

数学与知识的探求

[美] M·克莱因 著
刘志勇 译

复旦大学出版社

前 言

我们如何获取关于外部世界的知识？人人都不得不依赖于自己的感官知觉——听觉、视觉、触觉、味觉和嗅觉——来进行日常事务并享受某些快感。这些知觉向我们显露关于外部世界的很多信息，然而总的来说是粗糙的。如笛卡儿所言，感官知觉乃感官迷惑，此言也许过重了。现代的仪器如望远镜确实大大扩展了我们的知觉，然而这样的仪器之可用性是有限的。

重大物理现象根本就不是感官知觉到的。感官没有向我们显示地球绕其轴旋转并绕太阳公转，也没显示维持行星绕太阳公转的力之本性。电磁波能使我们收到几百甚至几千英里外发射的广播和电视节目，而感官对于电磁波本身一无所知。

这本书对于数学的日常应用，如确定一座 50 层大楼的高度，不多涉及。读者将会悟到感官知觉之限度，不过我们的主要兴趣是，描述仅靠数学手段对于物理世界之实在知道些什么。我将描述数学对于现代世界的重大现象披露了什么，而不是铺陈数学知识。诚然，经验和实验在探究自然中也起了作用，不过，本书将表明，这些手段在许多领域起了次要作用。

在 17 世纪，布莱泽·帕斯卡尔为人类之无助而悲哀。然而今天我们自己创造的一种极有力的武器——即数学——给予了我们关于物理世界巨大领域的知识并使我们掌握了控制权。大卫·希尔伯特，现代首屈一指的数学家，1900 年在国际数学大会上的演讲中说道：“数学是一切关于自然现象的严格知识之基

础。”我们有充分理由补充说,对于许多重要的现象,数学提供了我们所能有的唯一的知识。事实上,一些科学分支只是由一套数学理论组成,并饰以几个物理事实。

与学生在学校里所获得的印象相反,数学不只是一系列技巧。数学向我们显露关于某些我们还未知的,甚至从未臆度过的重要现象,在某些情况下甚至显露与知觉矛盾的道理。它是我们关于物理世界的知识之精华。它不但超出了知觉之域而且大大优于知觉。

致 谢

我感谢牛津大学出版社为此书所做的耐心细致的工作。我还想谢谢我的妻子海伦以及曼若琳·曼那维茨小姐,她们仔细阅读并打印了手稿。

布鲁克林,纽约

1985 年 3 月

莫里斯·克莱因

目 录

历史概观：外部世界存在吗？	1
第 1 章 感官与直觉的失败	21
第 2 章 数学的兴起和作用	39
第 3 章 希腊人的天文学世界	53
第 4 章 哥白尼和开普勒的日心说	72
第 5 章 数学主导了物理科学	92
第 6 章 数学与引力的奥秘	116
第 7 章 数学和不可感知的电磁世界	137
第 8 章 相对论的序幕	161
第 9 章 相对性的世界	178
第 10 章 物质的分崩离析：量子理论	198
第 11 章 数学物理学的实在	216
第 12 章 数学为什么奏效	231
第 13 章 数学和大自然的运作	252
参考书目	273
主编赘语	293

历史概观： 外部世界存在吗？

哲人是这样的人，他知晓其他人知之甚少的某些事情。

笛卡儿

哲学家之言有尽人类荒谬之极者。

西塞罗

整部哲学不是像在用蜜撰写吗？乍看很奇妙，再看消失殆尽，只剩下黏稠的污痕。

爱因斯坦

有 独立于人类的物理世界存在吗？山脉、树木、陆地、大海、天空，无论是否有人在场感知，它们都存在吗？这似乎是愚蠢的问题。当然存在。我们不是常常观察这世界吗？我们的感官不是不断地提供这世界存在的证据吗？然而，深思之士却不会对显而易见的东西不屑考问，即便只是为了确证也要问一问。

我们从哲学家开始。这些爱智者，多少世纪以来深思细考了关于人类和世界的所有问题，然而像单恋的痴情者一样常常

感到失落。最伟大的哲学家中有人思考过关于外部世界存在的课题。有否认其存在者,也有承认其存在者,不过这些人又认真地怀疑我们对于外部世界了解了多少、我们的知识有多可靠。杰出的哲学家伯特兰·罗素在其《我们关于外部世界的知识》(*Our knowledge of the external world*)一书中写道:“自古至今,比起其他学问,哲学自认为有资格获得的极多而实际成果却极少。”尽管如此,我们还是应考察一下某些哲学家不得已而言之者为何。我们将集中讨论那些认真考问过我们关于外部世界的知识的哲学家。

第一个探讨此问题的是大约公元前 500 年的希腊哲学家赫拉克利特(Heraclitus)。赫拉克利特并不否认外部世界的存在,但坚持世上任何事物都常变。用他的话来说,人不能两次踏进同一条河流。从而我们自认为收集到的关于物理世界的事实在下瞬间就不再存在。

与此相反,伊比鸠鲁(Epicurus,公元前 341—前 270)坚持这一基本原则:我们的感官是到达真理的绝对可靠的向导。感官告知我们,物质存在,运动发生,最终的实在是由存在于真空中的原子组成的物体。它们一直存在,不可毁坏,并且不可分不可变。

古今最有影响的哲学家柏拉图(Plato,公元前 341—前 270)也对此问题感兴趣。他承认一个外部世界的存在,但却得出这样的结论:通过感官感知的世界是混杂的,变化多端,永不停息,是不可靠的。真正的世界是理念的世界,不可变不朽坏。不过这理念世界不能由感官而只能由心智来把握。观察是无用的。在《理想国》(*Republic*)中,柏拉图明确地论述,表象后的实在才是天生的、数学的。理解实在就是从表象中抽绎出实在,而不是将实在强加于表象。数学是真正存在的基础,是永恒实有

的。柏拉图强调数学的重要性，把它构想成关于抽象的、非物质的理想理念的更普遍系统的组成部分。这些理想理念是完美的模型，而宇宙中任何事物，不管是物质的、伦理的，还是美感的，都力图臻于完美。柏拉图在《理想国》中说道：

但是如果任何人试图获知感官的东西，不管瞪眼向上还是眯眼向下，我都不会说他会真正获知什么——因为永远得不到真知；同样我也不会说他的灵魂在向上看，而是向下，哪怕他是仰面浮在海上或躺在陆地上在研究。

普鲁塔克(Plutarch)在其《马塞卢斯生平》(*Life of Marcellus*)中叙述道：柏拉图的两个著名的同时代人，优道克苏斯(Eudoxus)和阿球塔斯(Archytas)，以物理论据来证明数学结果。柏拉图义愤填膺地谴责此类证明乃几何学的堕落：那是以感官事实来取代纯粹的推理。

柏拉图对天文学的态度可说明他关于我们应探求的知识的观点。他说，这门科学并不关乎可见天体的运动。天空中星辰的布置和其表观运动的确奇妙美观，但这只是观察和对运动的解释，离真正的天文学相差很远。在达至这门真正的科学之前我们必须将天空搁置一边。因为真正的天文学研究的是数学天空中真正星辰的运动规律，而可见天空只是数学天空的不完美的表现。通过苏格拉底之口，柏拉图告诉我们天文学家的要务，这些话现在已很著名：

这些绘在天上的火花，既然它们是可见表面上的装饰物，我们必须认为是最美妙、最精确的物体，但我们必须承认它们离真理还很远，即以真正的数和真正的图形来度量的实在的速度和实在的缓慢的运动。……而这些只能根据推理和思想来把握，而不是根据视觉。(因此，)如果我们想

参与真正的天文科学,就必须(只是)将天空的纹章作为模式来帮助我们研究那些真正的实在。

这种天文学概念会使具现代头脑的人震惊,学者们毫不犹豫地谴责柏拉图,认为他对感官经验的贬低是科学进展的严重阻碍。然而我们应该承认,这里分配给天文学家的任务恰好就是几何学家成功地遵循的路径。几何学家研究三角形在头脑中的理想化而不是个别三角形的物体。在柏拉图的时代观测天文学已达到当时所能达到的极限,也许他所想的是进一步的发展有待于对所积累的资料进行严格的思考和理论化。

柏拉图的抽象理想概念的确不幸地阻碍实验科学的进步达数个世纪之久。这概念隐含着这样的意思:真正的知识只能通过对抽象理念的哲学沉思才能获得,而不是通过观察实在世界中偶然的不完美的事物。

然而,过去与现在都有哲学家承认外部世界的存在,并相信我们可以通过感觉获得可靠的知识。与柏拉图针锋相对,亚里士多德(Aristotle)不仅断言一个外在于人类的世界的存在,而且坚持我们关于世界的观念是这样得到的:我们从世界中抽象出对于我们所感知的某一类物质客体共同的东西,如三角形、球形、树叶与山。他批评柏拉图太关注于非现实的另一世界,还将科学还原为数学。从字面上说,亚里士多德是一个物理学家,相信作为第一实体和实在的本源的物质事物的存在。物理学,一般地说,所有科学必须研究物理世界并从中得到真理。这样,真正的知识是从感官经验、直觉和抽象中得到的。这些抽象物不独立于人的头脑而存在。

为达到真理,亚里士多德利用他所说的共相,即从真实事物中抽象出的普遍性质。用他的话来说,我们必须从对我们来说可知可观察的事物开始,然后依次进展到那些从本性上说更清

楚更可知的事物。他取出物体的明显的可感性质,使其实体化,并把它们提升到独立的心智概念。具体地说,在中央大地之上(包括所有的水),是空气所占据的区域;更高处,直到月亮,是一我们称之为火的实体,尽管实际上它是火与空气的混合物。它们的存在取决于“四要素”:热、冷、干、湿(参见第5、第10章)。这四要素可以六种方式两两组合,不过其中两种组合——热与冷、干与湿——按其本性是不可能的,剩下的四对组合产生了四种元素。这样,地是干而冷,水是冷而湿,空气是热而湿,火是热而干。这些元素不是永恒的,相反,物质持续地从一种形式变化到另一种形式。从地球直到月亮的整个宇宙不断变化、朽坏、死亡、腐败,正如气候和地质现象所生动显示的。

尽管古希腊哲学家的观点的影响是确凿无疑的,人们却倾向于置其不顾,因为虽然他们的文化强调数学的重要,但他们生活在一个可合理地称之为前科学的世界。他们实验不多,在整体上与我们今天所知的科学世界相分离。

在中世纪,人们不再关心外部世界,神学是人们的首要关注对象。直到文艺复兴时期哲学家才以强烈的兴趣转向物理世界。尤其在西欧,近代哲学自那时肇始,随之而来的是对科学的新兴趣。

雷内·笛卡儿(René Descartes, 1596—1650)是近代哲学的奠基者。他的《方法谈》(*On the Method of Rightly Conducting the Reason and Seeking Truth in the Science*, 1637)中包括的三个附录“几何学”、“折射光学”、“气象学”是经典之作。尽管笛卡儿认为他的哲学和科学学说颠覆了亚里士多德主义和经院哲学,在内心深处他还是一个经院哲学家和亚里士多德主义者。他步亚里士多德的后尘,从自己的头脑中抽绎出关于存在和实在本性的命题。也许正因为此,他的著作比那些开始从观

察和实验中获取真理的探索对 17 世纪产生了更广泛的影响。观察和实验这两个源泉是与传统格格不入的。

考虑到有这样的逻辑可能性：他的所有信念都是错误的，笛卡儿寻找一个建立真理大厦的坚实基础。他发现只有一个事实他可以确信——我思故我在(I think, therefore I am)。因为他认识到自己是有限的和不完美的，他推断道，这种有限感隐含着必有一个无限完美的存在，他借此衡量自己。这存在，上帝，必存在，因为如果他缺少了存在这基本性质，他就是不完美的。对笛卡儿来说，上帝存在这一结论，对于科学来说比对于神学更重要。因为它提供了可能性来解决客观世界的存在这中心问题。

因为我们对外在于我们头脑的世界的知识是通过感官印象而来，就出现了这样的问题：除了感官印象是否还存在其他东西，或者说是否客观实在是一种幻觉。对于这个问题，笛卡儿的回答是，上帝既然是完美的，就不会是一个欺诳者。如果物质宇宙不是真实的，他就不会让我们相信其存在。

客观实在主要通过广延这物理属性来把握，这是物质这一概念所固有的，而物质概念并非来自于感官。因此，没有关于物质世界的知识来自感官，除非是以非直接的方式。笛卡儿有才能将他对物质客体的观察资料分成第一性和第二性的性质。这样，颜色是第二性的，因为它只能通过感官来觉知，而广延和运动是第一性的。

对于笛卡儿来说，整个物理宇宙是一架巨大的机器，根据自然规律来运转。这些自然规律可以通过人类理性尤其是数学推理来发现。他贬低实验的作用，尽管他做过生物学实验。

响应当时正在获取的数学和科学知识，哲学家托马斯·霍布斯(Thomas Hobbes, 1588—1679)在其《利维坦》(Leviathan,

1651)中声言,在我们之外只有运动的物质。外部物体给我们的感觉器官以压力,通过单纯的机械过程在我们的头脑中产生了感觉。所有知识都自这些感觉导出,感觉然后变成了头脑中的影像。当一串影像到达时,就激起其他已接收的影像,例如,一个苹果的影像就激起一棵树的影像。思想就是对影像链的组织。具体说来,按照物体和物体的性质在影像中显现的样子加上名称,思想就在于通过断言来联结这些名称并寻到这些断言之间的必然联系。

在其《人的本性》(*Human Nature*, 1650)一书中,霍布斯说观念就是对通过感官所接受的东西的影像或记忆。并没有内在固有的理念或理想物,没有公相或抽象理念。三角形只是意味着所有被感知的三角形的观念(影像)。所有产生观念的实体都是物质的或有形体的。事实上,心智(mind)也是实体。语言(例如科学和数学语言)仅仅由符号和对应于经验的名称组成。所有的知识都只不过是记忆,心智通过词语来活动,而词语不过是事物的名称。真与假是名称而不是事物的性质。“人是生物”这句话是真的,是因为任何叫做人的也叫做生物。

头脑组织和联系那些关于物理客体的断言,当发现规则性时,就获得了知识。数学活动就产生这样的规则性。所以头脑的数学活动产生关于物理世界的真正知识,数学知识是真理。事实上,实在只有通过数学形式才为我们所知。

霍布斯为数学对真理的专有权的辩护是如此强烈,甚至数学家都起而反对。在给当时的物理学泰斗克利斯提安·惠更斯(Christian Huygens)的一封信中,数学家约翰·沃利斯(John Wallis)这样谈论霍布斯:

我们的利维坦正在激烈攻击和摧毁我们的大学(不仅我们的而且所有的),尤其是牧师、神职人员和所有的宗教。

似乎基督教世界没有可靠的知识,无论哲学上还是宗教上都荒唐可笑;似乎人们不懂哲学就没法理解宗教,而不懂数学就不懂哲学。

霍布斯强调感觉的纯粹物理根源,强调头脑在推理中的有限作用,这震惊了许多哲学家。在他们看来,心智不只是一堆机械运作的物质。在其 1690 年出版的《人类理解研究》(*Concerning Human Understanding*)一书中,洛克(Locke, 1632—1704)略似霍布斯,而不像笛卡儿,以人类没有固有观念的断言开始,认为人类与生俱来的是像白板一样空白的心智。经验经过感官的媒介,在这些白板上留下印记,产生简单观念。有些简单观念是物体固有性质的相似物。这些性质他称之为第一性的,例如充实、广延、形状、运动和数量。这些性质不管是否有人知觉都存在。还有一些来自感觉的观念是客体的真实性质在心智上产生的效果,但这些观念不对应于实际的性质。这些第二性的性质中有颜色、味道、气味和声音。

洛克在其著作中的目的是发现可知与不可知的界限,“在事物的明亮和黑暗部分设定界限的地平线”。这样他就可以反驳怀疑论者和另一极端的过于自信的推论者。前者“因为一些事物不能理解就质疑一切,否认所有知识”;而后者假定整个存在的汪洋大海是“我们理解力天然无疑的占有物,其中无物能在其判断之外,无物能逃脱其把握”。他的更积极有建设性的目的是建立知识和意见的基础和衡量标准,凭此在人类的理解力有能力把握的所有事物中获得或接近真理。

正如洛克在导论中所解释的,此书的计划或构思是“为了探究人类知识的起源、确实性和范围;以及信念、意见和同意的基础和范围”。遵循一种简明的历史方法,他叙述了我们的观念的起源,然后展示了通过这些观念理解力获得什么知识,最后探究

信念或意见的本性和根据。

虽然心智不能虚构或构造任何简单观念，它却拥有能力反思、比较和联结简单观念从而形成复杂观念。这里洛克背离了霍布斯。他说，此外，心智并不知晓实在本身，它所知的只是关于实在的观念，心智借助于这些观念运作。知识关乎观念的联系譬如说它们的一致或不一致。真理就在于符合事物之真实的知识。

基本的数学观念是由心智构造的，最终却可以追溯到经验。然而，一些观念不能追溯到真实存在。这些更抽象的数学观念是通过重复、结合和安排等方式从简单观念中构造出的。知觉、思考、疑问、相信、推理、意愿和知晓产生这些抽象观念。这样就可以得到一个完美的圆的观念。此外，还有产生这些抽象观念的内感。数学知识是普遍的、绝对的、确定不移和意义重大的。这种知识尽管是由观念组成的，却是实在的。

论证联系这些观念从而确立真理。洛克偏爱数学知识，是因为他觉得数学所处理的观念最清楚最可靠。此外，数学通过展示观念间的必然联系而将它们联系在一起，心智对此类联系理解得最透彻。洛克不仅偏爱由科学所产生的关于物理世界的数学知识，他甚至摒弃直接的物理知识。他的理由是，许多关于物质结构的事实简直不清楚，例如物体相互吸引或排斥的物理力。此外，因为我们永远不能知道外部世界的真实实体，所知的只是由感觉产生的观念，所以物理知识很难令人满意。不管怎样说，他还是相信，拥有数学所描写的性质的物理世界是存在的，正如上帝和我们存在。

总的来说，洛克的知识论尽管有点含混，可称之为直觉。在他的体系中，真理只存在于命题中，推进知识和正确判断的途径是直接或通过中介观念比较命题，以断定它们之间一致或不一

致。当这种一致或不一致可直接而确定地察觉时,知识就是可能的。

即使在论证的推理中,尽管一致或不一致不能直接察觉,而必须借助于其他观念来确立,每一步论证必须直觉上是清楚确定的。另一个知识来源是感觉,当外部事物呈现于我们的感官时,我们通过感觉直觉它们的存在。

根据这些来源中的第一个,即直接知觉,我们确知我们自身的存在,因为“在每一个感觉、推理或思考活动中,我们都意识到自己的存在;并且,其中并不缺乏最高程度的确定性”。几何学和代数中的数学关系,抽象的道德原则,以及上帝的存在都可以由推理的论证来证明,至于外部事物的存在,当其实际呈现于感官时,当然可由感觉知晓。这些都是基本的真理,对我们的生存和幸福至关重要,不管是今生还是来世,不过它们不会将我们远远带到存在和生命的广阔海洋。

像笛卡儿一样,洛克抛弃了所有第二性的性质。自然是沉闷的东西,无声、无臭、无色、无感觉,仅限于无意义的物质的运动。洛克对大众思想的影响是巨大的,他的哲学遍及 18 世纪,正如笛卡儿的哲学遍及 17 世纪。

霍布斯在其知识论中主要强调一个外在于人类的物质世界的存在。洛克也是这样,不过没那样极端。所有的知识都由此来源而生,而最终由心智或大脑所获得的关于这世界的最可靠的真理,是数学定律。乔治·贝克莱(George, Berkeley, 1685—1753)主教,著名的神职人员和哲学家,认识到这种对物质和数学的强调是对宗教和上帝、灵魂诸概念的威胁。利用巧妙、敏锐有力的论证,他起而攻击霍布斯和洛克,并提出自己的知识论。

他在否认外部世界的存在方面做得最彻底。他的基本论据

是,所有的感觉都是主观的,因而依赖于观察者和他的观点。他解释许多有意识的知觉的貌似长久性(例如一棵树两次相继观看时似乎不变),宣称他们留存于上帝的心智中。

在他的主要哲学著作《人类知识原理论》(*A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge*, 1708)中,他考察了科学中错误和困难的主要根源以及怀疑论、无神论和反宗教的依据,作了正面进攻。霍布斯和洛克都坚持我们所知的都是外部的物质客体在我们心智上产生的观念。贝克莱承认感觉或感官印象和观念从那里产生,但他质疑他们由外在于知觉的心智的物质客体产生。因为我们知觉的感觉和观念,没有理由相信任何事物外在于我们。洛克的论据是,我们关于物质客体的第一性性质的观念是准确的复本,贝克莱反驳说,一个观念除了像一个观念外不可能像任何其他东西:

当我们竭力理解外部物体的存在时,我们一直在思考自己的观念。但是心智,由于没注意到自身,便妄以为它能理解不依赖于心智而存在的物体。

洛克区分第一性性质和第二性性质的观念时无意间提供了一个论据,贝克莱借此来强化自己的观点。洛克认为前者对应于真实的性质而后者仅存于心智中。贝克莱问:如果不包括其他的可感性质如颜色,有人能设想一物的广延和运动吗?广延、形状和运动自身是无法想象的。所以,如果第二性性质仅存于心智中,则第一性性质也是。

简而言之,贝克莱的论证是,因为我们仅知道感觉和由这些感觉形成的观念,而不知道外部客体自身,根本就没有必要假定一个外部世界。那个世界并不比当人挨当头一击时所见到的星星更实在。一个物质的外部世界是一个无意义和不可理解的推

论。如果有外部物体,我们永远不能认识;如果没有,那么,我们会以和现在同样的理由认为有。贝克莱就这样处置了物质。

不过,贝克莱还需要解决数学。心智获得的规律不但能描写而且还能预言所假定的外部世界的进程,这如何解释?他如何抗衡 18 世纪对于数学所提供的关于外部世界的真理的根深蒂固的信念?

他进而摧毁数学,他精明敏锐,专攻其最薄弱之处。微积分的基础概念是函数的瞬间变化率,但人们对此理解得并不清楚,无论牛顿还是莱布尼茨都没讲清楚。因而贝克莱在当时能够以正当的理由满怀信心地攻击它。在 1734 年针对一个无信仰的数学家(埃德蒙·哈雷)而写的《分析家》(*The Analyst*)中,他用词毫不忌讳。他斥责瞬间变化率为“既不是有限量,也不是无穷小量,而且也不是什么也不是”。这些变化率只是“已失去量的鬼魂。可以肯定的是,……谁能理解二次或三次流数(牛顿为瞬间变化率而用的术语),在我看来,就没有必要拘泥于上帝中的任一点”。微积分证明有用,贝克莱解释说,在某些地方误差相互抵消。尽管贝克莱对微积分作了在当时看来有根据的批评,他并没有打发掉数学所提供的关于物理世界的所有真理。然而,在促使对手思考之余,他将反对数学的论据建立在这一点上。他这样总结了自己的哲学:

所有天国的天使和地上的器具,一切组成这世界巨大结构的物体,离开心智就没有任何实体。……只要它们没有被我实际知觉到,或者说没有存在于我的心智或任何其他被造物的精神中,那么它们或者根本不存在,或者存在于某个永恒精神的心智中。

即使贝克莱本人也偶尔在他否认其存在的物理世界作短途