数学作业典型错解分析100例

（高　中　版）

璩　兴　广

上海教育出版社出版发行

（上海永福路123号）

（邮政编码：200031）

各地　　经销　　上海印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　**印张** 12.75　**字数** 280,000

1998 **年** 4 **月第** 1 **版**　　1998 **年** 4 **月第** 1 **次印刷**

印数 1—00,000 **本**

ISBN 7-5320-5379-2/G·5621　　**定价**：15.30 **元**

需要全本请访问 www.ertongb

数学作业
典型错解分析100例

（高　中　版）

璩　兴　广

上海教育出版社

前　言

一个有经验的数学教师都有这样的体会，教学上有意设置一些疏漏，往往比天衣无缝能获得更好的效果．学生在独立发现问题，弥补漏洞的过程中，其思维品质可得到进一步的优化．

教学过程不仅仅是教师向学生传授知识，更重要的是让学生正确无误地掌握知识并用于解决实际问题，学生对教师讲授的知识往往不可能一次完整地接受下来，他们对某些定理、定律、概念、法则的理解往往不够准确，这些理解上的缺陷必然要在课堂练习与作业中反映出来．重视收集学生作业中带有普遍性的典型错误，并利用课堂教学启发学生发现问题，然后教师进行认真的剖析，给出正确的解答方法，是教学过程中不可缺少的一个重要环节．当学生弄清错误的原因后，对正确结论的理解和记忆将会更加深刻．

本书收集了高中学生数学作业中常见的解题典型错误的例子 120 余个．对每一典型错误，首先进行全面的剖析，指出错误的实质，分析错误的原因，然后给出正确的解答．正确解答尽可能给出多种解法，并在说明中揭示解题规律，把问题引伸或推广，借以拓广学生的思路，培养学生的解题能力．

笔者从事高中数学教学近 30 年．在教学实践中颇感这类资料匮乏，因而积累了不少有关资料．现把它整理出来，目的是为高中学生复习及教师备课提供一本符合实际的参考书．

编　者

1996.12.

目　录

一　集合与函数…… 1
二　方程 …… 33
三　三角函数与反三角函数 …… 54
四　解三角形…… 117
五　不等式…… 149
六　数列、极限、数学归纳法…… 183
七　复数…… 205
八　排列、组合、二项式定理…… 229
九　立体几何…… 262
十　直线与圆…… 302
十一　圆锥曲线…… 337
十二　参数方程、极坐标 …… 384

一　集合与函数

【例 1】　设 m 为实数，$A=\left\{(x,y)\left|\frac{y-3}{x-2}=m+1\right.\right\}$，$B=\{(x,y)|(m^2-1)x+(m-1)y=15\}$. 且 $A\cap B=\varnothing$，求 m 的所有值.

错误解法 1：集合 A、B 分别表示直线 l_1：$y=(m+1)x-2m+1$，l_2：$y=-\frac{m^2-1}{m-1}x+\frac{15}{m-1}$.

$$\because\quad A\cap B=\varnothing,\quad \therefore\quad l_1/\!/l_2,$$

$$\therefore\quad m+1=-\frac{m^2-1}{m-1},\qquad ①$$

且

$$-2m+1\neq\frac{15}{m-1}.\qquad ②$$

由①解得 $m=-1$，代入②适合，故 $m=-1$.

错解辨析：由条件 A 变换到 l_1，增加了 $x=2$ 的解，由条件 B 变换到 l_2，遗漏了 $m=1$ 的解. 由此产生错误.

错误解法 2：集合 A、B 分别表示直线 l_1：$(m+1)x-y-2m+1=0$，l_2：$(m^2-1)x+(m-1)y-15=0$.

$$\because\quad A\cap B=\varnothing,\qquad \therefore\quad l_1/\!/l_2,$$

$$\therefore\quad \frac{m+1}{m^2-1}=\frac{-1}{m-1}\neq\frac{-2m+1}{-15}.$$

解得 $m=-1$.

错解辨析：

需要全本请访问 www.ertongb

1. 由条件 A 变换到 l_1，增加了 $x=2$ 的解.

2. 两直线 $a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$ 平行的充要条件不是$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$，而是 $a_1b_2-a_2b_1=0$ 且 $a_1c_2-a_2c_1\neq0$ 或 $a_1b_2=a_2b_1$ 且 $b_1c_2-b_2c_1\neq0$.

正确解法：由 A 得 $y=(m+1)(x-2)+3$ $(x\neq2)$ 代入 B 整理得

$$2(m^2-1)x=2m^2-3m+15.$$

$m=\pm1$ 时，此方程无解.

又 $x=2$ 时无解，令 $x=2$ 得 $2m^2+3m-20=0$，解得 $m=\frac{5}{2}$，-4.

综上：$m=1$，-1，$\frac{5}{2}$，-4 时，$A\cap B=\varnothing$.

其几何意义为：

当 $m=1$ 时，A 为直线 $2x-y-1=0(x\neq2)$ 上的点集，$B=\varnothing$，故 $A\cap B=\varnothing$（图 1-1）.

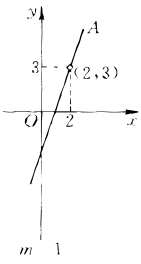

图 1-1

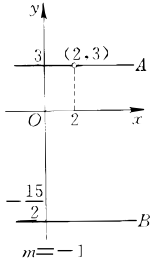

图 1-2

当 $m=-1$ 时，A 为直线 $y=3(x\neq2)$ 上的点集，B 为直线 $y=-\frac{15}{2}$ 上的点集，两直线平行，故 $A\cap B=\varnothing$（图 1-2）.

当 $m=\frac{5}{2}$ 时，A 为直线 $7x-2y-8=0$ 上除去 $(2,3)$ 的所有点之集合，B 为直线 $7x+2y-20=0$ 上所有点之集合，而两直线的交点恰为 $(2,3)$，$\in A$，故 $A\cap B=\varnothing$（图 1-3）.

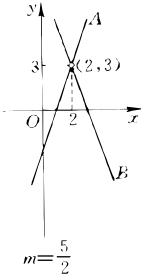

图 1-3

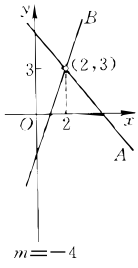

图 1-4

当 $m=-4$ 时，A 为直线 $3x+y-9=0$ 上除去 $(2,3)$ 的所有点之集合，B 为直线 $3x-y-3=0$ 上所有点之集合，而两直线交点恰为 $(2,3)$，$\in A$，故 $A\cap B=\varnothing$（图 1-4）.

【例 2】 试判断函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^2+2x+1}-1}$ 的奇偶性.

错误解法 1：要使函数 $f(x)$ 有意义，必须使 $\sqrt{x^2+2x+1}-1\neq 0$，即 $|x+1|-1\neq 0$，$\therefore x\neq 0$，且 $x\neq -2$. 其定义域不关于原点对称，所以 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

错误解法 2：

$$\because\quad f(-x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^2-2x+1}-1},$$

$$-f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{x^2+2x+1}},$$

$$\therefore\quad f(-x)\neq f(x),\ f(-x)\neq -f(x),$$

∴ $f(x)$是非奇非偶函数.

错解辨析：

1. 错误解法 1 中对定义域的求法有误，此解法中只考虑了分母不为零，而忽视了偶次根号下的被开方数应为非负数，即 $1-x^2\geqslant 0$，因此有 $-1\leqslant x\leqslant 1$，而 -2 不在区间$[-1,1]$内故此函数的定义域应为

$$x\in[-1,0)\cup(0,1].$$

它关于原点对称.

2. 错误解法 2 除忽视定义域外，也没有对函数的解析式作认真的研究，事实上，$|x|\leqslant 1$，$x+1\geqslant 0$. 所以

$$f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^2+2x+1}-1}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x+1|-1}$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}}{(x+1)-1}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$f(-x)=\frac{\sqrt{1-(-x)^2}}{-x}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=-f(x).$$

通过以上分析，可知函数 $f(x)$是奇函数.

正确解法：略.

【例 3】 求下列函数的值域：

(1) $y=\dfrac{2x^2-2x+3}{x^2-x+1}$，(2) $y=\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2+x-6}$.

错解法：(1)原式可化为

$$(y-2)x^2-(y-2)x+(y-3)=0.$$

$$\Delta=(y-2)^2-4(y-2)(y-3)=(y-2)(10-3y).$$

由 $\Delta\geqslant 0$，得 $2\leqslant y\leqslant\dfrac{10}{3}$.

故所求函数的值域是$\left[2,\ \dfrac{10}{3}\right]$.

(2) 原式可化为

$$(y-2)x^2+(y+3)x-(6y-2)=0.$$

$$\Delta=(y+3)^2+4(y-2)(6y-2)=25(y-1)^2.$$

由 $\Delta\geqslant 0$,得 $y\in R$.

故所求函数的值域是$(-\infty,+\infty)$.

错解辨析:

应用判别式法求函数值域,首要条件是关于 x 的二次方程的二次项系数不等于零.

在(1)中,若 $y=2$,则所得关于 x 的方程变为 $y-3=0$,这与 $y=2$ 矛盾,故 2 不在所求函数的值域中.

在(2)中,若 $y=2$,则所得关于 x 的方程变为 $5x-10=0\Rightarrow x=2$,这时原式的除式 $x^2+x-6=0$;若 $y=1$,则所得关于 x 的方程变为 $-x^2+4x-4=0\Rightarrow x=2$,这时仍有原式的除式为 0,故 1,2 均不在所求函数的值域中.

正确解法:(1) 原式可化为

$$(y-2)x^2+(y-2)x+y-3=0.$$

(i) 当 $y\neq 2$ 时,

$$\Delta=(y-2)^2-4(y-2)(y-3)=(y-2)(10-3y).$$

由 $\Delta\geqslant 0$,得 $2<y\leqslant\frac{10}{3}$.

(ii) 当 $y=2$ 时,上述关于 x 的方程变为 $y-3=0$,这与 $y=2$ 矛盾,故 2 不在所求函数值域中.

综上所述知所求函数的值域是$\left(2,\ \frac{10}{3}\right]$.

(2) 原式可化为 $(y-2)x^2+(y+3)x-(6y-2)=0$,

故 $y\neq 2$.

$$\Delta=(y+3)^2-4(y-2)(6y-2)=25(y-1)^2.$$

由 $\Delta\geqslant 0$，得 $y\in R$.

又 $y=\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2+x-6}=\dfrac{(2x+1)(x-2)}{(x+3)(x-2)}=\dfrac{2x+1}{x+3}(x\neq 2)$.

∵ 函数 $y=\dfrac{2x+1}{x+3}$ 的值域是 $\{y\mid y\neq 2,\ y\in R\}$

当 $x=2$ 时，$y=\dfrac{2x+1}{x+3}=\dfrac{4+1}{2+3}=1$.

故所求函数的值域是 $\{y\mid y\neq 1$ 且 $y\neq 2,\ y\in R\}$.

说明：

1. 函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(c\neq 0)$ 的值域是 $\{y\mid y\neq\dfrac{a}{c},\ y\in R\}$.

2. 函数 $y=\dfrac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$（$a_1$，$a_2$ 不同时为 0）的值域的求法如下：

(i) 当除式与被除式无公共实根时，令 $D=a_1b_2-a_2b_1$.

若 $D\neq 0$，则 $y\in\{y\mid\Delta\geqslant 0\}$；

若 $D=0$，则 $y\in\{y\mid\Delta\geqslant 0\}-\left\{\dfrac{a_1}{a_2}\right\}$.

其中 $\Delta\geqslant 0$ 是由方程

$$(a_1-a_2y)x^2+(b_1-b_2y)x+(c_1-c_2y)=0$$

的判别式所确定的 y 的取值范围.

(ii) 当除式与被除式有公共实根时.

其值域为约去相同的因式后所得函数的值域，除去所得函数中公共根对应的函数值，即函数

$$y=\frac{(ax+b)(mx+n)}{(cx+d)(mx+n)}\quad(cm\neq 0)$$

的值域是

$$\left\{y\,\middle|\,y\neq\frac{a}{c}\text{且 }y\neq\frac{bm-an}{dm-cn},\ y\in R\right\}.$$

【例 4】 求函数 $y=x+\sqrt{1-2x}$的值域.

错误解法 1：要使函数 y 有意义，必须使 $1-2x\geqslant 0$，即 $x\leqslant\frac{1}{2}$.

当 $x=\frac{1}{2}$时，$y=\frac{1}{2}+\sqrt{1-2\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$.

故所求函数的值域是$\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right]$.

错解辨析：

因为函数 $y_1=x$ 在 R 上是增函数，$y_2=\sqrt{1-2x}$在$\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right]$上是减函数，所以不能判断 $y=y_1+y_2$ 在$\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right]$上是增函数，因而当 x 达到最大值$\frac{1}{2}$时，y 不一定达到最大值. 例如，当 $x=0$ 时，$y=1>\frac{1}{2}$.

错误解法 2：移项平方整理，得

$$x^2+2(1-y)x+(y^2-1)=0.$$

上述关于 x 的一元二次方程有实根，所以

$$\Delta=4(1-y)^2-4(y^2-1)\geqslant 0,\text{ 解得 }y\leqslant 1.$$

故所求函数的值域是$(-\infty,1]$.

错解辨析：

需要全本请访问 www.ertongb

上述解法实属巧合，无可靠性，试看下面的例子：

求函数 $y=x-\sqrt{1-2x}$ 的值域.

此题若用上述解法，仍可求得 $y\leqslant 1$. 但实际上，由于函数的定义域是 $x\leqslant\frac{1}{2}$，并且 $y-x=-\sqrt{1-2x}\leqslant 0\Rightarrow y\leqslant x$，故有 $y\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$，可见 y 根本不可能在区间 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right]$ 内取值.

因而，应用判别式法求函数的最值，必须检查函数取得最值时自变量的值是否在定义域内. 若自变量的值在定义域内，则判别式法有效，若自变量的值不存在或不在定义域内，则判别式法失效，应改用其他方法.

例如，函数 $y=x+\sqrt{1-2x}$ 的定义域是 $\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right]$. 应用判别式法求得 $y\leqslant 1$，当 $y=1$ 时，$x=0\in\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right]$，所以函数 $y=x+\sqrt{1-2x}$ 的值域是 $(-\infty,1]$.

又如函数 $y=x-\sqrt{1-2x}$ 的定义域是 $\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right]$，应用判别式法仍可求得 $y\leqslant 1$，但当 $y=1$ 时，有 $x-\sqrt{1-2x}=1\Rightarrow x-1=\sqrt{1-2x}$. $\because\ x-1\leqslant\frac{1}{2}-1<0$，而 $\sqrt{1-2x}\geqslant 0$，显然这样的 x 不存在，因而判别式法失效.

错误解法 3：移项平方整理，得

$$x^2+2(1-y)x+(y^2-1)=0\quad\left(x\leqslant\frac{1}{2}\right).$$

解上述关于 x 的方程，得

$$x=(y-1)\pm\sqrt{2-2y},$$

由 $x\leqslant\frac{1}{2}$ 得

$$(y-1)+\sqrt{2-2y}\leqslant\frac{1}{2} \qquad ①$$

或

$$(y-1)-\sqrt{2-2y}\leqslant\frac{1}{2} \qquad ②$$

由①得 $\sqrt{2-2y}\leqslant\frac{3}{2}-y\Rightarrow y\leqslant 1$；

由②得 $\sqrt{2-2y}\geqslant y-\frac{3}{2}\Rightarrow y\leqslant 1$.

综上可知 $y\leqslant 1$.

故所求函数的值域是 $(-\infty,1]$.

错解辨析：

上述解法仍是错误的，若应用上述解法求函数 $y=x-\sqrt{1-2x}$ 的值域仍可得出错误的结果，原因是平方后只注意了 x 的取值范围（实际上，$x\leqslant\frac{1}{2}$ 这一条件平方后并没有改变，仍隐含在方程 $x^2+2(1-y)x+(y^2-1)=0$ 之中）而忽视了 x、y 的大小关系（原式中 $y\geqslant x$ 这一条件在平方后消失了）.

* 错误解法 4：移项平方整理，得

$$f(x)=x^2+2(1-y)x+(y^2-1)=0.$$

$$\because\quad 1-2x\geqslant 0,\ \therefore\quad x\leqslant\frac{1}{2}.$$

∴ 方程 $f(x)=0$ 在区间 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ 上有解.

---

* 打星号者，为不常见的解法，以开拓视野.

1° 当 $f(x)=0$ 在区间 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ 上有唯一解时，有 $f\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant 0$，即

$$\frac{1}{4}+(1-y)+(y^2-1)\leqslant 0\Rightarrow\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant 0\Rightarrow y=\frac{1}{2}.$$

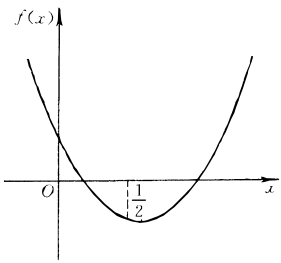

图 1-5

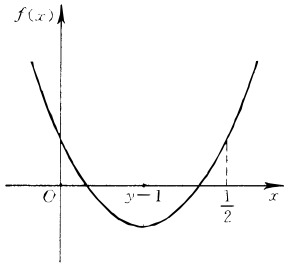

图 1-6

2° 当 $f(x)=0$ 在区间 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ 上有两解时，

$$\text{有}\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right)\geqslant 0, \\ \Delta\geqslant 0, \\ y-1\leqslant\frac{1}{2}. \end{cases}\qquad \text{即}\begin{cases} \frac{1}{4}+(1-y)+(y^2-1)\geqslant 0, \\ 4(y-1)^2-4(y^2-1)\geqslant 0, \\ y\leqslant\frac{3}{2}. \end{cases}$$

解此不等式组，得 $y\leqslant 1$.

综上所述得 $y\leqslant 1$，故所求函数的值域是 $(-\infty, 1]$.

错解辨析：

上述解法仍无可靠性，若用上述解法求函数 $y=x-\sqrt{1-2x}$ 的值域，亦可得 $y\leqslant 1$，实际上，函数 $y=x-\sqrt{1-2x}$

的值域是$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

那么此解法错在哪里呢？原来函数$y_1=x+\sqrt{1-2x}$与$y_2=x-\sqrt{1-2x}$的共同点是定义域相同，都是$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$. 不同点是函数$y_1$的图象在直线$y=x$上方，而函数$y_2=x-\sqrt{1-2x}$的图象在直线$y=x$的下方. 平方后不同点被隐没了，而解题时只应用了它们的共同点$x\leqslant\frac{1}{2}$这一条件，致使求得的结果相同. 因而在解题过程中，对于函数y_1，要应用条件$y\geqslant x$，对于函数y_2，要应用条件$y\leqslant x$.

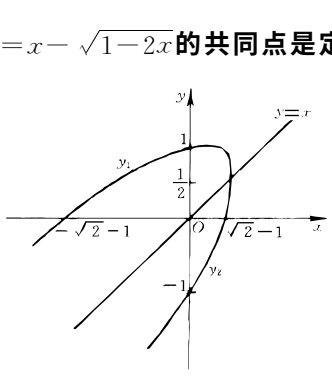

图 1-7

正确解法1：用换元法解. 令$\sqrt{1-2x}=t$，

则 $x=\frac{1}{2}(1-t^2)$，

$$y=\frac{1}{2}(1-t^2)+t$$

$$=-\frac{1}{2}t^2+t+\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}(t-1)^2+1.\ (t\geqslant 0)$$

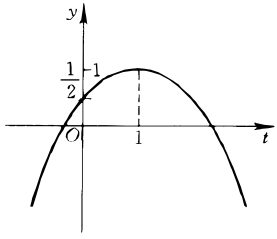

图 1-8

因为关于t的二次函数的图象是开口向下的抛物线，且顶点横坐标$1\in[0, +\infty)$，所以当$t=1$，即$x=0$时，函数y有最大值1，显然函数y无最小值.（图1-8）

故所求函数的值域是$(-\infty, 1]$.

正确解法 2：用判别式法解. 易知所给函数的定义域为$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$，将原式移项平方整理得

$$x^2-2(y-1)x+y^2-1=0.$$

上述关于 x 的二次方程有实数解，所以

$$\Delta=4(y-1)^2-4(y^2-1)=-8y+8\geqslant 0,$$

解得 $y\leqslant 1$. 当 $y=1$ 时，$x=0\in\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$. 所以当 $x=0$ 时，函数 y 有最大值 1.

故所求函数的值域是$(-\infty, 1]$.

正确解法 3：用求根法解. 将原式移项平方，整理得

$$x^2-2(y-1)x+y^2-1=0.$$

解上述关于 x 的方程，得

$$x=(y-1)\pm\sqrt{2-2y}.$$

$$\because\quad y=x+\sqrt{1-2x}\geqslant x,$$

$$\therefore\quad (y-1)+\sqrt{2-2y}\leqslant y, \qquad ①$$

或

$$(y-1)-\sqrt{2-2y}\leqslant y. \qquad ②$$

由①得 $\sqrt{2-2y}\leqslant 1\Rightarrow\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1$；

由②得 $\sqrt{2-2y}\geqslant -1\Rightarrow y\leqslant 1$.

综上所述得 $y\leqslant 1$，故所求函数的值域是$(-\infty, 1]$.

* 正确解法 4：用实根分布法解. 将原式移项平方整理得

$$f(x)=x^2-2(y-1)x+y^2-1=0 \quad (x\leqslant y).$$

因为方程 $f(x)=0$ **在区间**$(-\infty, y]$**上有解，所以**

$$f(y)\leqslant 0, \tag{①}$$

或

$$\begin{cases} f(y)\geqslant 0, \\ \Delta\geqslant 0, \\ y-1\leqslant y. \end{cases} \tag{②}$$

由①得 $y^2-2y^2+2y+y^2-1\leqslant 0\Rightarrow y\leqslant\frac{1}{2}$；

由②得

$$\begin{cases} y\geqslant\frac{1}{2}, \\ 4(y-1)^2-4(y^2-1)\geqslant 0\Rightarrow\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1. \end{cases}$$

由①、②知所求函数的值域是$(-\infty, 1]$.

说明：1. **方程** $f(x)=x^2+px+q=0$.

在区间(a, b)**上有解的充要条件是**

$f(a)\cdot f(b)<0$（**图** 1－9），**或**

$$\begin{cases} f(a)>0, \\ f(b)>0, \\ \Delta\geqslant 0, \\ a<-\frac{p}{2}<b \text{（图 1－10）}. \end{cases}$$

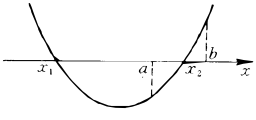

图 1－9

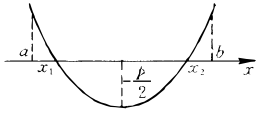

图 1－10

在区间$(-\infty, b)$**上有解的充要条件是**

需要全本请访问 www.ertongb