

主编
朱淳生

数 学 同 步

分 层 导 学

(高中一年级用)

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是以上海市高中一年级数学教材为依据的学生同步辅导读物,内容紧密配合教材,旨在同步地对课堂内容进行补充,并为学生提供训练机会.

本书按章进行编排,并根据需要每章的内容分成若干单元,每一单元设置了不同的栏目,“学习目标”和“例题剖析”总结了必须掌握的知识及解题技巧,“分层练习”分基础型和提高型两级,供不同层次的学生选用,然后进行“本章小结”,并配有“分层测试”.整本书中附有“阶段测试”“提示与参考答案”.

本书紧扣教材,讲解到位,补充了教材的不足,让学生花最少的时间,获得最大的收益.

责任编辑 闵 珏

出版说明

这套同步分层导学丛书是以上海市现行教材为依据的学生同步辅导读物,内容紧密配合教材.各分册按年级编写,旨在同步地对课堂内容进行辅导,为学生提供训练机会,并成为课堂教学的有益的参考辅导读物.

根据数理化各学科的特点,将每章内容划分为若干单元,每一单元内设置不同的栏目,有学习目标、例题剖析、分层练习等.

学习目标 总结每单元须要掌握的知识及技巧.

例题剖析 精选了一些典型例题.通过分析、解答,使学生能够学会如何灵活运用各种解题技巧.

分层练习 对每一单元内容以试卷形式让学生进行自测训练.试卷分为基础型、提高型两级,适合不同层次的学生选用.

最后对每一章进行本章小结,旨在回顾重点、难点,解析一些侧重于整章知识的综合运用的例题,同时配有分层测试、阶段测试和期末测试,这些试卷增设了创新型题目,以满足部分学生的需要.

丛书紧扣教材,内容新颖;开阔学生思路,提高学生素质;让学生花最少的时间,获得最大的收益.

本书的主编为朱淳生,参加本书编写的有(按章节顺序排列):朱英、杨岳明、曹荣琦、陶慰树、金红卫、宋林荣、邬先鸿、唐仁兴、王泳澄、宋保国、蒋宪国、张建权、章志强、万国良、金国强、姚志强、彭洪葵、王长官、俞铮、张海君、黄根初、朱淳生、苏发银等.

上海科学技术出版社
2001年6月

目 录

第一章 集合与命题	1
一、集合	1
学习目标	1
例题剖析	1
分层练习	2
二、抽屉原则与平均数原则(略)	5
三、四种命题形式	5
学习目标	5
例题剖析	5
分层练习	6
四、充分条件与必要条件	9
学习目标	9
例题剖析	9
分层练习	10
本章小结	11
例题剖析	12
分层测试	13
第二章 不等式	19
一、不等式的性质	19
学习目标	19
例题剖析	19
分层练习	20
二、不等式的解法	22
学习目标	22
例题剖析	22
分层练习	23
本章小结	25
例题剖析	26
分层测试	27
第三章 复数初步	31
一、复数的概念	31
学习目标	31

例题剖析	31
分层练习	32
二、复数的四则运算	34
学习目标	34
例题剖析	35
分层练习	36
三、实系数一元二次方程的解	38
学习目标	38
例题剖析	38
分层练习	39
本章小结	41
例题剖析	41
分层测试	43
阶段测试	46
第四章 函数	51
一、函数及其运算	51
学习目标	51
例题剖析	51
分层练习	53
二、函数的基本性质	55
学习目标	55
例题剖析	56
分层练习	58
本章小结	62
例题剖析	62
分层测试	64
期末测试	68
第五章 指数函数与对数函数	74
一、指数函数	74
学习目标	74
例题剖析	74
分层练习	76
二、对数	78
学习目标	78
例题剖析	79
分层练习	80
三、对数函数	84
学习目标	84
例题剖析	84

分层练习	86
四、简单的对数方程与指数方程	88
学习目标	88
例题剖析	88
分层练习	89
本章小结	91
例题剖析	92
分层测试	94
第六章 三角比	98
一、任意角的三角比	98
学习目标	98
例题剖析	98
分层练习	101
二、三角恒等式(一)	103
学习目标	103
例题剖析	103
分层练习	105
三、三角恒等式(二)	108
学习目标	108
例题剖析	108
分层练习	110
阶段测试	113
四、解斜三角形	117
学习目标	117
例题剖析	118
分层练习	120
本章小结	122
例题剖析	123
分层测试	125
第七章 三角函数	129
一、三角函数	129
学习目标	129
例题剖析	129
分层练习	132
二、反三角函数和三角方程	134
学习目标	134
例题剖析	134
分层练习	137
本章小结	139

例题剖析.....	139
分层测试.....	141
期末测试.....	145
提示与参考答案.....	151

集合与命题

一、集合

 学习目标

1. 理解集合、空集的意义,掌握集合的表示方法.正确使用符号“ $\in$ ”与“ $\notin$ ”.
2. 理解子集、真子集、集合相等概念,能判断两个简单集合之间的包含关系或相等关系,并能正确使用符号“ $\subseteq$ ”“ $\subset$ ”和“ $=$ ”.
3. 理解交集、并集概念,掌握集合的交、并运算.
4. 理解全集的意义、补集的概念,掌握集合的补运算.
5. 培养数学语言表达能力;初步认识数形结合的数学思想方法;理解个性与共性、部分与整体、特殊与一般的辩证关系.

 例题剖析

例1 试用列举法表示下列集合:

$$(1) A = \left\{ x \mid \frac{6}{3-x} \in \mathbf{N}^{\textcircled{1}}, x \in \mathbf{Z} \right\}; (2) B = \{ y \mid y = -x^2 + 2x + 3, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{N}^* \};$$

$$(3) C = \{ (x, y) \mid x + y = 4, x, y \in \mathbf{N}^* \}.$$

分析 从代数角度看,集合 A 的元素是使 $\frac{6}{3-x}$ 为自然数的整数 x 的取值,即集合 A 是使 $3-x$ 为 6 的正约数的整数 x 的取值组成的集合;集合 B 的元素是函数 $y = -x^2 + 2x + 3$ 为自然数的函数值;集合 C 的元素是满足方程 $x + y = 4$ 的每一组自然数的解.从几何角度看,集合 B 的元素是抛物线 $y = -x^2 + 2x + 3$ 上纵坐标为自然数点的纵坐标,集合 C 的元素是一次函数 $y = -x + 4$ 图象上坐标为自然数的点.

解 (1) $\because \frac{6}{3-x} \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{Z}, \therefore 3-x$ 的取值为 6, 3, 2, 1. 从而得出 x 的取值为 -3, 0, 1, 2. $\therefore A = \{0, 1, 2, -3\}$.

$$(2) \because y = -(x-1)^2 + 4 \leq 4, y \in \mathbf{N}, \therefore y \text{ 的取值为 } 1, 2, 3, 4. \therefore B = \{1, 2, 3, 4\}.$$

$$(3) \because x + y = 4, x, y \in \mathbf{N}^*, \therefore \begin{cases} x=1, \\ y=3; \end{cases} \begin{cases} x=2, \\ y=2; \end{cases} \begin{cases} x=3, \\ y=1. \end{cases}$$

$$\therefore C = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}.$$

例2 (1) $A = \{y \mid y = x^2, x \in \mathbf{R}\}, B = \{y \mid y = -x^2 + 2, x \in \mathbf{R}\}$, 求 $A \cap B$;

(2) $M = \{(x, y) \mid y = x^2, x \in \mathbf{R}\}, N = \{(x, y) \mid y = -x^2 + 2, x \in \mathbf{R}\}$, 求 $M \cap N$.

$\textcircled{1} \mathbf{N}$ —自然数, $\mathbf{N}^*$ —正整数.

分析 灵活运用集合中元素的特性——确定性和互异性,是解决集合的确定、集合之间关系的确定等问题的基本方法. 本题从代数角度看,集合 A, B 的元素分别是函数 $y=x^2$ 、 $y=-x^2+2$ 的函数值,因而 $A \cap B$ 是两个函数值的全体组成的集合的交集;集合 M, N 的元素分别是二元方程 $y=x^2$ 、 $y=-x^2+2$ 的解(实数对形式),因而 $M \cap N$ 是上述两个二元方程解集的交集,即由这两个方程组成的方程组的解集. 从几何角度看, $A \cap B$ 是满足抛物线 $y=x^2$ 、 $y=-x^2+2$ 上的点的纵坐标的全体组成的集合的交集; $M \cap N$ 是两条抛物线 $y=x^2$ 和 $y=-x^2+2$ 的交点组成的集合.

解 (1) $y=x^2 \geq 0$, $A = \{y | y \geq 0\}$, 又 $\because y = -x^2 + 2 \leq 2$, $B = \{y | y \leq 2\}$,
 $\therefore A \cap B = \{y | 0 \leq y \leq 2\}$.

(2) $M \cap N = \{(x, y) | y = x^2, \text{ 且 } y = -x^2 + 2\} = \{(1, 1), (-1, 1)\}$.

例 3 设 $A = \{-4, 2a-1, a\}$, $B = \{9, a-5, 1-a\}$, 已知 $A \cap B = \{9\}$, 求 a .

分析 由 $A \cap B = \{9\}$, 得 $9 \in A$, 根据集合元素的确定性 $2a-1=9$ 或 $a^2=9$. 对每一种情况求解的 a 值, 根据集合元素的互异性及已知条件进行判别, 得出 a 值.

解 $A \cap B = \{9\}$, $\therefore 9 \in A$.

若 $2a-1=9$, 则 $a=5$, 此时 $A = \{-4, 9, 25\}$, $B = \{9, 0, -4\}$. $A \cap B = \{9, -4\}$ 与已知矛盾, 故舍去.

若 $a^2=9$, 则 $a=\pm 3$.

当 $a=3$ 时, $A = \{-4, 5, 9\}$, $B = \{-2, -2, 9\}$ 与互异性矛盾, 故舍去.

当 $a=-3$ 时, $A = \{-4, -7, 9\}$, $B = \{9, -8, 4\}$, 符合题意.

$\therefore a=-3$.

例 4 已知 $A = \{x | -3 < x < 2\}$, $B = \{x | x-a \leq 0\}$,

(1) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $A \subset B$, 求 a 的取值范围.

分析 利用集合的图示及数轴, 是认识并解决有关集合的关系、集合间的运算等问题的主要方法. 本题集合 A, B 的元素是分别满足不等式 $-3 < x < 2$ 、 $x-a \leq 0$ 的实数. 借助于数轴, 观察集合 A 和 B 分别满足的关系 $A \cap B = \emptyset$, 或 $A \subset B$, 从而得出 a 的取值范围.

解 (1) $\because B = \{x | x \leq a\}$, 欲使 $A \cap B = \emptyset$, 则 $a \leq -3$.

(2) 使 $A \subset B$, 则 $a \geq 2$.

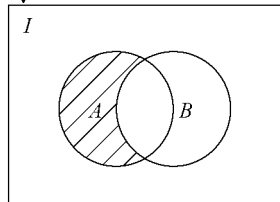


分层练习

基础型

一、填空题

1. 用列举法表示集合 $\{x | -1 < x < 5\} \cap \mathbf{N}^* = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 用描述法表示, 被 3 除余 1 的正整数所组成的集合 $\underline{\hspace{2cm}}$.
3. 集合 $\{a, b\}$ 的所有子集为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
4. 用适当的符号 ($\in$ 、 $\notin$ 、 $\supset$ 、 $\subset$ 、 $\not\subset$ 、 $=$) 填空.
 $a \underline{\hspace{0.5cm}} \{a\}$, $\sqrt{2} \underline{\hspace{0.5cm}} \mathbf{Q}$, $\{0, 1\} \underline{\hspace{0.5cm}} \{1, 0\}$, $\{x | x = 2n, n \in \mathbf{N}^*\} \underline{\hspace{0.5cm}} \mathbf{N}^*$.
5. 设全集 $I = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, $A = \{x | 1 \leq x < 2\}$ 那么 $\bar{A} = \underline{\hspace{2cm}}$.
6. 已知 $A = \{(x, y) | x - 2y = 1\}$, $B = \{(x, y) | 2x + y = 2\}$, 则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$.
7. 已知 $A = \{x | -2 \leq x \leq 4\}$, $B = \{x | -5 < x < 3\}$, 则 $A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$.
8. 用集合的运算把右图阴影部分表示出来 $\underline{\hspace{2cm}}$.



(第 8 题)

二、选择题

1. 下列描述能表示的集合是().

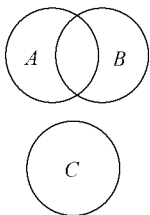
- (A) 全体高个子的人 (B) 一切很大的数
(C) 所有的三角形 (D) 所有爱好上网的网民

2. 下列各式中正确的个数是().

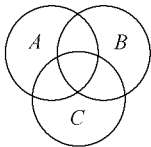
- (1) $0 \in \{0\}$ (2) $0 \in \emptyset$ (3) $\{0\} \supset \emptyset$ (4) $\{0\} = \emptyset$

- (A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

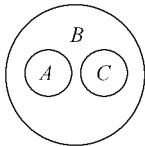
3. $A = \{\text{锐角三角形}\}$, $B = \{\text{等腰三角形}\}$, $C = \{\text{钝角三角形}\}$, 则集合 A, B, C 之间的关系是().



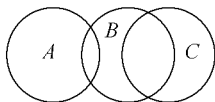
(A)



(B)



(C)



(D)

(第 3 题)

4. 如果 $I = \{a, b, c, d, e, f\}$, $N = \{a, c, d, e\}$, $M = \{a, b\}$, 则 $\overline{N} \cap M$ 为().

- (A) $\{b, c, d, e, f\}$ (B) $\{a, b, f\}$
(C) $\{a, b, d, e, f\}$ (D) $\{a, c, d, e, f\}$

三、解答题

1. 设全集 $I = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$, $A = \{2, a + 1\}$, $\overline{A} = \{5\}$, 求实数 a 的值.

2. 设集合 $A = \{x | -3 < x < 5\}$, $B = \{x | -a < x < a, a > 0\}$,

- (1) 若 $A \supset B$, 求 a 的取值范围;
(2) 若 $A \cap \overline{B} = \emptyset$, 求 a 的取值范围.

3. 若集合 $A = \{a | x^2 - x + a = 0, \text{无实根}, a \in \mathbf{R}\}$, $B = \{a | \text{二次方程 } ax^2 + 2x + 1 = 0 \text{ 有实根}, a \in \mathbf{R}\}$, 求: $A \cap B$ 和 $A \cup B$.

4. 已知方程 $x^2 + 2x + p = 0$ 的解集为 A , 方程 $x^2 - qx - 2 = 0$ 的解集为 B , 且 $A \cap B = \{1\}$, 求
(1) p, q 值; (2) $A \cup B$.

提高型

一、填空题

1. 设 $A = \{(x, y) | x + y = 5, x \in \mathbf{N}^*, y \in \mathbf{N}^*\}$, 用列举法表示集合 $A =$ _____.

2. 满足 $\{1, 3\} \subset A \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的集合 A 为_____.

3. 用适当的符号($\in, \notin, =, \supset, \subseteq, \subset$)填空:

0 _____ $\emptyset$, π _____ $\{x | x > 3, x \in \mathbf{R}\}$, $\{0\}$ _____ $\emptyset$, $\{x | x = 4m, m \in \mathbf{Z}\}$ _____ $\{x | x = 2n, n \in \mathbf{Z}\}$,
 $A \cap B$ _____ A .

4. 设已知 $A = \{x | x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | x = 3k, k \in \mathbf{Z}\}$, $C = \{x | -10 \leq x + 2 \leq 10\}$, 则

用列举法表示 $A \cap (B \cap C) =$ _____.

5. 如果集合 $A = \{x | 59x^2 - 319x - 79 = 0, x \in \mathbf{R}\}$,

$B = \{x | x^2 + x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 那么 $A \cap B =$ _____.

6. 集合 $A = \{y | y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{y | y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \cup B =$ _____.

7. 全集 $I = \{1, 0, a^2 - 2a + 1\}$, $A = \{1, |a + 1|\}$, $\bar{A} = \{4\}$, 则 $a =$ _____.

8. 若集合 $A = \{x | x^2 + x - 6 = 0\}$, $B = \{x | ax + 1 = 0\}$, 且 $B \subset A$, 则 a 所能取的值是 _____.

二、选择题

1. 下列各组表示的集合中, 集合 A, B 相等的是().

(A) $A = \emptyset, B = \{0\}$

(B) $A = \{1, 2\}, B = \{(1, 2)\}$

(C) $A = \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}, B = \{n, n-1, \dots, 3, 2, 1\}$

(D) $A = \{y | y = x^2, x \in \mathbf{R}\}, B = \{(x, y) | y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$

2. 设全集 $Z = \{(x, y) | x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, $A = \{(x, y) | \frac{y-3}{x-2} = 1, x, y \in \mathbf{R}\}$, $B = \{(x, y) | y \neq x + 1, x, y \in \mathbf{R}\}$, 则 $\bar{A} \cap \bar{B}$ 为().

(A) $\bar{A}$ (B) $\bar{B}$ (C) $\emptyset$ (D) $\{(2, 3)\}$

3. 设集合 $A = \{x | x < 7, x \in \mathbf{N}\}$, $B = \{x | x \text{ 是质数}\}$, $C = A \cap B$, 则集合 C 的真子集个数是().

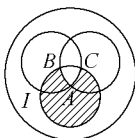
(A) 3

(B) 4

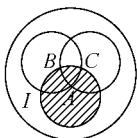
(C) 7

(D) 8

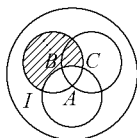
4. 下列各图中, 用阴影部分表示 $\bar{A} \cap B$ 的是().



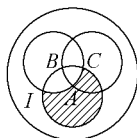
(A)



(B)



(C)



(D)

(第 4 题)

三、解答题

1. 若集合 $A = \{x | -1 \leq x < 1\}$, 当全集 I 分别取下列集合时, 求 $\bar{A}$:

(1) $I = \mathbf{R}$; (2) $I = \{x | x \leq 2\}$; (3) $I = \{x | -2 \leq x \leq 1\}$.

2. 设 $A = \{x | x^2 + (p+2)x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 且 $A \cap \mathbf{R}^+ = \emptyset$, 求实数 p 的范围.

3. 设 $A = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x | -3 < x < -1\}$, 是否存在集合 C , 使下列三个条件同时成立: (1) $C \subseteq (A \cup B) \cap \mathbf{Z}$; (2) C 有两个元素; (3) $C \cap B \neq \emptyset$, 若存在, 求集合 C ; 若不存在, 说明理由.

4. 在校艺术节活动中, 某班有 23 人参加了文艺汇演的演出活动, 有 18 人参加了书画评展活动, 共有 32 人参加了这两项活动, 问班级中有多少人同时参加了这两项活动?

二、抽屉原则与平均数原则(略)

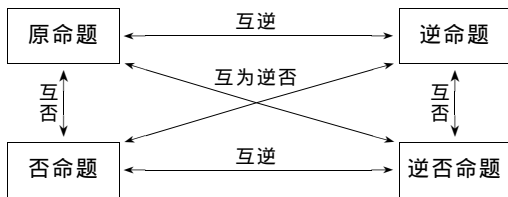
三、四种命题形式

学习目标

1. 理解推出关系及命题证明的意义,能证明一些简单命题的真假,会用举反例的方法说明命题不成立.

2. 正确理解四种命题的形式(原命题、逆命题、否命题和逆否命题),能写出一些简单命题的逆命题、否命题和逆否命题.例如,若一命题的条件记为 A ,结论记为 B ,那么该命题的原命题形式是:若 A 成立,则 B 成立;
逆命题形式是:若 B 成立,则 A 成立;
否命题形式是:若 A 不成立,则 B 不成立;
逆否命题形式是:若 B 不成立,则 A 不成立.

3. 正确理解四种命题的形式间的相互关系:



4. 正确理解命题的等价关系,当证明某个命题较困难时能利用命题的等价关系,可转化为证明原命题的等价命题,即逆否命题.

例题剖析

例1 判断下列命题的真假,并说明理由.

- (1) 若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 满足 $ac < 0$,那么这个方程有实数根;
- (2) 若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 有实数根,那么满足 $ac < 0$;
- (3) 一个有理数与一个无理数的和是无理数;
- (4) 设 $a, b, c \in \mathbf{N}$,如果 ab 是 c 的倍数,那么 a, b 中至少有一个 c 的倍数.

分析 命题的真或假都要证明.证明一个命题正确,可以从已知条件出发,依据所学过的公理、定理、公式,利用推出关系逐步推理得出结论;也可以用反证法等间接证明.要确定一个命题是假命题,只要举出一个反例即可.

解 (1) 是真命题.对于方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$),由 $ac < 0 \Rightarrow -4ac > 0$,又 $b^2 \geq 0$,
 $\therefore \Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ 方程有实数根.

(2) 是假命题.举反例:方程 $2x^2+4x+1=0$ 中, $\Delta = 16 - 8 = 8 > 0$,方程有实根,而 $ac = 2 > 0$.

(3) 是真命题.用反证法证明:设全集 $I = \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{Q}$, $b \in \mathbf{Q}$, $a+b=c$.假设 $c \in \mathbf{Q}$,由有理数定义知, $c = \frac{n}{m}$, $a = \frac{q}{p}$ ($m, n, p, q \in \mathbf{Z}$, 且 $m \neq 0, p \neq 0$), $\therefore a+b=c$, $\therefore b=c-a = \frac{n}{m} - \frac{q}{p}$

$= \frac{np-mq}{mp}$. $\because np-mq \in \mathbf{Z}, mp \in \mathbf{Z}, mp \neq 0, \therefore b \in \mathbf{Q}$, 这与已知 $b \notin \mathbf{Q}$ 矛盾. 所以假设错误, 即 c 为无理数.

(4) 是假命题. 举反例: $c=6, a=2, b=3, \therefore ab=6$ 是 $c=6$ 的倍数, 但 a, b 都不是 c 的倍数.

例 2 写出命题: “若两个实数的积不是无理数, 则这两个数都不是无理数”的逆命题、否命题、逆否命题.

分析 命题的四种形式的构成虽然不难理解, 但给出一种命题形式, 正确写出它的另外三种形式却不容易. 解决这个难点的关键是要分清命题的条件与结论, 必要时可将命题写成“如果……, 那么…….”的形式, 再进行求解.

解 原命题: 若两个实数的积不是无理数, 则这两个数都不是无理数.

逆命题: 若两实数都不是无理数, 则两个实数的积不是无理数.

否命题: 若两实数的积是无理数, 则两数至少有一个是无理数.

逆否命题: 若两个实数至少有一个是无理数, 则这两实数的积是无理数.

例 3 如图 1.1 所示, BD, CE 分别是 $\triangle ABC$ 的 AC, AB 边上的高, 且 $BD \neq CE$. 求证: $AB \neq AC$.

分析 本题中条件与结论都以否定的形式给出, 直接证明无从下手, 可以利用命题的等价关系转化为证明其逆否命题: “ BD, CE 分别是 $\triangle ABC$ 的 AC, AB 边上的高, 且 $AB=AC$. 求证: $BD=CE$ ”就容易的多了.

证明 由 $AB=AC \Rightarrow \triangle ABC$ 是等腰三角形, $\Rightarrow \angle EBC = \angle DCB$, 又因为 BD, CE 分别是 $\triangle ABC$ 的 AC, AB 上的高, BC 是公共边, 所以 $\triangle EBC \cong \triangle DCB \Rightarrow BD=CE$. 即原命题的逆否命题成立, 所以原命题成立.

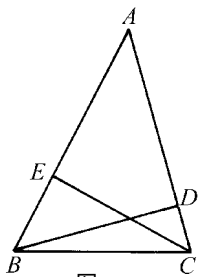


图 1.1

分层练习

基础型

一、填空题

1. 设实数 x 适合 $(x-2)(x+3) > 0$ 为命题 $M, x < -3$ 为命题 N , 则两命题的关系是 M _____ N . (填入符号 $\Leftarrow, \Rightarrow, \Leftrightarrow$)
2. 命题“若 $\frac{a}{b} > 1$, 则 $a > b$ ”的否命题是 _____.
3. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 命题“若 $a+b < 0$, 且 $ab > 0$, 则 a 和 b 都小于 0.”是 _____ 命题. (填“真”或“假”)
4. 已知一命题的逆命题为“如果 $A \cap B = \emptyset$, 那么 $A \subseteq \bar{B}$ ”, 则该原命题是 _____.
5. 写出一个与命题“两对角线互相垂直的平行四边形是菱形”等价的命题为: _____.
6. 请举一反例说明命题“若 $\frac{c}{a} > 0$, 则方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根均大于 0”是假命题: _____.
7. 命题“若 $x+y > 0$, 则 $x > 0$, 且 $y > 0$ ”, 它的逆命题是 _____ (), 否命题是 _____.

- _____(), 逆否命题是_____(). (填“真”或“假”)
8. “若 $A \subseteq B$ 则 $A \cap B = A$ ”是_____命题, 它的逆命题是_____命题. (填“真”或“假”)

二、选择题

1. 判断下列命题:

- (1) 抛物线 $y = kx^2 + 3x - 1$ 与 x 轴至少有一个交点;
- (2) 互为子集的两个集合相等;
- (3) 空集是任何集合的真子集;
- (4) 方程 $mx^2 + 3x - 2 = 0$ 两根异号.

其中真命题的个数是().

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. 命题 $M: ax + b = cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbf{R}$), 命题 $N: x = \frac{d+b}{a-c}$.

则命题 M 与 N 的推出关系是().

- (A) $M \Leftarrow N$ (B) $M \Rightarrow N$ (C) $M \Leftrightarrow N$ (D) $M \not\Leftarrow N$

3. 下列命题中的真命题的个数是().

- (1) 每个集合都有真子集
- (2) 每个集合都有子集
- (3) 若集合 A, B 的交集是空集, 则 A, B 中至少有一个是空集
- (4) 若集合 A, B 的并集是全集, 则 A, B 中至少有一个是全集

- (A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 0 个

4. 与命题“ x, y, z 不全是负数”等价的命题是().

- (A) x, y, z 中至少有一个是正数
- (B) x, y, z 全不是负数
- (C) x, y, z 中只有一个是负数
- (D) x, y, z 中至少有一个是非负数

三、解答题

1. 判断下列命题的真假, 并说明理由:

- (1) 如果 A 是 B 的子集, 那么 B 不是 A 的子集;
- (2) 所有的正偶数都是合数;
- (3) 若 $A \cap B \neq \emptyset, B \subset C$, 则 $A \cap C \neq \emptyset$;
- (4) 若 $a + b + c = 0$, 则关于 x 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有一个根为 1.

2. 写出命题“如果两个三角形全等, 则这两个三角形面积相等”的逆命题、否命题、逆否命题, 并且判断它们的真假.

3. 求证: 若 $a + b$ 不是偶数, 则 a, b 不全是奇数.

4. 试举一个命题, 然后写出它的逆命题、否命题、逆否命题, 并且判断它们的真假.

提高型

一、填空题

1. 设命题 $A: 1 + m + n$ 是偶数, 命题 $B: 1, m, n$ 都是偶数. 则 A _____ B . (填入 $\Rightarrow, \Leftarrow$ 或 $\Leftrightarrow$)

2. 填写否定形式:

- (1) $a > 0$ 或 $b \leq 0$ _____;
 (2) 三条直线 l, m, n 两两相交 _____;
 (3) A, B 为集合, $A \subset B$ _____;
 (4) a, b, c 为集合 A 的元素, a, b, c 都属于 A _____.

3. 某命题的逆命题是“若 $a=b$, 那么 $an=bn$ ($a, b, n \in \mathbf{R}$).”则该命题的否命题是_____.

4. 设命题 P : 集合 $A, B \neq \emptyset$ 且 $A \subset B \subset I, I$ 为全集; 命题 $Q: A \cap \bar{B} = \emptyset$, 则 P _____ Q . (填入 $\Leftarrow, \Rightarrow$ 或 $\Leftrightarrow$)

5. 命题“个位数是 5 的自然数能被 5 整除”的逆否命题是:_____.

6. 给出四个命题: (1) 一次函数的图象一定过原点; (2) 函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \in \mathbf{R}$) 叫做反比例函数; (3) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴一定有两个交点; (4) $|b|$ 是一次函数 $y = kx + b$ 在 y 轴上的截距. 其中假命题有:_____.

7. 命题“如果 $x^2 - 3x + 2 \neq 0$, 那么 $x \neq 1$ ”是_____命题(填“真”或“假”). 理由是_____.

8. (1) “ $A \subseteq B$ ”与“ $A \cup B = B$ ”; (2) “ $\alpha \in A$ ”与“ $\alpha \in A \cup B$ ”; (3) “ $\alpha \in A \cap B$ ”与“ $\alpha \in B$ ”; (4) “ $\beta \in A \cap B$ ”与“ $\beta \in A \cup B$ ”. 以上四组中的两个命题互为等价命题的有_____.

二、选择题

1. 下列命题中真命题是().

- (A) 集合 A 和 B 的交集为全集, 则 A, B 都是全集
 (B) 集合 A 和 B 的交集为空集, 则 A, B 至少有一是空集
 (C) 任何一个集合 A 至少有两个不同的子集
 (D) 任何一个集合 A 必有一个真子集

2. 设全集 $I = \mathbf{R}, A, B$ 为集合

- (1) $M: A \not\subset B, N: \bar{B} \not\subset \bar{A}$; (2) $M: A \subset B, N: B \neq \emptyset$;
 (3) $M: A \subseteq B, N: A = B$; (4) $M: A \subset B, N: \bar{B} \subset \bar{A}$.

以上四式中, 有 $M \Rightarrow N$, 但 $N \not\Rightarrow M$ 的是().

- (A) (1)、(3) (B) (2)、(4) (C) (4) (D) (2)

3. 已知命题 A 成立可推出命题 B 不成立, 那么下列说法一定正确的是().

- (A) 命题 A 成立可推出命题 B 成立 (B) 命题 A 不成立可推出命题 B 不成立
 (C) 命题 B 不成立可推出命题 A 成立 (D) 命题 B 成立可推出命题 A 不成立

4. 与“一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), 有一个正根、一个负根”等价的命题是().

- (A) $\frac{b}{a} > 0$ (B) $\frac{b}{a} < 0$ (C) $\frac{c}{a} > 0$ (D) $\frac{c}{a} < 0$

三、解答题

1. 判断命题“三个连续的正整数的和是 3 的倍数”的真假, 并说明理由.

2. 某命题的逆命题是: “ x 为实数, 当 $x < \frac{1}{x}$ 时, $0 < x < 1$ ”, 请写出原命题、否命题、逆否命题, 并判断其真假.

3. 求证: 对角线不互相平分的四边形不是平行四边形.
4. 已知二次方程 $y = x^2 - 2ax + 3a^2 - 3a + 1$, 回答下列命题是否正确, 并证明.
- (1) 对每一个 a , 不论怎样的 $x \in \mathbf{R}$ 都能使 $y > 0$ 成立;
- (2) 对于每一个 a , 总有 $x \in \mathbf{R}$, 使得 $y > 0$.

四、充分条件与必要条件



学习目标

1. 理解充分条件、必要条件和充要条件的含义.
2. 能判别一些简单的充分条件、必要条件与充要条件, 并能使用充分条件、必要条件与充要条件的术语.
3. 初步掌握使用充分条件与必要条件解决有关数学问题的方法.



例题剖析

例 1 “ $x^2 - 5x + 6 \neq 0$ ”是“ $x \neq 2$ ”的().

- (A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
(C) 充要条件 (D) 非充分非必要条件

分析 将题设改成命题“若 $x^2 - 5x + 6 \neq 0$, 则 $x \neq 2$ ”, 它的等价命题是“若 $x = 2$, 则 $x^2 - 5x + 6 = 0$ ”, 显然, 此命题是真命题, 即 $x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$, 故“ $x^2 - 5x + 6 \neq 0$ ”是“ $x \neq 2$ ”的充分条件. 反过来, “若 $x^2 - 5x + 6 = 0$, 则 $x = 2$ ”是假命题, 因为 $x = 3$ 时, 有 $x^2 - 5x + 6 = 0$, 但 $3 \neq 2$, 因此, $x^2 - 5x + 6 = 0 \nRightarrow x = 2$, 即 $x \neq 2 \nRightarrow x^2 - 5x + 6 \neq 0$, 故“ $x^2 - 5x + 6 \neq 0$ ”不是“ $x \neq 2$ ”的必要条件, 综上所述, “ $x^2 - 5x + 6 \neq 0$ ”是“ $x \neq 2$ ”的充分非必要条件.

解 选 A.

例 2 写出“ $a + b > 0$ ”的一个必要非充分条件, 并说明理由.

分析 设“ $a + b > 0$ ”的一个必要非充分条件为 A , 则存在下列关系: “ $a + b > 0$ ” $\nRightarrow A$, 由此可见本题是一个开放性问题, 其答案是不唯一的, 只要满足上述关系即可.

解 $\because$ “ $a + b > 0$ ” $\Rightarrow (a + b)^2$,

$\therefore$ “ $a + b > 0$ ”的一个必要非充分条件是 $(a + b)^2$.

又 $\because$ “ $a + b > 0$ ” $\nRightarrow$ “ $a + b > -2$ ”, $\therefore$ “ $a + b > 0$ ”的一个必要非充分条件是 $a + b > -2$.

例 3 若 $A = \{y | y = x^2 - 4x + 6\}$, $B = \left\{x \mid \frac{x}{a} > 1\right\}$, 试证明“ $a > 5$ ”是“ $B \subset A$ ”的一个充分非必要条件, 并说明理由.

分析 在判断 A 是否为 B 的充分条件或必要条件时, 需要从 A 能否推出 B 及 B 能否推出 A , 这两方面进行思考, 在肯定 $A \Rightarrow B$ (或 $B \Rightarrow A$) 时必须直接证明, 而否定必须举反例即可. 在本题中, 只要证明 $a > 5 \Rightarrow B \subset A$, 同时举一个反例说明 $B \subset A \nRightarrow a > 5$ 即可.

解 如果 $a > 5$, $B = \left\{x \mid \frac{x}{a} > 1\right\} = \{x | x > a\} = \{x | x > 5\}$,

$y = x^2 - 4x + 6 = (x - 2)^2 + 2 \geq 2$, $A = \{y | y \geq 2\}$, 所以 $B \subset A$.

即 $a > 5 \Rightarrow B \subset A$, 故“ $a > 5$ ”是“ $B \subset A$ ”的充分条件.

反之,如果 $B \subset A$, 取 $a=3$, 则 $B = \{x | x > 3\}$, $B \subset A$ 仍成立, 但 $3 < 5$, 即 $B \subset A \nRightarrow a > 5$, 故“ $a > 5$ ”是“ $B \subset A$ ”的非必要条件.

综上所述, “ $a > 5$ ”是“ $B \subset A$ ”的一个充分非必要条件.



分层练习

基础型

一、填空题

1. “ $x=0$ ”是“ $|x-1|=1$ ”的_____条件.
2. “ $ax=bx$ ”是“ $a=b$ ”的_____条件.
3. “ $x > 2\sqrt{3}$ ”是“ $x > 3\sqrt{2}$ ”的_____条件.
4. 写出“ $x > 1$ ”的一个充分非必要条件_____.
5. 写出“ $a < 0$, 且 $b < 0$ ”的一个必要非充分条件.
6. “四边形是正方形”是“四边形为菱形”的_____条件.
7. “个位是 0 的自然数”是“自然数能被 5 整除”的_____条件.
8. A 是 B 的充分不必要条件, B 是 C 的充要条件, D 是 C 的必要非充分条件, 则 D 是 A 的_____条件.

二、选择题

1. 条件 $\alpha: |m|=1$, 结论 $\beta: m=-1$, 则 α 是 β 的().
(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
(C) 充要条件 (D) 既非充分又非必要条件
2. 设 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, “ $x_1 > 0$, 且 $x_2 > 0$ ”是“ $x_1 + x_2 > 0$, 且 $x_1 x_2 > 0$ ”的().
(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
(C) 充要条件 (D) 既非充分又非必要条件
3. “ $|y| > |x|$ ”是“ $y > x$ ”的().
(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
(C) 充要条件 (D) 既非充分又非必要条件
4. “ $a=b=0$ ”的充要条件是().
(A) $a+b=0$ (B) $ab=0$ (C) $a-b=0$ (D) $a^2+b^2=0$

三、解答题

1. “函数 $y=kx+b$ 的图象过原点”是“ $b=0$ ”的什么条件? 简述理由.
2. “ $A \subset B$ ”是“ $A=B$ ”的什么条件, 简述理由.
3. 已知 $A = \{1, 1+m, 1+2m\}$, $B = \{1, n, n^2\}$, 试求 $A=B$ 的充要条件.
4. 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 下列哪些条件是 $x^2 + y^2 > 0$ 的必要条件、充分条件、充要条件?
 - (1) $x \neq 0$, 且 $y=0$;
 - (2) $y \neq 0$;
 - (3) $x^2 + y^2 > -1$;
 - (4) $x \neq 0$, 且 $y \neq 0$;
 - (5) $x \neq 0$, 或 $y \neq 0$;
 - (6) $xy \neq 0$.