

## 第一章

# 数学与应用数学专业 集中实践环节实施方案

广播电视大学本科开放教育“数学与应用数学专业（师范方向）”培养从事中等数学教学、教育管理及其他数学工作的德、智、体全面发展的高素质应用型高级人才。因此，本专业的学生既需要有扎实的数学专业基础，也需要有从事教育管理和教学工作的经验和能力。必要的教育实习是使学生获取实际工作经验和能力的一种行之有效的方法。毕业论文的撰写对于培养学生初步的科学研究能力，提高其综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力有着重要意义。为锻炼培养学生的教育管理和教学工作能力，增强学生毕业后从事教学工作适应性和研究问题的能力，在本专业的教学过程中必须高度重视集中实践教学环节，安排和组织好教育实习环节和毕业论文的撰写。

集中实践环节是教学过程的重要环节，对实现师范教育应用型人才的培养目标具有重要作用。集中实践环节教学的基本任务是培养和提高学生综合运用所学的基本理论、基本知识和基本技能，分析、解决实际问题的能力，提高学生的实践能力和创造能力；也是对学生进行一次从事教师职业所必需的综合训练，达到深化所学知识、拓展专业知识面、获得初步科学研究能力的目的。

本专业集中实践教学环节包括教育实习和毕业论文两项主要内容，不得免修。

### 一、教育实习

#### （一）目的

教育实习是实现本专业培养目标的一个综合实践环节，也是巩固学生所学的基础理论知识、培养学生实际工作能力、提高学生综合素质的重要教学环节。数学与应用数学专业师范方向的学生，必须参加教育实习。通过实习，使学生把所学的知识综合运用到教育管理和教学实践中，培养和锻炼学生从事教

育管理和教学工作的能力，提高教师职业道德，树立忠诚教育事业的现代教育思想。

## （二）要求

教育实习必须在修完数学与应用数学专业全部主干课程，并且已修课程学分达到最低毕业学分 80% 以后进行。

教育实习主要包括课堂教育实习、班主任工作实习、课外辅导工作实习、教育调查研究等。

教育实习计划由各省、市、自治区试点电大根据本大纲的要求，结合当地教育实际和学生从事的职业情况制定，并报中央电大备案。教育实习计划应包括具体实习内容的要求，指导教师的配备，实习小组的组建，实习地点以及组织领导等。

各省、市、自治区试点电大分校可根据学生的人数和实习点的分布情况，统一组织安排学生实习工作，并按要求配备指导教师。指导教师由具有较高的思想政治水平、较好的专业修养、较强的工作能力的教学人员和专业工作者担任。

教育实习必须在教师指导下进行，指导教师负责介绍中学教学的基本情况，指导学生研究中学数学教材，指导学生备课、审查学生的备课教案，组织评议和评定学生实习成绩。指导教师要认真履行职责，要与实习学校的指导教师配合，共同指导学生完成教育实习的全过程。

学生要在实习结束一周内写出实习报告。实习报告的内容应包括：实习学校的一般情况，实习内容，备课教案样例，实习体会和建议。实习报告的字数要求不少于 3 000 字。要求卷面整洁、字迹工整，使用正规稿纸或打印纸，装订规范。

教育实习成绩应在指导教师主持下，根据学生提交的实习报告和实习学校教师意见，写出评语，评定成绩。

教育实习一届安排一次，教育实习的时间以六周为宜。不参加教育实习的学生不得毕业。

## （三）考核与成绩评定

### 1. 考核内容

- （1）教育实习的基本情况与表现；
- （2）实习报告的内容与备课教案样例（2 学时）

### 2. 考核标准

教育实习（含实习报告）的成绩分为优秀、良好、中等、及格与不及格五等。

优秀：积极参加实习的各项活动，课堂教学质量高，班主任和辅导工作好，实习报告结构完整、文字准确，备课教案有特色。

良好：能参加实习的各项活动，课堂教学质量较高，班主任和辅导工作较好，实习报告结构完整、文字流畅，备课教案较有特色。

中等：能参加实习的各项活动，课堂教学质量较高，班主任和辅导工作较好，实习报告结构较完整、文字较流畅，备课教案一般。

及格：能参加实习的各项活动，课堂教学质量一般，班主任和辅导工作一般，实习报告结构较完整、文字较流畅，备课教案一般。

不及格：参加实习活动不积极，课堂教学质量差，班主任和辅导工作不认真，实习报告结构不完整、文字表述不清，无备课教案。

### 3. 成绩评定办法

(1) 由学生填写教育实习鉴定表，实习所在单位对学生实习时的基本情况与表现签署意见并由实习单位盖章。

(2) 实习报告原则上由指导教师和实习学校指导教师评定，电大分校负责实习成绩的审核。

教育实习经考核、审核合格后给予 2 学分。没有参加教育实习、未交实习报告者或成绩不合格者不记学分，成绩不合格者允许补写一次。

成绩由省级电大负责终审，中央电大组织抽查。

## (四) 对于正从事教学工作的学员教育实习按以下办法执行

1. 提交所在学校对其教学工作情况的考核意见（有获奖证书者应附上复印件），加盖公章。

2. 提交两学时的中学数学教案。

3. 提交一份个人从教经历和体会（不少于 3 000 字）。

4. 由电大分校根据以上材料评定其实习成绩。

## 二、毕业论文

毕业论文是广播电视大学数学与应用数学专业整个教学过程中对学生进行科学研究训练、造就合格人才的重要的教学环节，也是综合考查学生运用所学知识研究问题、分析问题的一个重要手段。通过毕业论文的撰写，使学生初步具备教师的基本素质和教学研究的基本能力。毕业论文可以是学科方面的研究成果，也可以是对现代教育理论问题的探讨或对中学课程体系、教学内容改革建议和设想。

## (一) 目的与任务

### 1. 目的

毕业论文是高等学校应届毕业生总结性的独立作业，是学生运用在校学习的基本知识和基础理论，去研究、分析、解决实际问题的实践锻炼过程，也是学生在校学习期间学习成果的综合性总结。通过撰写毕业论文对学生查阅文献资料、调查研究、设计实验、分析研究等方面能力进行综合训练，培养学生初步的科学研究能力。

### 2. 任务

- (1) 提高学生理论联系实际，参与社会实践的能力；
- (2) 引导学生掌握科学研究的方法；
- (3) 培养实事求是、严肃认真的科学作风；
- (4) 培养刻苦钻研、勇于创新的科学精神。

## (二) 选题原则

1. 毕业论文的选题必须符合教学目的和要求，确保学生所学的基本理论和基本技能得到全面训练，而且训练内容涉及知识面要宽。

2. 毕业论文的选题，要能结合现代教育理念、学科发展和教学改革，要具有指导实际教学工作的意义。

3. 毕业论文的选题要体现先进性，要有利于学生深化所学知识和知识面的拓展。

4. 毕业论文的选题应涉及所学专业基础课或专业课，在满足综合训练的前提下，尽可能选择与本地区、本单位的科研、教学实际相结合的题目。

5. 毕业论文的选题要从实际出发，根据学生自身的实际情况，可以写专题论文、文献综述、调查研究报告、中学数学教育研究，要注重论文的应用性。

6. 毕业论文题目完成的任务量要适中，学习中等程度的学生经过努力在8~10周内应能完成。

## (三) 写作要求

1. 要求学生在教师指导下，实事求是、深入实际，运用所学知识对某一专题进行较深入地研究，独立写出具有一定质量的毕业论文。确实需要多人合作完成的综合性课题，必须明确分工，由学生独立完成所分担的部分。

2. 毕业论文应当内容观点明确、材料翔实、结构合理严谨、层次清楚、语言通顺、格式规范。

3. 毕业论文选题应在所学专业范围以内，题目应由指导教师与学生共同

协商确定。

4. 毕业论文包括：目录、提纲（500 字左右）、论文摘要、关键词（3~5 个）、正文、引用参考文献资料目录，以及相关材料目录。字数不少于 5 000 字。

所引用的中外文参考文献资料中应注明引用的书名或论文题目、作者、出版单位（或期刊名）、出版时间及页码等。引用其他参考材料也应注明资料来源。

5. 毕业论文要求卷面整洁、统一用打印稿，并提供电子文档。论文打印要求是：

- (1) 统一用 A4 纸打印；
- (2) 论文主标题用黑体 3 # 字，居中；
- (3) 副标题用黑体 4 # 字，居中；
- (4) 作者姓名用宋体 4 # 字，居中；
- (5) “论文摘要”四个字用黑体 4 # 字，居左，空 2 字，内容用楷体小 4 # 字；论文摘要必须放在正文前；
- (6) 论文内各标题用黑体 4 # 字，居左，空 2 字；
- (7) 正文用宋体小 4 # 字；
- (8) 参考文献目录用楷体小 4 # 字；
- (9) 脚注用宋体 5 # 字。

#### （四）指导教师资格与职责

##### 1. 指导教师的资格

毕业论文指导教师由同时具有本科以上学历和中级（含）以上专业技术职务的，思想作风正派、具有较高业务水平和实践经验的数学教师或数学研究机构研究人员担任。在本校教师力量不足的情况下，可向社会聘请指导教师，但资格标准不得降低。

毕业论文指导教师的资格审查由省级电大负责。

##### 2. 指导教师的职责

指导教师应认真履行职责，指导学生完成毕业论文的全过程。指导教师的职责有：

- (1) 调动学生的积极性，充分发挥其主动性、创造性，不包办代替或放任自流；
- (2) 指导学生正确选题，提出明确要求，制定工作计划；
- (3) 介绍阅读参考文献、书目，进行文献检索指导；
- (4) 指导学生拟订论文写作提纲；
- (5) 指导学生撰写论文文稿，检查学生论文的进展情况，随时进行具体指

导（一般对学生进行三、四次阶段检查）；

(6) 审阅论文，提出修改意见，解答学生的疑难问题，做好指导记录；

(7) 审查学生毕业论文的真实性，对论文完成稿写出评语，提出评分意见；

(8) 指导学生做好答辩的准备工作。

每位指导教师每届指导的学生人数不超过 10 人；对每个学生的指导论文时间不低于 36 学时。

#### （五）时间安排

毕业论文的工作在修完数学与应用数学专业全部主干课程，已修课程达到本专业最低毕业学分（71 学分）的 80%（56 学分）后进行。修完本专业全部课程、达到毕业总学分后完成毕业论文和考核工作。

#### （六）毕业论文答辩

1. 毕业论文答辩是考查学生毕业论文的真实性，考查学生运用所学知识分析和解决问题的能力的有效手段。

2. 原则上数学与应用数学专业的学生均应参加毕业论文答辩，不参加答辩的学生需提出申请，经省级电大批准，并报中央电大备案。不参加答辩的学生不能申请学位。

3. 毕业论文答辩由各试点电大具体组织实施。试点电大应根据实际情况成立答辩组，负责审阅并主持毕业论文的答辩工作。

4. 答辩组由本学科电大专职教师和外聘专家 3~5 人组成，其中具有副高级及以上专业技术职务的 2 人以上，答辩组设答辩主持人 1 名。

5. 答辩主持人须具有副高（含）以上专业技术职务，经过培训考核合格并获得中央电大与东北师范大学联合颁发的答辩主持人资格证书。指导教师在本入指导的学生答辩时不能担任答辩主持人，但可以是答辩组成员。

6. 答辩组负责审阅并组织毕业论文的答辩和成绩评定工作。答辩主持人主持毕业论文的答辩、写出评语，并对论文答辩成绩签字负责。

7. 学生的答辩情况应作为毕业论文成绩评定的考核内容之一。

8. 答辩程序如下：

(1) 答辩组审阅毕业论文，主要审查其内容是否正确，论据是否严谨，是否有一定新意，作出初步评价；

(2) 然后，在论文所研究的范围内，提出有关问题，要求学生答辩。如发现论文是抄袭他人的或由他人代写的，不能参加答辩，应令其重写。

(3) 对学生的论文质量及答辩情况给出评语并进行投票表决，表决结果应记录在案。

(4) 答辩后，要及时公布答辩成绩。答辩组根据学生的毕业论文初评成绩和答辩成绩，给出综合成绩，由答辩主持人签字，登入毕业论文评语和成绩表中。

答辩完成的毕业论文交试点电大分校教务处存档，集中保管。

## （七）毕业论文的成绩评定

### 1. 考核内容

(1) 科学性 论文内容与论点是否正确，论证是否充分、严谨、可靠，结论是否正确，能否反映学生对本学科知识系统掌握的程度及对其中某一问题有较深入的理解和认识。

(2) 实用性 选题是否具有现实意义和学术价值，能否体现出分析问题、解决问题的能力与水平。

(3) 技术性 是否具有收集、整理、运用资料的能力，语言表达是否清晰、准确，格式是否规范。

### 2. 成绩评定标准

毕业论文成绩分为优秀、良好、中等、及格与不及格五个等级。取得及格以上成绩者给予毕业论文的学分。

各等成绩评定标准如下：

(1) 优秀：论文内容正确，语言流畅，论述严谨正确，有独立的创意。

答辩中回答问题正确，重点突出，语言简练。

(2) 良好：论文内容正确，语言流畅，论述严谨正确，有一定的创意。

答辩中回答问题正确。

(3) 中等：论文内容正确，语言流畅，论述严谨正确。

答辩中回答问题基本正确。

(4) 及格：论文内容正确，语言规范，论述正确。

答辩中回答问题基本正确。

(5) 不及格：论文内容不正确，或论述不正确，或抄袭他人文章、成果、书籍者，或在答辩中对大多数问题都不能正确回答。

### 3. 成绩评定办法

指导教师应根据学生的论文质量和成绩评定标准给出建议成绩。

经过口头答辩，由答辩组根据毕业论文质量、指导教师的初评成绩与答辩情况给予评定成绩，优秀论文不超过 15%。

成绩由省级电大负责终审，中央电大组织抽查。

### 4. 毕业论文成绩被评定为不合格者，可补做一次

## （八）组织实施

中央电大负责毕业论文工作的方案制定、工作部署以及抽查评估。

省级试点电大主要负责按照中央电大的有关要求，制定有关毕业论文工作的具体实施方案并安排论文答辩工作；对所属地（市）级试点电大毕业论文工作进行指导及现场检查，审核其报批的工作计划、论文课题及毕业论文成绩。

地（市）级试点电大和试点教学点根据上级电大的要求，具体组织毕业论文指导及论文答辩等各环节的工作。

## 第三章

# 中学数学教学中的启发展性

## 第一节 讲解的基本方法

一般而言，不同学科不同内容讲解的方法是不同的，即使对于同一内容，不同教师的讲授方法也不尽相同。讲解技能的类型可依据不同的标准、层次进行划分。我们提出解释型、描述型、推理型、总结型四种基本类型。这四种类型，既有各自的特殊性，又有其共性，因此，就结构而言，既有各自的模式，也有其共同的模式，下面分别加以阐述。

### 一、解释型讲解

解释型讲解又称说明型讲解，通过讲解将未知和已知联系起来。对某个数学事实（如定理、定义）的含义、数学符号的意义、解题过程中易出现误解的原因等的讲解，都属于解释型讲解。

例 1：对“命题”概念的讲解。

首先引导学生看书，并回答下列问题：

- (1) 什么叫做命题、真命题和假命题？
- (2) 怎样找出一个命题的“题设”和“结论”两部分？

（学生从课本中找到答案并不难，在学生回答出第 1 题的答案后，出示预先写好的小黑板或用投影播放下面问题。）

“判断下列语句是不是命题，若是命题请判断是真命题还是假命题。

常温下，纯净的水是无色透明的液体。

对顶角相等。

画一个角。

若  $x > y$ ，则  $2x + 3 < 2y + 3$ 。

两条边相等的三角形是正三角形。

⑥ 每一个大于 4 的偶数都是两个奇素数之和；每一个大于 7 的奇数都是三个奇素数之和（这就是迄今尚未彻底证明的著名的哥德巴赫猜想）。”

（在学生回答完上述问题后 进行以下环节。）

师：上述语句中，除 外都是命题。对某一件事起到判断作用的语句才叫做命题。反之，不起判断作用的语句就不是命题，数学中用来表达数学判断的陈述句或符号的组合就称为数学命题。命题不一定为数学所独有。

如果命题所表达的判断符合客观实际，也就是正确的命题，则认为该命题是真命题；否则，命题所表达的判断不符合客观实际，则认为该命题是假命题。上述的命题中： 和 都是正确的，是真命题； 和 都是错误的，是假命题；命题⑥自从 1742 年德国数学家哥德巴赫提出以后，至今逾 260 年，虽经世界上许多杰出数学家的努力，包括我国著名数学家陈景润所取得的杰出成果，但这一命题的正确性，仍然没有得到证实，它的真假性是客观存在的，证明它的真假只是时间问题。

很明显， 不是数学命题， ， ， ， ⑥都是数学命题。要注意，一个命题或者是真，或者是假，但任何命题都不能同时既是真又是假。同学们再考虑第二个问题，怎样找出一个命题的“题设”和“结论”？

这样的解释，强调了理解命题这一概念中应注意的几个问题，加深了学生对命题这一概念的认识，同时通过命题⑥对哥德巴赫猜想作一介绍，激发学生对数学的学习兴趣。

例 2：讲三角形全等时，用符号“ $\cong$ ”表示全等，可以这样解释：“ $=$ ”号表示相等，“ $\cong$ ”表示形状一样， $\triangle ABC$  全等于  $\triangle A'B'C'$  可用符号表示为  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ 。

例 3：在讲解分式方程为什么会产生增根，为什么解分式方程必须验根时，作如下解释讲解：

$$\begin{aligned} \text{解方程} \quad & \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-1} = \frac{6}{x^2-1} \\ \text{解：} \quad & \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-1} = \frac{6}{x^2-1} \quad \text{①} \end{aligned}$$

方程两边都乘以  $(x+1)(x-1)$ ，得

$$2(x-1) + 3(x+1) = 6 \quad \text{②}$$

$$5x + 1 = 6 \quad \text{③}$$

$$5x = 5 \quad \text{④}$$

$$x = 1 \quad \text{⑤}$$

检验：把  $x=1$  代入原方程 中，会看到出现了分母的值为零的情况，这样分式无意义。可见  $x=1$  不是原方程的根，问题产生在由方程 变形到方程

这一步。

这一步变形是原方程两边都乘以最简公分母  $(x+1)(x-1)$ ，约去分母，把分式方程转化为整式方程。但方程中的字母  $x$  是有条件限制的，即  $x \neq \pm 1$ ；否则分式没有意义，而转化为整式方程时，字母  $x$  就不受这个条件限制了，这样得到的整式方程与原分式方程就不一定同解了，而题中方程②的解又正是  $x=1$ ，这就破坏了方程对  $x = \pm 1$  的限制条件，所以  $x=1$  只是方程的解，不是方程的解，说明方程无解。但是，如果方程的解不等于  $\pm 1$  那么方程的解就是方程的解。

在方程变形时，有时可能产生不适合原方程的根，这种根叫做原方程的增根。因为解分式方程时可能产生增根，所以解分式方程必须验根。

解释型讲解，一般适用于初级的、具体的、概念性的知识。对于抽象的、复杂的知识，单用解释型讲解难以收到好的效果。解释型讲解是经常运用的一种讲解方法。

## 二、描述型讲解

描述型讲解是教师对某个数学概念、定理、解题思路、图像、图形等特征进行形象地介绍，从而给学生留下更为深刻的印象的讲解方法。描述的作用就在于用文字语言形式表现出研究对象的特点，使学生对教学知识有一个形象的、具体的了解。

例 1：对“直线和圆的位置关系”这一问题的讲解，采取如下的方法（出示图 2-1 到图 2-3）：

同学们去大海畅游时，在清晨我们可以看到一种令人心旷神怡的景象，火红的太阳好像从大海中冉冉地升起，随着时间的变化，太阳从海中（图 2-1）升到海面上（图 2-2），又从海面上升到海的上方（图 2-3）。如果我们将太阳看作圆，海面的一端看成一条线的话，我们就不难看出直线和圆的不同位置关系。

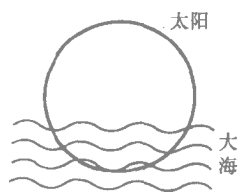


图 2-1

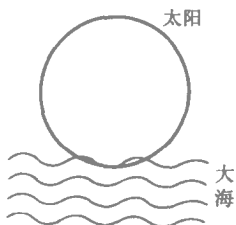


图 2-2

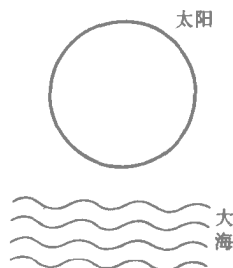


图 2-3

(指图 2-1) 当直线和圆有两个公共点时, 叫做直线与圆相交;

(指图 2-2) 当直线和圆有惟一公共点时, 叫做直线与圆相切;

(指图 2-3) 当直线和圆没有公共点时, 叫做直线与圆相离。

这样的讲解, 加深了对直线与圆的位置关系的认识, 为今后的学习打下了一个坚实的基础。

例 2: 高中平面解析几何中, 充要条件这一知识学生很难理解, 我们可采取下面的讲解方法, 来加深对定义的理解。

小李是沈阳市人  $\rightarrow$  小李是中国人。

“小李是沈阳市人”就说明“小李是中国人”, 所以“小李是沈阳市人”是“小李是中国人”的充分条件。而“小李是中国人”是“小李是沈阳市人”必须具备的条件。因此, “小李是中国人”是“小李是沈阳市人”的必要条件。

综上可得: 如果  $A \Rightarrow B$ , 那么  $A$  是  $B$  成立的充分条件, 而  $B$  是  $A$  成立的必要条件。

例 3: 在对“过两点有且只有一条直线”这一公理中的“有且只有”进行解释时, 有的教师是这样讲解的:

“有且只有”中的前一个“有”是指“不是没有”, “只有”专指“没有两条、三条……”。比如: 甲、乙学生二人, 甲手里有一元钱, 乙有五元钱, 现另有丙学生买东西时缺一元钱向这二人借: “谁有一元钱?” 甲、乙都可以回答: “有”但是甲还可以说: “我只有元钱!” 而乙却不能这样回答。

学生听完这样的讲解, 对“有且只有”的本质属性便可清楚了, “有”指“存在”, “只有”指“惟一”。

例 4: 在讲反余弦函数  $y = \arccos x$  的图像时 (如图 2-4), 学生常画不好, 记不住图像的特点。为此, 教师在分析完图像特点及函数性质之后, 可说:

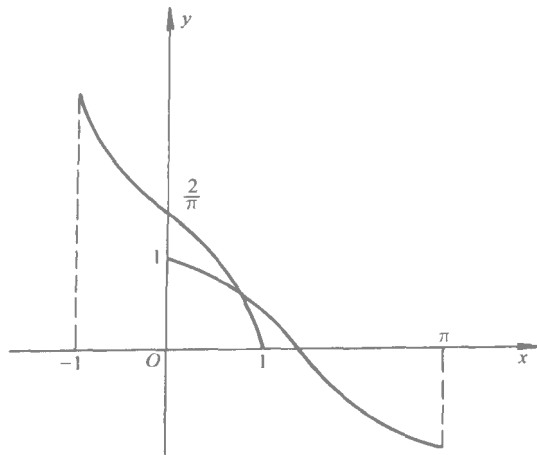


图 2-4

“同学们可以发现 余弦函数和它的反函数图像 多么像一只展翅俯冲的雄鹰啊!”

描述型讲解可以提供大量的材料, 激发学生形象思维(如联想、想像)的发展, 但是描述型讲解难于胜任抽象知识的传授, 也难于培养学生的逻辑思维能力。即便如此, 描述型讲解也是大量应用的一种讲解方法。

### 三、推理型讲解

推理型讲解也可称为逻辑性讲解。教学是具有严密的逻辑性的科学, 因此, 数学课堂教学必定处处都要使用推理型的讲解。推理型讲解包括数学推理论证、理由原因的讲解。定理的证明和证明题的证明过程中大量应用推理型讲解, 数学中的任何演绎过程(计算、恒等变形)也必须使用推理型讲解。推理型讲解, 是培养学生的数学逻辑思维能力和逻辑推理能力的重要教学技能。

例 1: 在讲“三角形中位线定理——三角形的中位线平行于第三边, 并且等于它的一半”时, 教师经过分析后, 给出如下证明:

已知: 如图 2-5,  $\triangle ABC$  中,  $DE$  是  $\triangle ABC$  的中位线。求证:  $DE \parallel BC$  且  $DE = \frac{1}{2}BC$

证明: 过  $D$  作  $DE' \parallel BC$ , 交  $AC$  于  $E'$ , 则

$$AE' = E'C$$

因为  $DE$  是  $\triangle ABC$  的中位线

所以  $AE = EC$

所以  $DE'$  与  $DE$  重合

过  $D$  作  $DF \parallel AC$ , 交  $BC$  于  $F$ , 则

$$BF = FC$$

因为 四边形  $DFCE$  是平行四边形

所以  $DE = FC$

因为  $FC = \frac{1}{2}BC$

所以  $DE \parallel BC$  且  $DE = \frac{1}{2}BC$

其中推理性讲解语言是:

根据平行线等分线段定理推论 2——经过三角形一边的中点与另一边平行的直线必平分第三边。

根据三角形中位线的定义。

还是根据平行线等分线段定理推论 2。

根据平行四边形的定义——两组对边分别平行的四边形是平行四边形。

根据平行四边形的性质——平行四边形的对边相等。

定理或证明题中的推理性讲解, 要简单明确, 对基础较差的学生还要注意

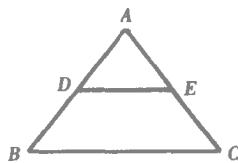


图 2-5

讲解得细一些。

例 2: 证明: 若  $a, b \in \mathbf{R}^+$ , 且  $a \neq b$ , 则  $a^3 + b^3 > a^2b + ab^2$ 。在分析了证明方法之后, 教师给出证明。

证明: 因为  $(a - b)^2 > 0$

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0$$

$$a^2 - ab + b^2 > ab$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) > (a + b)ab$$

$$\text{故 } a^3 + b^3 > a^2b + ab^2$$

推理性讲解

因为  $a \neq b$ , 所以  $a - b \neq 0$

所以  $(a - b)^2 > 0$

平方差公式

移项

不等式两边同乘以一个正数  $(a + b)$ , 不等号方向不改变

立方和公式

推理型讲解的语言必须严密、简练, 要与书写同步, 对关键性的步骤、难点、新知识的应用等的讲解速度要慢。另外讲解的严谨性还要适应学生的可接受性。

#### 四、总结型讲解

课堂上的总结型讲解, 是指教师带领学生学习某段数学知识 (如讲完一个证明方法或一个计算方法) 之后, 用简明的语言进行总结概括, 简明扼要地得出结论或强调教师观点的讲解方法。每节课、每段教材学习完之后, 教师都必须进行总结性讲解。总结性讲解经常是将前述数学事实进行概括, 指出数学思想方法, 问题的关键, 以及容易忽视、容易出毛病的地方。没有总结性的讲解, 易给人造成有头无尾的感觉, 不会收到好的教学效果。总结性讲解在教学中会起到提纲挈领的强化作用, 是对新认知结构再次建构和巩固所学知识并使之系统化的重要教学技能。

例 1: 九年义务教育三年制教材《平面几何》第二册第 179 页上的例题。求证: 顺次连接四边形四条边的中点所得的四边形是平行四边形 (如图 2-6)。

在讲解完此例后, 提出下面的问题:

顺次连接平行四边形的四条边的中点呢?

顺次连接矩形的四条边的中点呢?

顺次连接菱形的四条边的中点呢?

顺次连接正方形的四条边的中点呢?

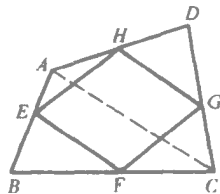


图 2-6

顺次连接对角线互相垂直的四边形的四条边的中点呢？

- ⑥ 顺次连接梯形的四条边的中点呢？  
 ⑦ 顺次连接等腰梯形的四条边的中点呢？  
 ⑧ 顺次连接直角梯形的四条边的中点呢？

通过分析、讨论后，学生可以得出：和⑦是菱形；和⑧是矩形；是正方形；和⑥、⑧是平行四边形。

之后，提出问题“通过上面的讨论，你能发现什么规律呢？”

学生分析、讨论后，教师作总结性讲解：

顺次连接对角线既不相等也不垂直的四边形的各边中点所得四边形为一般的平行四边形。

顺次连接对角线相等但不垂直的四边形各边中点所得四边形为菱形。

顺次连接对角线不等但垂直的四边形各边中点所得四边形为矩形。

顺次连接对角线相等又垂直的四边形各边中点所得四边形为正方形。

通过总结型的讲解，能够帮助学生逐步提高分类、归纳、总结规律的能力，使学生得到综合发展。

例 2：求证：关于  $x$  的方程  $x^2 + (2k + 1)x + k - 1 = 0$  有两个不相等的实数根。

$$\begin{aligned} \text{证明：因为判别式 } \Delta &= (2k + 1)^2 - 4(k - 1) \\ &= 4k^2 + 4k + 1 - 4k + 4 \\ &= 4k^2 + 5 > 0 \end{aligned}$$

所以 方程有两个不相等的实数根。

教师讲解或学生练习后，教师作如下总结性讲解：

解这种类型题的步骤是：第一，将方程整理成一般形式；第二，求出  $\Delta$  的表达式；第三，确定  $\Delta$  的正负；第四，写出结论。

例 3：在学习了相交弦定理、切割线定理及它们的推论后，教师进行如下总结性讲解。

图 2-7 (1) 中，两弦交点在圆内，则为相交弦定理，表示为： $PA \cdot PB \cdot PC \cdot PD$ ；

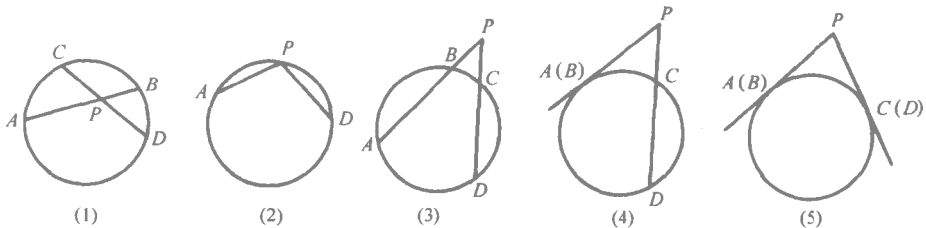


图 2-7

当两弦交点  $P$  运动到圆周上,如图 2-7 (2),此时  $B, C$  与  $P$  点重合,上述等式仍成立,即:  $PA \cdot 0 = 0 \cdot PD$ ;

当两弦交点  $P$  运动到圆外,如图 2-7 (3),此时  $PBA, PCD$  是圆的割线,仍有  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ ,这个结论即为切割线定理推论,也可以称为割线定理;

在图 2-7 (3) 中,固定交点  $P$  和割线  $PCD$ ,使割线  $PBA$  绕  $P$  点运动变成圆的切线,得图 2-7 (4),此时  $A, B$  重合于  $A$  点,这时有  $PA \cdot PA = PC \cdot PD$ ,即  $PA^2 = PC \cdot PD$ ,此为切割线定理。

在图 2-7 (4) 中,固定  $PA$ ,使割线  $PCD$  绕  $P$  点运动变成圆的切线时,如图 2-7 (5),有  $PA^2 = PC^2$ ,即  $PA = PC$ ,此为前面所学的切线长定理。

对于总结性讲解,中心意思要突出,所述问题语言要简练,那种“今天这节课,我们讲了两个定理和三个例题”的总结性语言,是不应出现的。

对于讲解技能,应强调教师的解说不能过长、过快,要给学生思考的时间和发挥积极性的机会;要能体现对学生表示理解,是在与学生共同探索数学问题;同时也要给学生反馈的时间和机会,教师要及时掌握反馈的内容。

## 第二节 启发的基本方法

启发式教学思想符合辩证唯物主义的认识原理和学生的认识规律,有助于充分发挥教师的主导作用和学生的主体作用,摆正教与学的关系,变“要我学”为“我要学”,从而充分发挥学生学习的积极性、主动性与创造性,使其主动活泼地学习。因此,在数学教学中应充分合理地运用这一教学指导思想。下面就课堂启发的几种基本方法作一下介绍。

### 一、类比型启发

类比型启发是指将所学的新知识与和它有内在联系的旧知识进行类似比较,来获得新知识的方法。

例:  $n$  个两两相交的平面最多能把空间分割成多少部分?

解决平面分割空间的问题比较困难,但与直线分割平面的情形具有某种相似性。因此,我们可以利用解决直线分割平面的方法去解决平面分割空间的问题。

解:显然,两两相交、无任何三个平面共线,且无任何四个平面共点的几个平面把空间分割成的部分数最多。类比平面内两两相交,无任何三条共点的

几条直线分割平面的情形，可以从中受到启发。

设想，空间中增加第  $n+1$  个平面与前  $n$  个平面相交，得到  $n$  条两两相交、且无任何三条共点的直线，把第  $n+1$  个平面分割成  $[n(n+1)/2]+1$  个区域。相应地，空间增加  $[n(n+1)/2]+1$  个区域。于是，

$$f(n+1) = f(n) + \frac{n(n+1)}{2} + 1。$$

这是一个递推公式，其中  $f(2) = f(1) + 2, f(1) = 2$ 。

从而，空间被分割成的部分数为

$$f(n) = \frac{1}{6} n(n^2 + 5) + 1。$$

恩格斯在《自然辩证法》中指出：“只要自然科学在思维着，它的发展形式就是假设。”而假设的形成和发展过程，是运用各种推理的过程。一般来说，在形成假设阶段，多用类比推理。尽管由类比推理所获得的结论带自然性，但可以启发人们的思维，开阔人们的眼界。在数学课堂教学中，教师应当有意识地引导学生自觉地运用类比推理进行大胆的联想或猜想，培养学生的主动迁移意识。这样就会激发他们的学习兴趣，培养他们的创造性思维能力，使他们的认识得到拓宽和深化，逐步完善他们的数学认识结构。

## 二、情境型启发

情境型启发就是创设问题情境进行启发式教学的方法。所谓问题情境，就是通过教师设立一系列有难度的问题，活跃学生的思维，激发学生的求知欲望，从而营造一种强烈的课堂求知气氛。

教学实践证明，学生的认识活动总是在一定的情境中进行的，积极的思维常常取决于问题的刺激程度。从教学中不难发现，绝大多数学生有时对于一些新知识的获取往往需要教师恰当地加以点拨才能实现，“一启就发”，学生并不感到怎样吃力和被动；而有的时候，即便是较简单的、较容易理解的知识，学生接受起来仍感到很费劲。这种情况的出现，原因是多方面的，但往往与课堂上特殊性的问题情境密切相关。缺少师生互动和学生积极思维的课堂气氛，学生的思维就不能被很好地牵动，学生的积极性无法被充分地调动起来，即使所谓“跳一跳，摸得着”，在这种情况下也无法实现。实际上，学生学习动机的激发，学习积极性的调动在于利用一定的诱因，从而使形成的学习需要由潜在状态转入活动状态，或者说是现实状态。因此，在教学中，教师要善于创设问题情境，使学生产生释疑的强烈愿望。

例 1：关于添拆项的因式分解，如对  $a^4 + a^2b^2 + b^4$  分解因式，学生感到困难，教师可在教学中设计冲突，激发学生自己发现问题、解决问题的动机。