前 言

QIAN YAN

《高中全程复习优化设计》系列丛书本着与时俱进的设计理念，率先推出案例探究式复习法的备考模式。

以往的复习模式大都是以教师讲为主，从复习目标到知识梳理，从重难点解析到典题剖析，依次展开，复习课常常变成新授课。这种模式忽视了学生在备考行为中的主观能动性，备考主体的潜力得不到充分挖掘。案例探究式复习法就是通过案例举证来引导学生做题并发现问题，学生会什么，不会什么，一目了然，平时学习中知识的疏漏和与高考要求的差距就会很明显地凸现出来。然后通过案例剖析和知识梳理来校正知识偏差，通过备考阅览室来补充知识，开拓视野，并进行能力培养。很显然，案例探究式复习法的复习是有重点、有选择的复习，是有目的、有针对性的复习。

《高中全程复习优化设计》系列丛书经过全新改版后具备如下特点：

案例探究，素质备考　素质教育，首先要有情景创设。案例探究式复习法就是通过大量与社会生产、生活实际及时事热点相结合的案例(题例)及剖析来培养学生动手实践的创造能力和人文素养。备考的关键是知识的贯通，以适应综合考试。通过学科内综合专题知识和双综合提升两个梯级对学科间交叉综合专题知识的强化，培养学生的综合能力，最终实现素质备考的目标。

高考提前，备考提速　从2003年起高考提前到六月份，这样，以前的复习进度安排就不太适应了。本书的基础综合过关版除将章节复习提炼为单元复习外，同时大部分学科还把双综合复习中的知识专题前移至基础综合过关版中，加快了复习进度。双综合提升版语文、数学、英语三大主科分热点专题和综合模拟两部分编写，物理、化学、生物、政治、历史、地理六科按学科内综合热点专题、学科间交叉综合热点专题和综合模拟三部分编写，在强调综合复习的同时，体现复习过程的完整性。

模式创新，功能齐备　本套丛书摆脱了原《高中全程复习优化设计》‘1+2’模式的束缚，成功地将《高中全程复习优化设计·高考单元专题复习质量评估》分离出去，采用‘1+1’模式编写并自成体系。学生用书侧重于训练和知识方法的引导，提供备考复习的最佳模式;教师用书着重于指导并进行了总复习的组织与规化，使学、讲、练紧密结合，功能齐备。

两个版本，个性设计　目前，正值原人教版统编教材与试验修订教材新旧交替时期，本套丛书数学、物理、化学、生物、历史、地理新旧版内容差异较大的各科均按两个版本编写，这就满足了使用不同教材读者的不同需求。

本书体例设计注重创新，主要有以下栏目组成：

[问题磁场]将典型问题精心设计，创设情景，引发思考。用磁石将‘读者’引入设定的‘磁场’之中。

[案例探究]根据[问题磁场]栏目中激活的思维，有目的有针对性地精选案例进行系统剖析，并培养考生的解题方法与技巧。

[知识归纳与拓展]进行知识大盘点，高度凝练知识体系，构建单元或专题考点网络，对重难点知识，特别是考

生平时学习中容易疏漏或出现理解偏差的知识进行补充或详细诠释。

[备考创新训练]精心选编各类典型试题,凸现创新、综合和实践能力的培养。注重练测,以巩固知识、掌握技巧、形成技能。

《高中全程复习优化设计》系列丛书全新改版,我们热切希望新的设计思想能引领新时期高三备考复习模式的新浪潮。但案例探究式复习法毕竟还是新的模式、新的探索,更需要广大读者的关心与呵护。丛书中不足之处在所难免,敬请广大读者批评指正。

目录

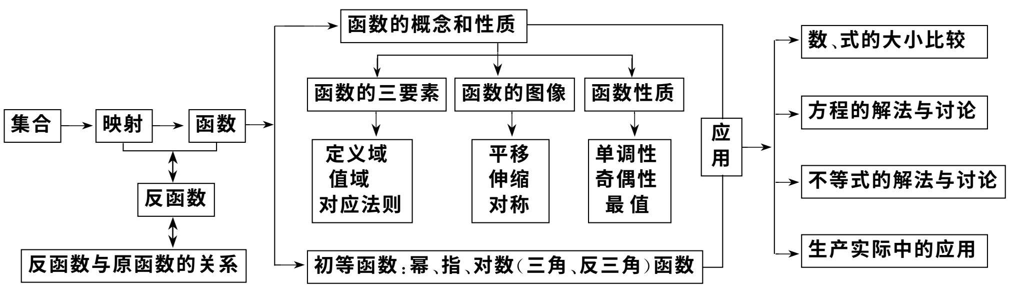
LU MU

目录

LU MU

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

知识互联网



复习要求

1. 理解集合、子集、交集、并集、补集的概念. 了解空集和全集的意义,了解属于、包含、相等关系的意义,并能掌握有关的术语和符号,能正确地表示一些简单的集合.
2. 理解$|ax+b|<c$、$|ax+b|>c(c>0)$型不等式的概念,并掌握他们的解法. 了解二次函数、一元二次不等式及一元二次方程三者之间的关系,掌握一元二次不等式的解法.
3. 了解映射的概念,理解函数及其有关的概念,掌握互为反函数的图象间的关系.
4. 理解函数的单调性和奇偶性的概念,并能判断一些简单函数的单调性和奇偶性,能利用函数的奇偶性与图象的对称性的关系描绘函数图象.
5. 理解分数指数幂、根式的概念,掌握分数指数幂的运算法则.
6. 理解对数的概念,掌握对数的性质和运算法则.
7. 掌握幂函数的概念及其图象和性质. 在考查掌握函数性质和运用性质解决问题时,所涉及的幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 中的α 限于在集合$\{-2,-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{2},1,2,3\}$中取值.
8. 掌握指数函数、对数函数的概念及其图象和性质,并会解简单的指数方程和对数方程.

1. 集合的概念与运算

问题磁场

▶1. 给出下面六个关系式:①$0\subset\{0,1\}$;②$0\in\{0,1\}$;③$\varnothing\in\{0\}$;④$\varnothing\subset\{0\}$;⑤$\{0\}\subseteq\{0,1\}$;⑥$\{0\}\subseteq\{0\}$. 其中正确的是 …………………………………………………………（　　）

A. ①②④⑤　B. ②③④⑤　C. ②④⑤　D. ②④⑤⑥

▶2. 设 I 是全集,$A\subseteq I$,$B\subseteq A$,则下列结论错误的是 …（　　）

A. $\overline{B}\supseteq\overline{A}$　　B. $A\cap B=B$

C. $A\cap\overline{B}=\varnothing$　　D. $\overline{A}\cap B=\varnothing$

▶3. 已知全集 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,M、N 是它的子集,$\overline{M}=\{1,2,3,4\}$,$N=\{2,4,6,8\}$,则 $M\cap\overline{N}$ 等于 ………（　　）

A. $\{1,3,5,7\}$　　B. $\{2,4,6,8\}$

C. $\{5,7\}$　　D. $\{1,3\}$

▶4. 集合 $M=\{1,2,3,4,5\}$的子集个数是 ……………（　　）

A. 32　B. 31　C. 16　D. 15

(2001 年・京、皖、蒙春季高考)

▶5. 已知集合 $A=\{x|x^2+x-1=0\}$,$B=\{x|ax+1=0\}$,若 $B\subset A$,则实数 a 的不同取值的个数是__________.

▶6. 设集合 $A=\{x|x^2-a<0\}$,$B=\{x|x<2\}$,若 $A\cap B=A$,则实数 a 的取值范围是______.

▶7. 求集合$\{x|x^2+4x+m+1=0\}$的所有元素之和.

▶8. 已知集合 $A=\{1,2,3,k\}$,$B=\{4,7,a^4,a^2+3a\}$,且 a、$k\in\mathbf{N}$,$x\in A$,$y\in B$. $f:x\to y=3x+1$ 是 A 到 B 上的一个函数,求 a、k 的值.

▶9. 设 S 为满足下列两个条件的实数所构成的集合:①S 内不含 1,②若 $a\in S$,则$\frac{1}{1-a}\in S$.

解答下列问题:

(1)若 $2\in S$,则 S 必有其他两个数,求出这两个数.

(2)求证:若 $a\in S$,则 $1-\frac{1}{a}\in S$.

(3)在集合 S 中,元素的个数能否只有一个?为什么?

案例探究

▶1. 若 $A=\{x|x=a^2+2a+4,a\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y|y=b^2-4b+3,b\in\mathbf{R}\}$，试确定集合 A、B 的关系.

本题考查集合的概念；集合与集合的关系及函数求值域.

分析：弄清集合元素的属性，A、B 均为二次函数的值域.

解：由 $x=(a+1)^2+3$，可知 $A=\{x|x\geqslant3\}$

由 $y=(b-2)^2-1$，可知 $B=\{y|y\geqslant-1\}$

所以 $A\subset B$.

评注：观察集合时要特别注意元素的属性是数？是点？还是定义域？值域？等.

▶2. 已知 R 为全集，$A=\{x|\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant-2\}$，$B=\{x|\frac{5}{x+2}\geqslant1\}$，求 $\overline{A}\cap B$.　　（2001 年 · 上海春季高考）

本题考查集合、不等式的有关知识及运算能力.

分析：先化简集合，解对数不等式注意定义域及单调性；解分式不等式不要两边同乘含 x 的代数式.

解：由已知 $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant\log_{\frac{1}{2}}4$.

因为 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 为减函数，所以 $3-x\leqslant4$.

由 $\begin{cases}3-x\leqslant4,\\3-x>0,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant x<3$.

所以 $A=\{x|-1\leqslant x<3\}$.

由 $\frac{5}{x+2}\geqslant1$，解得 $-2<x\leqslant3$.

所以 $B=\{x|-2<x\leqslant3\}$.

于是 $\overline{A}=\{x|x<-1$ 或 $x\geqslant3\}$，

故 $\overline{A}\cap B=\{x|-2<x<-1$ 或 $x=3\}$.

评注：有关集合的题，化简集合一般是应该先考虑的问题.

▶3. 已知集合 $M=\{a,a+d,a+2d\}$，$N=\{a,ar,ar^2\}$，如果 $M=N$，求 r 的值.

本题考查集合的性质、方程的思想及运算能力.

分析：关键要搞清集合中元素的互异性、无序性. 集合相等当且仅当集合的元素相同. 因 a 已相同，所以应分 $a+d=ar$ 与 $a+d=ar^2$ 两种情况加以讨论.

解：分两种情况：

$\begin{cases}a+d=ar\\a+2d=ar^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a+d=ar^2\\a+2d=ar\end{cases}$　若 $\begin{cases}a+d=ar & ①\\a+2d=ar^2 & ②\end{cases}$

②－①得 $ar^2-2ar+a=0$.

$a=0$ 时，N 中三个元素均为零，与元素互异性矛盾.

$\therefore a\neq0$，$\therefore r^2-2r+1=0$ 得 $r=1$. 但 $r=1$ 时，B 中的三个元素又相等. 无解.

若 $\begin{cases}a+d=ar^2 & ③\\a+2d=ar & ④\end{cases}$

④－③得 $d=ar(1-r)$，

代入③得 $2ar^2-ar-a=0$.

$\because a\neq0$，$\therefore 2r^2-r-1=0$，解得 $r=-\frac{1}{2}$，$r=1$.

当 $r=1$ 时，N 中三元素均为 a，$r=1$ 不合题意.

故所求 r 的值为 $r=-\frac{1}{2}$.

评注：集合元素的三大特性：确定性、互异性、无序性.

▶4. 已知集合 $A=\{y|y^2-(a^2+a+1)y+a(a^2+1)>0\}$，$B=\{y|y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2},0\leqslant x\leqslant3\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

本题考查集合的有关概念、不等式、二次函数求值域，运算能力.

分析：集合 A、B 均为数集，将其区间解出，借助数轴并利用 $A\cap B=\varnothing$ 定义求解.

解：$\because a^2+1>a$，$\therefore A=\{y|y>a^2+1$ 或 $y<a\}$，

又由 $y=f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2+2$，

知 $y_{\min}=f(1)=2$，$y_{\max}=f(3)=4$，

$\therefore B=\{y|2\leqslant y\leqslant4\}$.

若 $A\cap B=\varnothing$，则 $\begin{cases}a\leqslant2\\a^2+1\geqslant4\end{cases}$　即 $\begin{cases}a\leqslant2\\a\geqslant\sqrt{3}\text{或 }a\leqslant-\sqrt{3}\end{cases}$

$\therefore a\leqslant-\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}\leqslant a\leqslant2$.

评注：含字母的二次不等式先观察能否用十字相乘法分解因式；二次函数求值域注意 x 的取值区间.

知识归纳与拓展

1. 集合.
2. 集合中元素的特性：(1)确定性；(2)互异性；(3)无序性.
3. 集合的表示方法：(1)列举法；(2)描述法；(3)图示法；(4)区间法.
4. 空集是不含任何元素的集合；空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集.
5. 元素与集合间是“从属”关系，用“$\in$”或“$\notin$”表示；集合与集合间是“包含”关系，用“$\subseteq$”或“$\not\subseteq$”表示；真子集关系用“$\subset$”表示；相等关系用“$=$”表示.
6. 集合运算的意义

 (1) $A\cap B=\{x|x\in A$，且 $x\in B\}$；

 (2) $A\cup B=\{x|x\in A$，或 $x\in B\}$；

 (3) 全集为 I，$\overline{A}=\{x|x\in I$，且 $x\notin A\}$.
7. 集合运算的性质

 $A\cap A=A$；$A\cap\varnothing=\varnothing$；$A\cap I=A$.

 $A\cup A=A$；$A\cup\varnothing=A$；$A\cup I=I$.

 $(A\cap B)\subseteq A$；$(A\cap B)\subseteq B$；$A\subseteq(A\cup B)$；$A\subseteq(A\cup B)$.

 $\overline{A}\subseteq I$；$A\cap\overline{A}=\varnothing$；$A\cup\overline{A}=I$.

 $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.
8. 正确理解集合语言是解答集合问题的基础. 例如 $\{y|y=x+1,x\in\mathbf{R}\}$ 与 $\{(x,y)|y=x+1,x\in\mathbf{R}\}$ 分别是数集与点集，又如 $A\cup B=B$，$A\cap B=A$ 均等价于 $A\subseteq B$.
9. 要注意空集的特性. 在解题过程中，若未指明某一集合为非空集合时，要考虑可能为空集的情形.
10. 重视图形(数轴、坐标系、韦恩图)在解决集合问题中的辅助作用.
11. 含参数的集合问题，多根据集合的互异性来处理，有时须进行讨论，这种讨论必须既不重复又不遗漏.

备考创新训练

▶1. 集合 $M=\{x|x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x|x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in$

$\mathbf{Z}\}$，则集合 M 与 N 的关系为 …………………………（　　）

A. $M=N$　　B. $M\supset N$

C. $M\subset N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

▶2. 若集合 $A=\{1,4,x\}$，$B=\{1,x^2\}$，且 $A\cup B=\{1,4,x\}$，则满足上述条件的实数 x 的个数是 ……………………（　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

▶3. 若 I，$\varnothing$ 表示全集和空集，$(\overline{A}\cup B)\subset A$，则 …………（　　）

A. $\varnothing\subset A\subset B$　　B. $B\subset A\subset I$

C. $B=\varnothing$　　D. $A=I$ 且 $B\neq A$

▶4. 设全集 $I=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}$，集合 $M=\{(x,y)|\frac{y-3}{x-2}=1\}$，$N=\{(x,y)|y\neq x+1\}$，那么 $\overline{M\cup N}$ 等于 …………（　　）

A. $\varnothing$　　B. $\{(2,3)\}$

C. $(2,3)$　　D. $\{(x,y)|y\neq x+1\}$

▶5. 如果 $\{x|ax+1=0\}\subseteq\{x|x^2+x-2=0\}$，则 $a=$ __________.

▶6. 集合 $A=\{x|(x-1)^2-3|x-1|+2=0,x\in\mathbf{R}\}$，共有__________个真子集.

▶7. 已知集合 $M=\{(x,y)|y=\sqrt{9-x^2}\}$，$N=\{(x,y)|y=x+b\}$，且 $M\cap N\neq\varnothing$，则 b 的取值范围是__________.

▶8. 有学生 100 人，其中音乐爱好者 53 人，体育爱好者 72 人，设两项都爱好的人数为 N，则 N 的最大、最小值分别是__________.

▶9. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x-10\leqslant 0\}$，$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，若 $A\cup B=A$，求实数 m 的取值范围.

▶10. 已知 $A=\{x,xy,\ln(xy)\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，且 $A=B$，求 x，y 的值.

▶11. 已知 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\}$，$C=\{x|2^{x^2-2x-8}=1\}$，且 $A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$ 同时成立，求实数 a 和集合 A.

▶12. 设集合 $A=\{(x,y)|y=x^2+2\}$，集合 $B=\{(x,y)|y=\frac{1}{4}x+m\}$ 且 $A\cap B=\varnothing$. 求实数 m 的取值范围.

2. 函数的概念

问　题　磁　场

▶1. 集合 A 到集合 B 的映射中，下述命题中：

①B 中的任一元素在 A 中必有原象；

②A 中不同元素在 B 中的象必不相同；

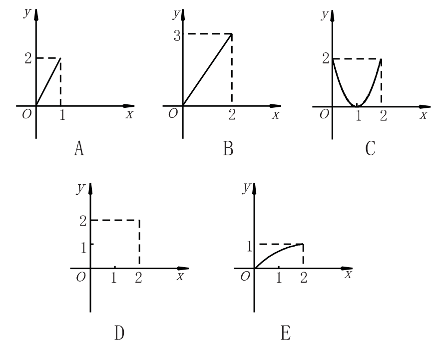
③A 中任一元素在 B 中必有惟一的象；

④A 中任一元素在 B 中可以有不同的象.

其中正确的有 ……………………………………………（　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

▶2. 设集合 $M=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，$N=\{y|0\leqslant y\leqslant 2\}$，下列 5 个图形中能表示集合 M 到 N 的函数关系的个数有 …（　　）



A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

▶3. 下列各组函数中，表示同一个函数的是 ……………（　　）

A. $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$

B. $y=\lg x$ 与 $y=\frac{1}{2}\lg x^2$

C. $y=\sqrt{x^2}-1$ 与 $y=x-1$

D. $y=x$ 与 $y=\log_a a^x\ (a>0$ 且 $a\neq 1)$

▶4. 函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-1,1)$，则函数 $F(x)=f(1-x)+f(1-x^2)$ 的定义域是______.

▶5. 若 $f\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$，则 $f(x)=$_____.

▶6. 已知 $f(x)=1+\lg(x+2)$，则 $f^{-1}(2)=$______.

▶7. 求函数 $y=\frac{(\sqrt{x^2}-1)^0}{\log_{(2x+1)}(32-4^x)}$ 的定义域.

▶8. 求下列函数的值域.

(1) $y=\frac{2x+1}{x+1}$；

(2) $y=x+\frac{1}{x}$；

(3) $y=\frac{5}{2x^2-4x+3}$；

(4) $y=5-2x+\sqrt{15-4x}$.

▶9. 已知 $f(x)=3x-1$，$f[h(x)]=g(x)=2x+3$，$h(x)$ 为 x 的一次函数，求 $h(x)$.

▶10. **求下列函数的反函数.**

(1) $y=\dfrac{2x+3}{x-1}(x<1)$

(2) $y=\sqrt{x^2+x}(x\leqslant -1)$

▶11. **某工厂计划建造一座底面为矩形 $ABCD$ 且面积为 200 平方米的三级污水处理池(如图 1—1).由于受地形限制,矩形的长与宽都不能超过 16 米.已知池的外墙建造单价为每米 400 元,中间两隔墙建造单价为每米 248 元,池底建造单价为每平方米 80 元.**

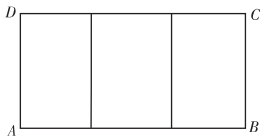


图 1—1

(1)**试求总造价** y(**元**)**与矩形长** x(**米**)**之间的函数关系式** $y=f(x)$;

(2)**求** $y=f(x)$ **的最小值及其相应的** x **值.**

案 例 探 究

▶1. **求函数** $y=x^2+4x+3,x\in(-\infty,-2]$ **的反函数,并求反函数的定义域和值域.**

本题考查函数和反函数的概念以及求反函数的基本方法.

错解:由已知得:$x^2+4x+(3-y)=0$

$x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-4(3-y)}}{2}=-2\pm\sqrt{1+y}$

∴**反函数为** $y=-2+\sqrt{1+x}[-1,+\infty)$ **和** $y=-2-\sqrt{1+x}[-1,+\infty)$

辨析:上述解法忽视了原函数的定义域$(-\infty,-2]$**,即原函数在定义域内是单调减函数,存在反函数,反函数亦为单调减函数,应舍去在**$[-1,+\infty)$**时** $y=-2+\sqrt{1+x}$**,不然连函数都不是了(一个** x **对应两个** y **值).**

▶2. **求** $y=x+\sqrt{x-1}$**的最小值**

本题考查求函数值域(或最值)的方法是否灵活严谨,这是高考考查的重要内容.

错解:移项平方整理得:$x^2-(2y+1)x+1+y^2=0$

∵$x\in\mathbf{R}$

∴$\Delta=(2y+1)^2-4(1+y^2)\geqslant 0$

$y\geqslant\dfrac{3}{4}$,**即** y **的最小值为**$\dfrac{3}{4}$

辨析:由 $y-x=\sqrt{x-1}$**平方得** $x^2-(2y+1)x+1+y^2=0$ **这种变换不是等价变形,实际上扩大了** x **的取值范围,如果从原函数的定义域** $x\geqslant 1$ **来考虑,那么** $\sqrt{x-1}\geqslant 0,y=x+\sqrt{x-1}\geqslant x\geqslant 1$**,所以,**$y_{\min}=\dfrac{3}{4}$**,显然错误.**

正解:(换元法)

令 $t=\sqrt{x-1}\geqslant 0$**,则** $x=t^2+1$

∴$y=t^2+t+1=(t+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}$

∴**当** $t=0$ **时,**$y_{\min}=1$

(配方法)

∵$y=x+\sqrt{x-1}=(x-1)+\sqrt{x-1}+1$

$=(\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}$

当 $\sqrt{x-1}=0$ **时,**$y_{\min}=1$

(单调性法)

∵$x\geqslant 1,y=x+\sqrt{x-1}$**是** x **的单调增函数(证略)**

∴$y_{\min}=1$

▶3. **设二次函数** $f(x)$**满足** $f(x+2)=f(2-x)$**且** $f(x)=0$ **的两实根平方和为 10,图象过点(0,3),求**$f(x)$**的解析式.**

本题考查待定系数法的应用及函数对称性的表现形式 $f(a+x)=f(a-x)$**(说明函数关于** $x=a$ **对称)的理解.**

分析:用待定系数法设出二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$**,然后分别求出系数** a、b、c.

解:设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$

由 $f(x+2)=f(2-x)$**知,该函数的图象关于直线** $x=2$ **对称**

∴$-\dfrac{b}{2a}=2$**,即** $b=-4a$ ①

又图象过点(0,3),∴$c=3$ ②

由二实根平方和为 10

$x_1{}^2+x_2{}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2-\dfrac{2c}{a}=10$

∴$b^2-2ac=10a^2$ ③

由①②③得 $a=1,b=-4,c=3$

∴$f(x)=x^2-4x+3$

评注:解题的过程就是运用已知条件的过程,已知条件用得越彻底越能揭露题目的本质,如本题的条件,$f(x+2)=f(2-x)$**采用代入法也能求得** $b=-4a$**,但不如采用对称性对问题揭露的彻底,另外,如把条件改为** $f(x+2)=f(2-2x)$**,也能用代入法去作,但用对称性就不行了.**

▶4. **已知函数** $f(x)=\log_3\dfrac{mx+8x+n}{x^2+1}$ **的定义域为**$(-\infty,+\infty)$**,值域为**$[0,2]$**,求** m、n **的值.**

本题考查函数的定义域和值域的互逆关系及判别式法在求型如$\dfrac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}(a\neq 0,d\neq 0)$**的值域问题的应用.**

分析:把对数函数问题转化为分式函数问题来解决,然后再用常用的判别式法解.

解:函数 $u=\dfrac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$**的定义域为**$(-\infty,+\infty)$**,值域由题设知应为**$[1,9]$.

由 $u=\dfrac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$**得**$(u-m)x^2-8x+(u-n)=0$

∵$x\in\mathbf{R}$**,且设** $u-m\neq 0$

∴$\Delta=(-8)^2-4(u-m)(u-n)\geqslant 0$

即 $u^2-(m+n)u+(mn-16)\leqslant 0$

由 $1\leqslant u\leqslant 9$ **知,关于** u **的一元二次方程** $u^2-(m+n)u+(mn-16)=0$ **的两根为 1 和 9,由韦达定理,得**$\begin{cases}m+n=1+9=10\\mn-16=1\times 9=9\end{cases}$

$\therefore m=n=5$

若 $u-m=0$，即 $u=m=5$ 时，对于 $x=0$，符合条件，

$\therefore m=n=5$ 为所求.

评注：本题的解法体现了等价转化的数学思想，它是解决数学综合题的桥梁.

▶5. 已知函数 $y=\sqrt{mx^2-6mx+m+8}$ 的定义域是 R.

(1)求实数 m 的取值范围.

(2)当 m 变化时，若 y 的最小值为 $f(m)$，求 $f(m)$ 的值域.

此题考查求无理函数定义域的方法，以及配方法、单调性法求函数的最值.

分析：(2)在(1)的条件下，用配方法把根号下二次式配方后分析解决.

解：(1)依题意 $mx^2-6mx+m+8>0$，$m\neq0$ 时 $\begin{cases}m>0\\ \Delta\leqslant0\end{cases}$ 解得：$0<m\leqslant1$

又 $m=0$，满足条件.

$\therefore m\in[0,1]$

(2)当 $m=0$ 时，$y=2\sqrt{2}$

当 $0<m\leqslant1$ 时.

$y=\sqrt{m(x-3)^2+8-8m}$

$\therefore y_{\min}=\sqrt{8-8m}$ $\quad\therefore f(m)=\sqrt{8-8m}(0\leqslant m\leqslant1)$

$\therefore f(m)$ 的值域是 $[0,2\sqrt{2}]$

评注：此时 $m=0$ 极易遗漏.

▶6. 某工厂生产某种产品 x(百台)，总成本为 $G(x)$(万元)，其中固定成本为 2 万元，每生产 100 台增加成本 1 万元，销售收入

$$R(x)=\begin{cases}4x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2} & (0\leqslant x\leqslant4)\\ 7.5 & (x>4)\end{cases}$$

假设该产品产销平衡.

(1)要不产生亏损，产量数 x 应控制在什么范围；

(2)生产多少台时可使利润最大；

(3)求使利润最大时产品的售价.

本题以产品的销售收入、成本、利润为背景，考查对实际问题的解决能力.

分析：利润＝销售收入－生产成本：不亏损，即利润 $\geqslant0$，转化为在不同条件下解不等式.

解：(1)生产 x 百台的成本为 $2+x$ 万元

当 $0\leqslant x\leqslant4$ 时，利润为

$$4x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}-(2+x)=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{2}>0$$

当 $x>4$ 时，利润为 $7.5-(2+x)=5.5-x$ 要不亏损，即要使 $-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{2}\geqslant0$ 和 $5.5-x\geqslant0$，即 $1\leqslant x\leqslant5$ 和 $4<x\leqslant5.5$

综上所述，要使不亏损，产量 x(百台)，应控制在：$1\leqslant x\leqslant5.5$

(2)当 $0\leqslant x\leqslant4$ 时，利润

$$-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}(x-3)^2+2$$

当 $x=3$ 时，利润有最大值 2(万元)

当 $x>4$ 时，利润 $5.5-x<1.5$

综上所述，产量为 3 百台时可使利润最大.

(3)售价为 $\frac{R(x)}{x}$，当 $x=3$ 时，产品售价为

$$\frac{4\cdot3-\frac{1}{2}\cdot3^2-\frac{1}{2}}{3}=\frac{7}{3}\approx2.33$$

$\therefore$ 产品利润最大时，每百台的售价约为 2.33 万元.

评注：求利润是应用问题的重点内容，不论是分段函数还是其他函数都应熟练掌握.

知识归纳与拓展

1. 函数是一种特殊的映射 $f:A\to B$，必须满足

(1)A、B 都是非空数集，

(2)集合 B 中的每一个元素都由原象(其象的集合是 B 的子集).

2. 构成函数的三要素——定义域、值域、对应法则(解析式)中，最重要的是两大独立要素定义域和对应法则(核心是对应法则)，值域是由定义域和对应法则确定的，两个函数当且仅当定义域和对应法则都相同时，才是相同的函数，因此，判断两个函数是否为同一个函数，不仅要看函数的表达式化简后是否相同，还要注意定义域、值域是否相同；也可用图象来判断.

3. 掌握函数的三种表示法——列表法、解析法和图象法，若函数在其定义域的不同子集上，因对应法则分别不同或用几个不同式子来表示，这种表示的形式叫做分段函数.

4. 反函数的概念

$y=f(x)$ 的定义域为 A，它有反函数必须满足：A 中的每一个 x 与其函数值的对应是“一一对应”的不允两个(或多个)x 有同一个函数值. 如函数 $y=x^2$ 没有反函数.

4. 反函数的定义域是原函数的值域，可以通过求原函数的值域得到.

5. $f^{-1}(a)=b\Leftrightarrow f(b)=a$ 要善利用之.

6. 反函数有以下性质

(1)奇偶性：定义域为非单元素集的偶函数不存在反函数，是奇函数且在其定义域上单调的函数，必有反函数，且反函数也是奇函数.

(2)单调性：若函数 $y=f(x)$ 是增(减)函数，则其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 也是增(减)函数.

(3)对称性：函数 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图象，在同一坐标系中关于 $y=x$ 对称.

(4)还原性：$f^{-1}[f(x)]=x(x\in A)$，$f[f^{-1}(y)]=y(y\in B)$

(5)周期性：周期函数不存在反函数

7. 定义域是函数的灵魂，确定函数定义域的原则是

(1)当函数 $y=f(x)$ 用表格给出时，函数的定义域是指表格中实数 x 的集合

(2)当函数 $y=f(x)$ 用图象给出时，函数的定义域是指图象在 x 轴上投影所覆盖的实数的集合

(3)当函数 $y=f(x)$ 用解析式给出时，函数的定义域是指使解析式有意义的实数的集合

(4)当函数 $y=f(x)$ 由实际问题给出时，函数的定义域由实际问题的意义确定

基本上可分为自然定义域与限定定义域两类：

(1)如果只给函数的解析式(不注明定义域)其定义域应为使解析式有意义的自变量的取值范围，称为自然定义域.

(2)如果函数受应用条件或有附加条件所制约，其定义域称为

限定定义域.

定义域经常作为基本条件(或工具)出现在高考试题中,通过函数性质或函数应用来考查,具有隐蔽性,不为人们所注意,即要求限定定义域,所以在解决函数问题时,必须树立起"定义域优先"的观点,以先分析定义域来帮助问题解决.

8. 确定函数的定义域的依据是:

(1)若 $f(x)$是整式,则定义域为全体实数

(2)若 $f(x)$是分式,则定义域为使分式的分母不得为零的全体实数;

(3)若 $f(x)$是偶次方根,则定义域为使被开方式为非负的全体实数;

(4)函数 $f(x)=x^0$ 的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;

(5)模型函数的定义域是与之对应的函数的定义域模型,如

$y=\log_a{}^x(a>0,a\neq1)$的定义域为$(0,+\infty)$

$y=\mathrm{tg}x$ 的定义域为$\{x|x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{N}\}$

$y=\mathrm{ctg}x$ 的定义域为$\{x|x\neq k\pi,k\in\mathbf{N}\}$

$y=\arcsin x,y=\arccos x$,的定义域为$\{x||x|<1\}$

(6)对于复合函数求定义域问题,其一般步骤是:若已知 $f(x)$的定义域为$[a,b]$,其复合函数$f[g(x)]$的定义域应由不等式$a\leqslant g(x)\leqslant b$ 解出即得.

9. 求函数的值域是一个较复杂的问题,也是很重要的问题(因为它和求函数的最值紧密相连)在历届高考试题中经常出现,应引起重视,确定函数值域的原则:

(1)当函数 $y=f(x)$用表格给出时,函数的值域是指表格中实数 y 的集合

(2)当函数 $y=f(x)$用图象给出时,函数的值域是指图象在 y 轴上的投影所覆盖的实数 y 的集合;

(3)当函数 $y=f(x)$用解析式给出时,函数的值域是由函数的定义域及其对应法则惟一确定

(4)当函数由实际问题给出时,函数的值域由问题的实际意义确定常用的求法有

①配方法:是求二次函数类值域最基本的方法,像 $F(x)=af^2(x)+bf(x)+c$ 的函数的值域问题,均可用配方法;

②反函数法:利用函数和它反函数的定义域和值域的关系,通过求反函数的定义域而得到原函数的值域.形如求函数 $y=\frac{cx+d}{ax+b}(a\neq0)$的值域;

③判别式法:把函数转化成关于 x 的二次方程$F(x,y)=0$,通过方程有实根,判别式 $\Delta\geqslant0$,从而求得原函数的值域,形如求函数 $y=\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$($a,d$ 不同时为零)的值域;

④换元法:运用代数或三角代换,将所给函数转化成值域容易确定的另一函数,从而求得原函数的值域,形如:求函数 $y=ax+b+\sqrt{cx+d}$(a、b、c、d 均为常数)的值域;

⑤不等式法:利用基本不等式:$a+b\geqslant2ab$、$a+b+c\geqslant3abc$ 求函数值域时,要注意条件"一正二定三相等";

⑥函数的单调性:确定函数在定义域(或某个定义域的子集上)的单调性质求出函数的值域,形如:求函数 $y=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$的值域;

⑦数形结合法:利用函数所表示的几何意义,借助于几何方法来求函数的值域.

10. 确定函数解析式的原则

(1)求出函数的对应法则;

(2)在对应法则的后面标注函数的定义域.

求函数的解析式,有三种情况

(1)已知函数类型(如一次函数、二次函数等)一般用待定系数法,设出函数的解析式,然后根据条件求解.

(2)已知函数满足某种关系(对定义域内的自变量总成立),用代换法求解函数的解析式.

(3)根据实际意义(如面积、距离等)总结函数的解析式,注意定义域的特殊值.

另外,在求函数的解析式时要注意:

(1)对于分段函数应分别求出各区间内的函数关系,再组合在一起,注意各区间的点既不重复,也不遗漏.

(2)关于复合函数的表达式问题,要特别注意内层函数的值域落在外层函数定义域哪一段内,进而选择相应的表达式计算.

11. 求一个函数 $y=f(x)(x\in A)$反函数的一般步骤:

(1)求函数 $y=f(x)$的值域

(2)由 $y=f(x)$求出 $x=f^{-1}(y)$

(3)x、y 位置互换得到 $y=f^{-1}(x)$

(4)确定反函数的定义域(即原函数的值域),并注明.

12. 分段函数的反函数求法是先分段求解,再合并.

备考创新训练

▶1. 函数 $y=(x-4)^{\frac{1}{3}}(ax^2+4ax+3)^{-1}$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,则实数 a 的取值范围是 …………………… (　　)

A. $(-\infty,+\infty)$　　B. $\left(0,\frac{3}{4}\right)$

C. $\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$　　D. $\left[0,\frac{3}{4}\right)$

▶2. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2 & (x>0)\\ e & (x=0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$ 则 $f\{f[f(-2)]\}$的值是 ……………………………………………………………… (　　)

A. 0　　B. e　　C. e^2　　D. 4

▶3. 若 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$,$g(x)=\frac{e^x+e^x}{2}$,则 $f(2x)$等于 ……………………………………………………………… (　　)

A. $2f(x)$　　B. $2g(x)$

C. $2[f(x)+g(x)]$　　D. $2f(x)\cdot g(x)$

▶4. 设函数 $y=f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称,若 $x\leqslant1$ 时,$y=x^2+1$,则当 $x>1$ 时,$y=$______

▶5. 函数 $f(x)=(e^x-a)^2+(e^{-x}-a)^2(0<a<2)$的最小值为______.

▶6. 设函数 $f(x)=x^2+x+\frac{1}{2}$ 的定义域是$[n,n+1]$(n 是自然数),那么 $f(x)$的值域中共有________个整数.

▶7. 求函数 $y=\frac{2x}{2^x+1}$的值域.

▶8. 求函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+4}$ 的值域.

▶9. 已知 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & (|x|\leqslant 1)\\ |x| & (x<-1)\\ 1 & (x>1)\end{cases}$，求 $f[f(x)]$.

▶10. 已知 Q 为 x 轴的正半轴上的一点，P 是 Q 关于直线 $y=kx$ 的对称点，O 为坐标原点，直线 OP 的斜率记为 $f(k)$.
(1)求 $f(k)$，并求出 $f(k)$ 的定义域
(2)求 $y=\log_a f(k)(a>0,a\neq 1)$ 的定义域.

▶11. 已知函数 $f(x)$ 的反函数是 $y=\dfrac{2}{10^x+1}-1$，函数 $g(x)$ 的图象与 $y=\dfrac{4-3x}{x-1}$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，记 $F(x)=f(x)+g(x)$，求 $F(x)$ 的解析式及定义域.

▶12. 如图 1—2，在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 的边上有动点 P，从 P 点开始，沿折线 $BCDA$ 向 A 点运动，设动点 P 运动的距离为 x，$\triangle ABP$ 的面积为 S.
(1)求函数 $S=f(x)$ 的解析式、定义域和值域.
(2)求 $f[f(3)]$ 的值.

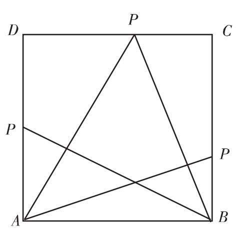


图 1—2

▶13. 渔场中鱼群的最大养殖量为 m t，为了保证鱼群的生长空间，实际养殖量不能达到最大养殖量，必须留有适当的空闲量，已知鱼群的年增长量 y t 和实际养殖量 x t 与空闲率的乘积成正比，比例系数为 $k(k>0)$，(空闲率为空间量与最大养殖量的比值)
(1)写出 y 关于 x 的函数关系式，并指出这个函数的定义域.
(2)求鱼群年增长量的最大值.
(3)当鱼群的年增长量达到最大值时，求 k 的取值范围.

▶14. 设 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的增函数，$f(2)=1$，且 $f(xy)=f(x)+f(y)$，求满足不等式：$f(x)+f(x-3)\leqslant 2$ 的 x 的取值范围.

3. 函数的性质

问 题 磁 场

▶1. 对于定义域是 **R** 的任何奇函数 f(x)都有 …………（　　）
A. $f(x)-f(-x)>0$　　B. $f(x)-f(-x)\leqslant 0$
C. $f(x)\cdot f(-x)\leqslant 0$　　D. $f(x)\cdot f(-x)>0$

▶2. $F(x)=(1+\dfrac{2}{2^x-1})f(x)(x\neq 0)$ 是偶函数，且 $f(x)$ 不恒等于零，则 $f(x)$ ……………………………………（　　）
A. 是偶函数
B. 是奇函数
C. 可能是奇函数也可能是偶函数
D. 不是奇函数也不是偶函数

▶3. 设 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的一个增函数，$F(x)=f(x)-f(-x)$，那么 $F^{-1}(x)$ 必为 …………………………（　　）
A. 增函数且是奇函数　　B. 增函数且是偶函数
C. 减函数且是奇函数　　D. 减函数且是偶函数

▶4. 已知函数 $y=f(x)$ 为偶函数，它的最小正周期是 3，且 $f(-1)=7$，则 $f(7)=$________.

▶5. 设 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，且 $x>0$ 时，$f(x)=x^2+1$，则当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=$______.

▶6. 已知 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数，且它在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，那么使 $f(-2)\leqslant f(a)$ 的实数 a 的取值范围是____________.

▶7. 判断下列函数的奇偶性
(1) $f(x)=\log_2(1+4^x)-x$；
(2) $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+3 & (x<0)\\ 0 & (x=0)\\ -x^2+2x-3 & (x>0)\end{cases}$

▶8. 已知函数 $f(x)=2^x-2^{-x}\cdot \lg a$ 为奇函数，求实数 a 的值.

▶9. (1)已知函数 $f(x)$ 的周期为 4，且等式 $f(2+x)=f(2-x)$ 对一切 $x\in$ **R** 均成立，求证 $f(x)$ 是偶函数.
(2)设 $f(x)$ 是 **R** 上的奇函数，且 $f(x+2)=f(-x)(x\in$ **R**$)$，证明 $f(x)$ 为周期函数.

▶10. 已知 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 在区间 $(-\infty,4]$ 上是减函数,求实数 a 的取值范围.

▶11. 已知二次函数 $f(x)=x^2+bx+c$,对任意 $x\in\mathbf{R}$,均有 $f(1+x)=f(1-x)$,试比较 $f(\frac{11}{4})$ 与 $f(-a^2+a-1)$ 的大小. $(a\in\mathbf{R})$

▶12. 已知 $y=f(x)$ 是奇函数,它在 $(0,+\infty)$ 上是增函数. 且 $f(x)<0$,问 $F(x)=\frac{1}{f(x)}$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函数还是减函数?证明你的结论.

案 例 探 究

▶1. 判断下列函数的奇偶性

(1) $f(x)=(4x-1)^0$

(2) $f(x)=\sqrt{3-x^2}+\sqrt{x^2-3}$

(3) $f(x)=\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}$

(4) $f(x)=|x+1|-|x-1|$.

(5) $f(x)=\begin{cases}-x^2+1 & x\in(0,+\infty)\\ x^2-1 & x\in(-\infty,0)\end{cases}$

本题考查对函数奇偶性定义的理解.

分析:首先分析定义域是否对称?再用定义或定义的变形式来判断.

解:(1)∵ $f(x)$ 的定义域 $x\neq\frac{1}{4}$,它不关于原点对称,

∴ $f(x)$ 是非奇非偶函数.

(2)欲使函数有意义,须满足 $\begin{cases}3-x^2\geqslant 0\\ x^2-3\geqslant 0\end{cases}$

得 $x=\pm\sqrt{3}$

∴定义域关于原点对称,又 $f(\sqrt{3})=f(-\sqrt{3})=0$,$f(x)=0$.

∴ $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数.

(3)∵ $f(x)=\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}=\frac{2^x+1}{2(2^x-1)}$,定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,

∴对定义域内任意 x,$-x$ 也在定义域内,

且 $f(-x)=\frac{2^{-x}+1}{2(2^{-x}-1)}=\frac{1+2^x}{2(1-2^x)}=-f(x)$.

∴函数 $f(x)=\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}$ 是奇函数.

(4)∵函数的定义域为 $\mathbf{R}$,

∴对任意 x,有 $f(-x)=|-x+1|-|-x-1|=|x-1|-|x+1|=-f(x)$

∴ $f(x)=|x+1|-|x-1|$ 是奇函数.

(5)解法一:任取 $x>0$,则 $-x<0$,

∴ $f(-x)=(-x)^2-1=x^2-1=-(-x^2+1)=-f(x)$

又任取 $x<0$,则 $-x>0$,

∴ $f(-x)=-(-x)^2+1=-x^2+1=-(x^2-1)=-f(x)$

∴对 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,都有 $f(-x)=-f(x)$ 成立,

∴函数 $f(x)$ 为奇函数.

解法二:将 $f(x)$ 变形为 $f(x)=|x|(-x+\frac{1}{x})(x\neq 0)$

则 $f(-x)=|-x|(x-\frac{1}{x})=-|x|(-x+\frac{1}{x})=-f(x)$

∴ $f(x)$ 是奇函数.

评注:函数的奇偶性反映了函数图象的对称性,即偶函数的图象关于 y 轴对称,奇函数的图象关于原点成中心对称图形,因而在判断函数的奇偶性时,应首先判断其定义域是否关于原点对称,否则,便是非奇非偶函数. 有时 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系不好判断时,可转化为其等价形式,$f(-x)\pm f(x)$ 与 0 的关系,或 $\frac{f(-x)}{f(x)}$ 与 ±1 的关系 $(f(x)\neq 0)$.

评注:(1)判断分段函数的奇偶性,必须考查每一"段"上 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系;(2)如果分段函数是奇函数或偶函数,则运用绝对值符号来简化函数的表达式常可达到简化运算的目的.

▶2. 已知函数 $f(x)$ 满足:$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$ 对任意的实数 x、y 总成立,且 $f(1)\neq f(2)$,

求证:$f(x)$ 是偶函数.

本题考查赋值法在证函数奇偶性中的应用. 这是近年高考试题的一个新动向.

分析:给 x、y 赋一些特殊,使其出现偶函数的形式.

证明:令 $x=y=0$,

得 $f(0)+f(0)=2f(0)\cdot f(0)$,

∴ $f(0)=0$ 或 $f(0)=1$.

如果 $f(0)=0$,

则 $f(x+0)+f(x-0)=2f(x)\cdot f(0)$,

得 $f(x)=0$,与 $f(1)\neq f(2)$ 矛盾,

∴ $f(0)=1$,

∴ $f(0+x)+f(0-x)=2f(0)\cdot f(x)$,

即 $f(-x)=f(x)$

∴ $f(x)$ 是偶函数.

评注:联想公式 $\cos(x+y)\cos(x-y)=2\cos x\cos y$ 和特殊函数 $y=\cos x$ 可以获得思路,但用特值法解决较好.

▶3. 已知函数 $f(x^2-3)=\log_a\frac{x^2}{6-x^2}(a>0,a\neq1)$.

(1)试判断 $f(x)$ 的奇偶性;

(2)解不等式 $f(x)\geqslant\log_a 2x$.

本题综合考查函数解析式的求法,奇偶性的判断方法及分类讨论在解不等式中的应用.

分析:(1)用换元法求出 $f(x)$ 的解析式,然后用定义判断.

(2)分类讨论解决.

解:(1)令 $x^2-3=t$,则 $f(t)=\log_a\frac{3+t}{3-t}$,其定义域为 $(-3,3)$,且 $f(-t)=\log_a\frac{3-t}{3+t}=-\log_a\frac{3+t}{3-t}=-f(t)$,

∴ $f(t)$ 是奇函数,即 $f(x)$ 是奇函数.

(2)由题意,$\log_a\frac{3+x}{3-x}\geqslant\log_a 2x$.

若 $a>1$,则$\frac{3+x}{3-x}\geqslant 2x$ 且$\frac{3+x}{3-x}>0,2x>0$,

解得 $0<x\leqslant 1$ 或 $\frac{3}{2}\leqslant x<3$.

若 $0<a<1$,则$\frac{3+x}{3-x}\leqslant 2x$ 且$\frac{3+x}{3-x}>0,2x>0$,

解得 $1\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$.

所以,当 $a>1$ 时,不等式的解集是$\{x|0<x\leqslant 1$ 或 $\frac{3}{2}\leqslant x<3\}$;

当 $0<a<1$ 时,不等式的解集是$\{x|1\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\}$.

评注:(1)换元法是求函数解析式的主要方法,应用时注意函数定义域发生的变化.

(2)分类讨论思想在解决对数不等式问题时,最易出错,应熟练掌握.

▶4. 求函数 $y=\log_{0.7}(x^2-3x+2)$的单调区间及其增减性.

错解:令 $u=x^2-3x+2$,由二次函数的单调性知.

当 $x\in(-\infty,\frac{3}{2}]$时,$u(x)$为减函数.

当 $x\in(\frac{3}{2},+\infty)$时,$u(x)$为增函数.

又 $y=\log_{0.7}u$ 为减函数,依复合函数的单调性知在$(-\infty,\frac{3}{2}]$上原函数为增函数,在$(\frac{3}{2},+\infty)$上为减函数.

辨析:对数要有意义,必须使真数 $x^2-3x+2>0$,即 $x>2$ 或 $x<1$,所以,上述解法所对应的单调区间是错误的.

正解:由 $u=x^2-3x+2>0$ 得知 $x<1$ 或 $x>2$,结合二次函数的图象及单调性易知:

当 $x\in(-\infty,1)$时,u 为减函数.

当 $x\in(2,+\infty)$时,u 为增函数.

又 $y=\log_{0.7}u$ 在定义域内为减函数,因此由复合函数的单调性可知:

$x\in(-\infty,1)$时,y 为增函数,$x\in(2,+\infty)$时,y 为减函数.

评注:函数的定义域是讨论函数性质的前提,任何问题的解决必须在定义域内进行.

▶5. 设 a 为正数,$f(x)=x+\frac{a}{x}$

(1)讨论函数 $y=f(x)$的单调性

(2)求 $y=f(x)$在区间$[1,3]$上的最小值.

本题考查函数单调性的判断方法及函数单调性在求函数最值的应用.

分析:用定义法来解决单调性问题,此题应在讨论 a 的前提下,结合定义来解决.

解:(1)显然 $f(x)$为奇函数,先考虑 $x>0$ 时的情况.

设 $0<x_1<x_2$,则 $f(x_1)-f(x_2)=(x_1+\frac{a}{x_1})-(x_2+\frac{a}{x_2})=(x_1-x_2)(1-\frac{a}{x_1x_2})$

从这里看出应将$(0,+\infty)$分成两个区间$(0,\sqrt{a}]$和$[\sqrt{a},+\infty)$分别讨论.

当 $0<x_1<x_2\leqslant\sqrt{a}$时,$0<x_1x_2<a,\frac{a}{x_1x_2}>1$,

$1-\frac{a}{x_1x_2}<0$,则 $f(x_1)-f(x_2)>0$

故 $f(x)$在$(0,\sqrt{a}]$上是减函数.

当$\sqrt{a}\leqslant x_1<x_2$ 时,$1-\frac{a}{x_1x_2}>0$,

则 $f(x_1)-f(x_2)<0$

故 $f(x)$在$[\sqrt{a},+\infty)$上是增函数,

∵ $f(x)$是奇函数.

∴ $f(x)$在$(-\infty,-\sqrt{a}]$、$[\sqrt{a},+\infty)$上是增函数;$f(x)$在$[-\sqrt{a},0)$、$(0,\sqrt{a}]$上是减函数.

(2)如果 $a\in[1,9]$此时$\sqrt{a}\in[1,3]$.

则当 $x=\sqrt{a}$时,$f(x)$取得最小值 $2\sqrt{a}$;

如果 $0<a<1$,则 $f(x)$在$[1,3]$上为增函数,

∴当 $x=1$ 时,$f(x)$取得最小值 $1+a$;

如果 $a>9$,则 $f(x)$在$[1,3]$上为减函数.

∴当 $x=3$ 时,$f(x)$取得最小值 $3+\frac{a}{3}$.

综上所述,

$$f(x)_{\min}=\begin{cases}1+a & (0<a<1\text{ 时})\\ 2a & (1\leqslant a\leqslant 3\text{ 时})\\ 3+\frac{a}{3} & (a>3\text{ 时})\end{cases}$$

评注:(1)证明函数的单调性,必须从定义入手.

(2)对本题的结论应予以重视,很多最值问题常常可以转化成 $y=x+\frac{a}{x}(a>0)$型的函数的最值问题;如果用均值不等式可得 $x+\frac{a}{x}\geqslant 2\sqrt{a}$(当且仅当 $x=\sqrt{a}$时取"="),但很多情况下 x 的取值范围是有限制的,这就有可能造成 x 不能等于$\sqrt{a}$(例如 $x\geqslant 2$,求 $y=x+\frac{1}{x}$的最小值),从而在这种限制下 $y=x+\frac{a}{x}$的最小值不是 $2\sqrt{a}$,这时要求出函数的最值.一般来说应运用 $y=x+\frac{a}{x}$的单调性.

▶6. 设函数 $f(x)$是定义在 R 上的偶函数,并在区间$(-\infty,0)$内单调递增,且 a 满足不等式$f(2a^2+a+1)<f(3a^2-2a+1)$.当 a 取何值时,函数 $y=(\frac{1}{2})^{a^2-3a+1}$是单调减函数?

本题考查函数的单调性与奇偶性的关系.

分析:判断出 $2a^2+a+1>0$、$3a^2-2a+1>0$,对本题的解决起到关键作用,否则只考虑 $2a^2+a+1>3a^2-2a+1$ 是不够的.同时 a 的取值还要使得 $y=(\frac{1}{2})^{a^2-3a+1}$是单调减函数.另外也可由$-(2a^2+a+1)<0$、$-(3a^2-2a+1)<0$.直接利用函数 $f(x)$的单调性来求解.

解法一:因 $f(x)$是偶函数,且在$(-\infty,0)$内单调递增,则对任意 $0<x_1<x_2$,有$-x_2<-x_1<0$,

∴ $f(-x_2)<f(-x_1)$即 $f(x_2)<f(x_1)$

故 $f(x)$在$(0,+\infty)$内是单调减函数.

又∵ $2a^2+a+1=2(a+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{8}>0$,

$3a^2-2a+1=3(a-\frac{1}{3})^2+\frac{2}{3}>0$.

∴由 $f(2a^2+a+1)<f(3a^2-a+1)$，
得 $2a^2+a+1>3a^2-2a+1$　∴$0<a<3$.
而函数 $y=(\frac{1}{2})^{3a^2-3a+1}$ 的单调减区间为$[\frac{3}{2},+\infty)$. 故当 $\frac{3}{2}\leqslant a<3$ 时,函数 $y=(\frac{1}{2})^{a^2-3a+1}$ 是减函数.
解法二:由 $-(2a^2+a+1)<0$，
$-(3a^2-2a+1)<0$
$f[-(2a^2+a+1)]<f[-(3a^2-2a+1)]$，$f(x)$在$(-\infty,0)$内单调递增.
得 $-(2a^2+a+1)<-(3a^2-2a+1)$
解得 $0<a<3$.
而函数 $y=(\frac{1}{2})^{a^2-3a+1}$ 的单调减区间是$[\frac{3}{2},+\infty)$，
故当 $\frac{3}{2}\leqslant a<3$ 时,函数 $y=(\frac{1}{2})^{a^2-3a+1}$ 是单调减函数.
评注:这种由函数的大小关系和函数的奇偶性逆向来求自变量的大小关系的问题,是近年来高考考查的热点内容,主要的结论有
(1)若函数为奇函数,则函数在原点两侧的单调性相同.
(2)若函数为偶函数,则函数在原点两侧的单调性相反.
这些结论在解答、证明题中必须加以证明而在选择题、填空题中可直接应用.

知识归纳与拓展

1.(1)判断函数的奇偶性,既可以用定义进行判断,也可以用图象的特性进行判断,用定义进行判断时的等价形式为:
$f(-x)=\pm f(x)\Leftrightarrow f(-x)\mp f(x)=0\Leftrightarrow\frac{f(-x)}{f(x)}=\pm1,f(x)\neq0$,
即利用定义的互逆性进行判断.
(2)利用函数图象的对称性去判断函数的奇偶性的依据是:奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图象关于 y 轴对称;反之亦真.
(3)奇函数、偶函数的定义域关于原点对称,即函数的奇偶性与区间密切相关,如 $y=x^2$ 在 **R** 上是偶函数,但在区间$[-1,2]$上却无奇偶性可言,可见函数奇偶性是函数的整体性质,一点不满足都不能判断是奇函数或偶函数,定义在数轴上所对应的区间关于原点对称,只是函数为奇函数或偶函数的必要条件而已.
(4)若函数 $f(x)$的定义域为$[-a,a](a>0)$,则"$f(x)=0$"是为奇函数的必要而不充分条件;若函数 $f(x)$ 的定义域为$[-a,0)\cup(0,a](a>0)$则"$f(x)=0$"既不是为奇函数的充分条件,也不是必要条件.
2.(1)函数单调性的定义为:
给定区间 D 上的任意 x_1、x_2,如果 $x_1<x_2$,都有 $f(x_1)<f(x_2)[f(x_1)>f(x_2)]$,则函数$f(x)$为这个区间 D 上的递增(减)函数.
这个定义有如下两种等价形式:
设 $x_1,x_2\in[a,b]$,那么:
①$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0\Leftrightarrow f(x)$在$[a,b]$上是增(减)函数
②$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0\Leftrightarrow f(x)$在$[a,b]$上是增(减)函数
①的几何意义是:增(减)函数图象上任意两点$(x_1,f(x_1))$,$(x_2,f(x_2))$连线的斜率都大于(小于)0
(2)在理解函数单调性时,应注意以下几个问题:
①单调性是函数的一个局部性质,一个函数在不同的区间上可以有不同的单调性.
②函数的单调区间是定义域的子集,定义中的 x_1、x_2 相对于单调区间具有任意性,不能用特殊值替代.
③函数的单调性使得自变量的不等关系和函数之间的不等关系可以"正逆互推".
④$f(x)$在区间 D_1、D_2 上是增函数,但 $f(x)$不一定在区间 $D_1\cup D_2$ 上是增函数;同样 $f(x)$在区间 D_1、D_2 上是减函数,但 $f(x)$不一定在区间 $D_1\cup D_2$ 上是减函数. 例如,函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在$(-\infty,0)$上是减函数,在$(0,\infty)$上也是减函数,但在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上不是减函数
(3)在研究函数的单调性时,常将函数变形化简,转化为分析一些熟知函数的单调性.
3.设 x 是非零常数,对于函数 $y=f(x)$定义域内的一切 x:如果总有 $f(x+a)=f(x)$成立,则函数$y=f(x)$是周期函数,且其一个周期 $T=a$.
4.在公共定义域上,两个奇函数(或偶函数)的和、差仍为奇函数(偶函数)两个奇函数(偶函数)的积、商为偶函数.
5.判断函数单调性的常用方法
(1)定义法;
(2)两个增(减)函数的和仍为增(减)函数;一个增(减)函数与一个减(增)函数的差是增(减)函数;
(3)奇函数在对称的两个区间上有相同的单调性;偶函数在对称的两个区间上有相反的单调性;
(4)互为反函数的两个函数有相同的单调性;
(5)如果函数在区间上是增(减)函数,那么函数在区间的任意一个子集上也是增(减)函数;
(6)如果 $y=f(u)$和 $u=g(x)$单调性相同,那么 $y=f[g(x)]$是增函数;
如果 $y=f(u)$和 $u=g(x)$单调性相反,那么 $y=f[g(x)]$是减函数;
(7)图象法.
6.证明函数的单调性时,必须用定义法.
7.掌握并熟记一次函数、二次函数、反比例函数、幂函数、指数函数、对数函数等函数的单调性,将大大缩短判断函数单调性的过程.
8.(1)如果总有 $f(x+a)=f(x-a)$成立,则函数是周期函数,且 $T=2a$ 是它的一个周期.
(2)如果总要 $f(x+a)=-f(x)$成立,则函数是周期函数,且 $T=2a$ 是它的一个周期.

备考创新训练

▶1.奇函数 $y=f(x)(x\in\mathbf{R})$的图象必过点 ……………（　）
A.$(a,f(-a))$　　B.$(-a,f(a))$
C.$(-a,-f(a))$　　D.$(a,f(\frac{1}{a}))$
▶2.若定义在实数集上的函数 $f(x)$满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,其中 $x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}$,则 $f(x)$一定是 …………（　）

A. 奇函数　　B. 偶函数

C. 不是偶函数　　D. 奇偶性不定

3. 如果奇函数 $f(x)$在区间$[3,7]$上是增函数且最小值为 5,那么 $f(x)$在区间$[-7,-3]$上是 ……………………（　　）

A. 增函数且最小值为-5　　B. 增函数且最大值为-5

C. 减函数且最小值为-5　　D. 减函数且最大值为-5

4. 已知奇函数 $f(x)$的定义域是不为零的一切实数,且 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,则 $f(-2)$, $f(1)$, $f(-1)$的大小关系是______.

5. 若 $f(x)=(a-1)x^2+ax+3$　$(x\in \mathbf{R})$是偶函数,则 $f(x)$的单调递增区间是________.

6. 已知 $f(x)$是偶函数,且其图象与 x 轴有四个交点,则方程 $f(x)=0$ 的所有实数根之和为________.

7. 函数 $f(x)$定义域为$(-1,1)$, $f(x)$为奇函数,又 $f(x)$是增函数,如果 $f(1-a)+f(1-a^2)<0$,求实数 a 的取值范围.

8. 已知奇函数 $f(x)$在区间$[-b,-a](b>a>0)$上是一个恒大于 0 的减函数,问函数$|f(x)|$在区间$[a,b]$上是增函数还是减函数?证明你的结论.

9. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数有最小正周期 2,且$x\in(0,1)$时, $f(x)=\dfrac{2^x}{4^x+1}$.

(1)求 $f(x)$在$[-1,1]$上的解析式.

(2)证明 $f(x)$在$(0,1)$上是递减函数.

(3)当 λ 为何值时,方程 $f(x)=\lambda$ 在$[-1,1]$上有实数解.

10. 判断函数 $f(x)=\dfrac{ax}{x^2-1}(a\neq 0)$在区间$(-1,1)$上的单调性.

11. 已知函数 $f(x)$是定义在$(0,+\infty)$上的增函数,试求函数 $f(-x^2+5x+6)$的单调区间.

12. 已知 $f(x)=\dfrac{ax^2+1}{bx+c}(a、b、c\in \mathbf{Z})$是奇函数,且 $f(1)=2$, $f(2)<3$.

(1)求 a、b、c 的值;

(2)判断函数 $y=f(x)$在区间$(0,1)$上的单调性,并证明你的结论.

13. $f(x)$是定义在$(0,+\infty)$上的增函数,且满足 $f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$.

(1)求 $f(1)$的值;

(2)若 $f(6)=1$,解不等式 $f(x+3)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)<2$.

4. 函数的图象

问　题　磁　场

1. 已知函数 $y=f(x)$的图象如图 1—3 所示.则下列函数所对应的图象中,不正确的是 ……………………（　　）

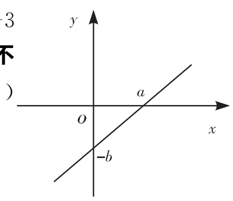


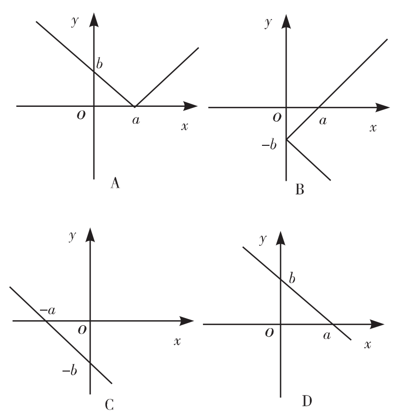
图 1—3

A. $y=|f(x)|$

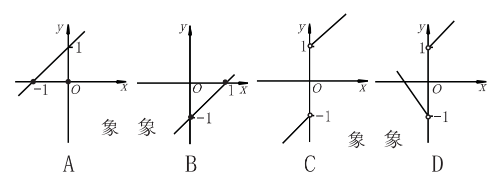
B. $y=f(|x|)$

C. $y=f(-x)$

D. $y=-f(x)$



2. 函数 $y=x+\dfrac{|x|}{x}$的图象是 ……………………………（　　）



3. 若函数 $y=f(x)(f(x)\neq 0)$的图象与函数 $y=-f(x)$的图象关于原点对称,则 $y=-f(x)$ …………………………（　　）

A. 是奇函数而不是偶函数

B. 是偶函数而不是奇函数

C. 既是奇函数也是偶函数

D. 不是奇函数也不是偶函数

4. 若函数 $f(x)=a^x+k$ 的图象经过$(1,7)$点,又其反函数 $f^{-1}(x)$的图象经过点$(4,0)$,则函数 $f(x)$的表达式为________.

5. 若 $x\in(1,+\infty)$时,函数 $y=x^n$ 的图象恒在 $y=x$ 直线的下

方,则 n 的取值范围是______

▶6. 把函数 $y=2\sin(2x-1)$ 的图象向右平移 1 个单位,得到函数 $y=f(x)$ 的图象,则 $f(x)=$________

▶7. 若函数 $y=f(x)=\frac{2ax+1}{2x-b}$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,求 a、b 应满足的条件.

▶8. 作出下列函数的图象

(1) $y=|x^2+2x|-3$　(2) $y=x+\frac{1}{x}$

▶9. 求函数 $f(x)=x^2-2ax-1$ 在闭区间 $[0,2]$ 上的最大值和最小值.

▶10. 一河流同侧有两个村庄 A、B,两村庄计划在河上共建一水电站供两村使用,已知 A、B 两村到河边的垂直距离分别为 300m 和 700m,且两村相距 500m,问,水电站建于何处,送电到两村的电线用料最省?

案 例 探 究

▶1. 证明函数 $y=\frac{x-1}{ax-1}(a\neq1)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

本题考查对函数图象本身关于直线 $y=x$ 对称的理解.

分析:利用函数解析式与它的反函数的解析式若为同一个式子,则函数图象本身关于直线 $y=x$ 对称. 也可利用函数图象上任一点关于直线 $y=x$ 的对称点也在已知函数的图象上,则函数图象关于直线 $y=x$ 对称.

证法一:$\because a\neq1$, $y=\frac{1}{a}\left(1+\frac{\frac{1-a}{a}}{x-\frac{1}{a}}\right)$, $\therefore y\neq\frac{1}{a}$.

由 $y=\frac{x-1}{ax-1}$

得 $x(ay-1)=y-1$, $x=\frac{y-1}{ay-1}$

$\therefore$ 函数 $y=\frac{x-1}{ax-1}(a\neq1)$ 的反函数是 $y=\frac{x-1}{ax-1}$.

$\therefore y=\frac{x-1}{ax-1}$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

证法二:设点 $P'(x',y')$ 是这个函数图象上任一点,则 $x'\neq\frac{1}{a}$ 且 $y'=\frac{x'-1}{ax'-1}$　①

易知点 P 关于直线 $y=x$ 的对称点 P' 的坐标为 (y',x'). 由①式得 $y'(ax'-1)=x'-1$,

即 $x'(ay'-1)=y'-1$　②

如果 $ay'-1=0$,则 $y'=\frac{1}{a}$,代入①得 $\frac{1}{a}=\frac{x'-1}{ax'-1}$.

解得 $a=1$,与已知矛盾.

于是 $ay'-1\neq0$,$\therefore$ 由②得 $x'=\frac{y'-1}{ay'-1}$.

这说明点 $P'(y',x')$ 也在已知函数的图象上.

因此,这个函数的图象关于直线 $y=x$ 成轴对称图形.

评注:要分清函数本身关于直线 $y=x$ 对称与两个函数关于直线 $y=x$ 对称的区别.

▶2. 作出函数 $y=\log_2(1-x)$ 的图象

错解:$\because y=\log_2(1-x)=\log_2[(-x)+1]$

故可看作是 $f(x)=\log_2(-x)$ 的图象向左平移一个单位而得.

又 $f(x)=\log_2(-x)$ 与 $y=\log_2 x$ 关于 y 轴对称可得原函数的图象如图 1—4.

辨析:$f(x+1)$ 的图象是由 $f(x)$ 的图象向左平移 1 个单位而得, $f(x+1)$ 的图象就不是由 $f(x)$ 的图象向左平移 1 个单位而得到. 应是向右平移 1 个单位而得到.

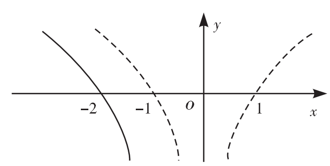


图 1—4

分析:其翻折后再平移.

正解:$\because y=\log_2(1-x)=\log_2[-(x-1)]$

故图象可由 $f(x)=\log_2 x$ 的图象作关于 y 轴的对称图象得 $y=\log_2(-x)$,再沿 x 轴向右平移 1 个单位而得. 如图 1—5

评注:作平移变换时要分清

(1)平移的方向.

(2)平移的单位.

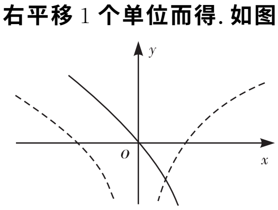


图 1—5

▶3. 已知函数 $y=2^x$ 的图象,如何作出下列函数的图象.

(1) $y=(\frac{1}{2})^{-2x+1}+2$;(2) $y=-2^{\frac{1}{2}x}$;(3) $y=\log_2 x$.

本题考查函数是如何进行平移、伸缩,对称变换的.

分析:转化为熟悉的函数形式,再进行图形变换.

解:(1)因为 $y=(\frac{1}{2})^{-2x+1}+2=2^{2x-1}+2$,所以把 $y=2^x$ 图象上所有点向右平移一个单位得到函数 $y=2^{x-1}$ 的图象;再把所得图象上的所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍(纵坐标不变),得到函数 $y=2^{2x-1}$ 的图象;再把所得图象上的所有点向上平移 2 个单位得到函数 $y=2^{2x-1}+2$ 的图象,即为所求作的函数 $y=(\frac{1}{2})^{-2x+1}+2$ 的图象.

(2)先将 $y=2^x$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变),再以 x 轴为对称轴向下翻折即得函数 $y=-2^{\frac{1}{2}x}$ 的图象.

(3)作 $y=2^x$ 的图象关于直线 $y=x$ 的对称图形,即得 $y=$

$\log_2 x$ 的图象.

评注:若变换中既有平移变换,又有伸缩变换,一般采用先平移后伸缩变换,这样平移和伸缩都按原来方向、单位进行;若采用先伸缩后平移,伸缩按原来方向、单位进行,但平移变换中的单位应发生变化. 如上例(1),先把 $y=2^x$ 图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$,纵坐标不变,得到 $y=2^{2x}$;再把 $y=2^{2x}$ 图象上所有点向右平移 $\frac{1}{2}$ 个单位,得到 $y=2^{2(x-\frac{1}{2})}=2^{2x-1}$ 的图象;再把 $y=2^{2x-1}$ 图象上所有点向上平移 2 个单位,得到所求函数的图象.

▶4. 求方程 $3x^2+4x-\frac{6}{x}+5=0$ 的实数解的个数.

本题考查把方程转化为函数图象解决问题的能力.

分析:原方程等价于 $3x^3+4x^2+5x-6=0(x\neq 0)$,求出方程的解,再数其个数是可行的,但要涉及三次方程求解. 运用函数图象,采用数形结合法比较简捷.

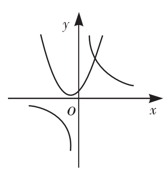


图 1—6

解:原方程等价于 $\begin{cases} y=3x^2+4x+5 \\ y=\frac{6}{x} \end{cases}$.

在同一个平面直角坐标系中画出上述两个函数的图象(如图),因两个函数图象只有一个公共点,故已知方程只有 1 个实数解.

评注:1. 方程与函数的互化,数形结合是高考考查的重要内容,必须理解它,掌握它.

2. 若设 $y_1=3x^2+4x$,$y_2=\frac{6}{x}-5$,由图象也能看出两函数的图象只有一个公共点,即方程 $3x^2+4x-\frac{6}{x}+5=0$ 只有一个实数解,关键是进行转化构造,形式不是固定的.

▶5. 已知函数 $f(x)=\frac{ax-a^2}{2x+b}(a\neq 0)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 的图象如图 1—7 所示. 求 a、b 的值,并写出 $f^{-1}(x)$ 的解析式.

本题考查互为反函数的图象间的关系,这也是高考考查的热点内容.

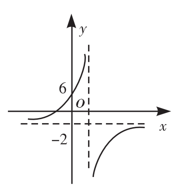


图 1—7

分析:本题的实质是由图象求解析式. 根据反函数的有关概念,即互为反函数的两个函数图象间的关系及其它们定义域和值域间的关系,结合图象特征,解决此题就不难了.

解:由图象知,$f^{-1}(x)$ 的图象经过点(0,6),

∴$f(x)$ 的图象必过点(6,0),

∴$\frac{6a-a^2}{12+b}=0 \Rightarrow a=6$ 或 $a=0$(舍去),所以 $f(x)=\frac{6x-36}{2x+b}$.

又由图象知 $f^{-1}(x)$ 的图象以 $y=-2$ 为一条渐近线,因此 $y=f^{-1}(x)$ 的值域为 $y\neq -2$,即函数 $f(x)$ 的定义域为 $x\neq -2$ 的一切实数.

又∵$f(x)=\frac{6x-36}{2x+b}$ 的定义域为 $x\neq -\frac{b}{2}$

∴$-\frac{b}{2}=-2$ ∴$b=4$ ∴$f(x)=\frac{6x-36}{2x+4}=\frac{3x-18}{x+12}$,

求得 $f^{-1}(x)=\frac{-2x-18}{x-3}=\frac{2x+18}{3-x}(x\neq 3)$.

评注:抓住图形的特征,在解答题中取特殊点、特殊线来帮助分析问题,解决问题,这也是应熟练掌握的数学技巧.

▶6.(2000 年春季高考·北京)已知函数

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x\in[0,\frac{1}{2}] \\ f_2(x) & x\in[\frac{1}{2},1) \end{cases}$$

其中 $f_1(x)=-2(x-\frac{1}{2})^2+1$,

$f_2(x)=-2x+2$.

(1)在坐标系上画出 $y=f(x)$ 的图象.

(2)设 $y=f_2(x)$,$(x\in[\frac{1}{2},1])$ 的反函数为 $y=g(x)$. $a_1=1$,$a_2=g(a_1)$;$\cdots a_n=g(a_{n-1})$;求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式,并求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

(3)若 $x_B\in[0,\frac{1}{2}]$,$x_1=f(x_0)$,$f(x_1)=x_0$,求 x_0.

本题考查函数的概念和性质,数列的推理能力以及数形结合能力.

分析:先利用函数,反函数定义求出函数与图象;再利用各对应关系逐步运算.

解:(1)在$[0,\frac{1}{2})$上为抛物线一部分,在$[\frac{1}{2},1]$上为线段. 如图.

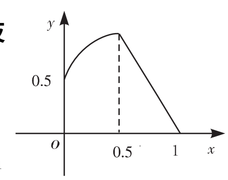


图 1—8

(2)$f_2(x)=-2x+2$,$x\in[\frac{1}{2},1]$的反函数为 $y=1-\frac{x}{2}$,$x\in[0,1]$

由已知条件得:$a_1=1$,$a_2=1-\frac{1}{2}a_1=1-\frac{1}{2}$

$a_3=1-\frac{1}{2}a_2=1-\frac{1}{2}-(\frac{1}{2})^2$

$a_4=1+(-\frac{1}{2})^1+(-\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{2})^3$

…

$a_n=(-\frac{1}{2})^0+(-\frac{1}{2})^1+(-\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{2})^3+\cdots+(1-\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1-(-\frac{1}{2})^n}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{2}{3}[1-(-\frac{1}{2})^n]$

∴$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{3}[1-(-\frac{1}{2})^n]=\frac{2}{3}$

(3)由已知 $x_0\in[0,\frac{1}{2})$,则 $x_1=f_1(x_0)=1-2(x_0-\frac{1}{2})^2$

由 $f_1(x)$ 的值域,得 $x_1\in[\frac{1}{2},1]$

∴$f_2(x_1)=2-2[1-2(x_0-\frac{1}{2})^2]=4(x_0-\frac{1}{2})^2$

由 $f_2(x_1)=x_0=4(x_0-\frac{1}{2})^2$,即 $4{x_0}^2-5x_0+1=0$

解得 $x_0=1$,$x_0=\frac{1}{4}$

因为 $x_0\in[0,\frac{1}{2})$,所以 $x_0=\frac{1}{4}$

评注:由特殊项递推出数列的通项公式,是高考考查的热点内容,必须熟练掌握它.