 6 凸四边形 $ABCD$ 的边 AD、BC 的延长线交于点 E，设 H 和 G 分别

是 BD 和 AC 的中点，求：$\triangle EHG$ 的面积与四边形 $ABCD$ 的面积之比.（第 10 届加拿大数学奥林匹克题）

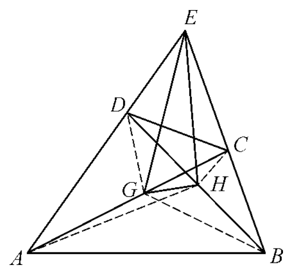


图 1-13

解 设 $\triangle EAB$ 的面积为 1.

又设 $\frac{ED}{EA}=x$，$\frac{EC}{EB}=y$，则

$$S_{\triangle BDE}=x,\ S_{\triangle ABD}=1-x,$$

$$S_{\triangle ACE}=y,\ S_{\triangle ABC}=1-y.$$

从而 $$\frac{S_{\triangle ECD}}{S_{\triangle EAB}}=\frac{\frac{1}{2}EC\cdot ED\cdot\sin\angle DEC}{\frac{1}{2}EB\cdot EA\cdot\sin\angle AEB}=xy.$$

因为 H 是 BD 的中点，G 是 AC 的中点，则

$$S_{\triangle AEG}=\frac{1}{2}S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}y,$$

$$S_{\triangle ABG}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(1-y),$$

$$S_{\triangle DEH}=\frac{1}{2}S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}x,$$

又 $$S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ACE}-S_{\triangle CDE}=y-xy,$$

从而 $$S_{\triangle ADG}=\frac{1}{2}y(1-x),$$

$$\begin{aligned}S_{\triangle BDG}&=S_{\triangle ABD}-S_{\triangle ADG}-S_{\triangle ABG}\\&=1-x-\frac{1}{2}y(1-x)-\frac{1}{2}(1-y)\\&=\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}xy.\end{aligned}$$

同时 $$S_{\triangle DGH}=\frac{1}{2}S_{\triangle BDG}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}xy.$$

于是 $$\begin{aligned}S_{\triangle DEG}&=S_{\triangle ACE}-S_{\triangle CEG}-S_{\triangle ADG}\\&=y-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}y(1-x)\\&=\frac{1}{2}xy.\end{aligned}$$

则有 $$\begin{aligned}4S_{\triangle EGH}&=4(S_{\triangle DEH}+S_{\triangle DGH}-S_{\triangle DEG})\\&=4\left[\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}xy\right)-\frac{1}{2}xy\right]\\&=1-xy=S_{\triangle ABE}-S_{\triangle CDE}\\&=S_{ABCD}.\end{aligned}$$

故 $\frac{S_{\triangle EHG}}{S_{ABCD}}=\frac{1}{4}$.

另解:连 AH, CH,得

$$\begin{aligned}S_{\triangle EHG}&=S_{\triangle AEH}-S_{\triangle AGH}-S_{\triangle AGE}\\&=(S_{\triangle EDH}+S_{\triangle ADH})-\frac{1}{2}S_{\triangle ACH}-\frac{1}{2}S_{\triangle ACE}\\&=\frac{1}{2}S_{\triangle BDE}+\frac{1}{2}S_{\triangle ABD}-\frac{1}{2}S_{AHCE}\\&=\frac{1}{2}S_{\triangle ABE}-\frac{1}{2}S_{AHCE}\\&=\frac{1}{2}S_{ABCH}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}S_{\triangle ABD}+\frac{1}{2}S_{\triangle BCD}\right)\\&=\frac{1}{4}S_{ABCD}.\end{aligned}$$

故 $\frac{S_{\triangle EHG}}{S_{ABCD}}=\frac{1}{4}$.

例 7 凸四边形的边长为 a, b, c, d,一组对角之和等于 2α. 求证:四边形的面积等于 $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cdot\cos^2\alpha}$, 其中 p 为四边形的半周长.(1936 年基辅数学奥林匹克题)

证明 如图 1-14, 设在四边形 $ABCD$ 中, $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $\angle A+\angle C=2\alpha$.

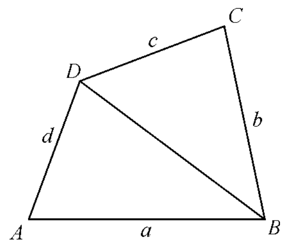


图 1-14

连 BD, 在 $\triangle ABD$ 中, 有 $BD^2=a^2+d^2-2ad\cdot\cos A$, 在 $\triangle BCD$ 中, 有 $BD^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos C$, 从而, 有 $\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2}=ad\cdot\cos A-bc\cdot\cos C$. ①

设四边形 $ABCD$ 的面积为 S，则

$$2S = ad \cdot \sin A + bc \cdot \sin C. \qquad ②$$

将①式、②式两边平方再相加，得

$$\begin{aligned}&4S^2 + \frac{1}{4}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 \\ = &a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd(\cos A \cdot \cos C - \sin A \cdot \sin C).\end{aligned}$$

于是，
$$\begin{aligned}16S^2 &= 4(a^2d^2 + b^2c^2) - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 8abcd \cdot \cos 2\alpha \\ &= 4(a^2d^2 + b^2c^2) - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 8abcd(2\cos^2\alpha - 1) \\ &= 4(a^2d^2 + b^2c^2) - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 + 8abcd - 16abcd \cdot \cos^2\alpha \\ &= 4(ad + bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 16abcd \cdot \cos^2\alpha.\end{aligned}$$

设 $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$，则

$$\begin{aligned}&4(ad + bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 \\ = &[2(ad + bc) - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)] \cdot [2(ad + bc) + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)] \\ = &(a + b + c - d)(b + c + d - a)(a + d + b - c)(a + d - b + c) \\ = &16(p - a)(p - b)(p - c)(p - d),\end{aligned}$$

故
$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd \cdot \cos^2\alpha}.$$

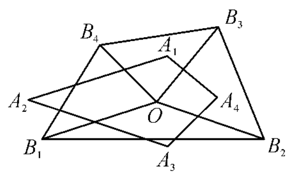
注 推证中用到三角公式 $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$.

习 题 1.2

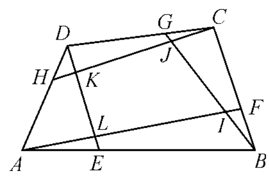
1 给定凸四边形 $ABCD$，边 AB 和 CD 的中点分别为 K 和 M，线段 AM 和 DK 的交点为 O，线段 BM 和 CK 的交点为 P. 求证：四边形 $MOKP$ 的面积等于 $\triangle BPC$ 和 $\triangle AOD$ 的面积之和.（第 22 届莫斯科数学奥林匹克题）

2 凸四边形 $ABCD$ 中，BC 和 AD 的中点分别为 E，F. 求证：$S_{\triangle EDA} + S_{\triangle FBC} = S_{ABCD}$.（第 30 届 IMO 预选题）

3 如图，$OB_i \mathrel{\underline{\parallel}} A_iA_{i+1}$，其中 $i = 1, 2, 3, 4$.（$A_5 = A_1$）. 求证：$B_1B_2B_3B_4$ 的面积为 $A_1A_2A_3A_4$ 的面积的 2 倍.（第 14 届加拿大奥林匹克题）



第 3 题图



第 4 题图

4 **如图，已知凸四边形** $ABCD$ **的面积为** S**，四边** AB、BC、CD、DA **的第** 1 **个三等分点是** E、F、G、H. **连** AF、BG、CH、DE**，相邻两连线交于** I、J、K、L**，又**$\triangle AEL$、$\triangle BFI$、$\triangle CGJ$、$\triangle DHK$ **的面积分别为**a、b、c、d，$S_1=a+b+c+d$**，则四边形** $IJKL$ **的面积为（　　）.**

A. $\frac{4}{9}S-S_1$　　B. $\frac{5}{9}S-S_1$

C. $\frac{2}{9}S+S_1$　　D. $\frac{1}{3}S+S_1$

（第 14 **届"五羊杯"竞赛题）**

5 **给定一个凸四边形，是否总能在它的内部确定一点，使得该点与各边中点的连线将四边形分成四个面积相等的区域？如果这样的点存在，那么是否是惟一的？**（1992 **年加拿大训练题**）

6 **设在四边形** $ABCD$ **内可找到一点** P**，使得四个三角形**$\triangle PAB$，$\triangle PBC$，$\triangle PCD$，$\triangle PDA$ **的面积相等. 求证：点** P **必位于对角线** AC **或** BD **上.**（1983 **年瑞士数学奥林匹克题**）

7 **已知四边形** $ABCD$ **的面积为** 32，AB、CD、AC **的长都是整数，且它们的和为** 16.（1）**这样的四边形有几个？**（2）**求这样的四边形边长的平方和的最小值.**（2003 **年全国联赛题**）

8 **设四边形的** 4 **条边长依次为** a、b、c、d**，它的面积为** S. **证明：**$S\leqslant\frac{1}{4}(a+c)(b+d)$.（**第** 16 **届莫斯科数学奥林匹克题**）

9 M **和** P **是凸四边形** $ABCD$ **的边** BC **和** CD **的中点. 已知：**$AM+AP=a$. **求证：四边形** $ABCD$ **的面积小于**$\frac{a^2}{2}$.（**第** 14 **届全苏数学奥林匹克题**）

10 **设**$\triangle XYZ$ **的边上有** A、B、C、D **四个点，且每条边上至少有一个点，且** A、B、C、D **四点都不和** X、Y、Z **三点重合. 求证：在**$\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle ACD$、$\triangle BCD$ **这四个三角形中，至少有一个的面积不大于**$\triangle XYZ$ **面积的四分之一.**（1990 **年山西竞赛题**，1991 **年全国高中联赛题与此题类同**）

11 **依次延长四边形** $ABCD$ **的边** AB、BC、CD、DA **至** E、F、G、H**，使** $\frac{BE}{AB}=\frac{CF}{BC}=\frac{DG}{CD}=\frac{AH}{DA}=m$. **若** $S_{EFGH}=2S_{ABCD}$**，求** m **的值.**（1994 **年上海市竞赛题**）