

主编
叶声扬

数 学 同 步

分 层 导 学

(高中三年级用)

上海科学技术出版社

内 容 提 要

同步分层导学丛书是与教材内容紧密配合的学生同步辅导读物,旨在同步地对课堂内容进行补充,并为学生提供训练机会.本书是其中的一本.

本书按章编写,并将每一章的内容分成若干单元,在每一单元提出学习目标,然后进行例题剖析并配有练习.除个别章节外,练习分为基础型和提高型两类.本书设有章后小结及分层测试,且因为高中三年级用书,所以还设有对高中内容的专题复习以及高考模拟试卷.本书附有全部题目的参考答案.

责任编辑 苏德敏 刘 啸

出 版 说 明

这套同步分层导学丛书是以上海市现行教材为依据的学生同步辅导读物,内容紧密配合教材.各分册按年级编写,旨在同步地对课堂内容进行辅导,为学生提供训练机会,并成为课堂教学有益的参考辅导读物.

根据数理化各学科的特点,将每章内容划分为若干单元,每一单元内设置不同的栏目,有学习目标、例题剖析、分层练习等.

学习目标 总结每单元须要掌握的知识及技巧.

例题剖析 精选了一些典型例题.通过分析、解答,使学生能够学会如何灵活运用各种解题技巧.

分层练习 对每一单元内容以试卷形式让学生进行自测训练.试卷分为基础型、提高型两级,适合不同层次的学生选用.

最后对每一章进行本章小结,旨在回顾重点、难点,解析一些侧重于整章知识的综合运用的例题,同时配有分层测试及高考模拟试卷,这些试卷增设了创新型题目,以满足部分学生的需要.

丛书紧扣教材,内容新颖;开阔学生思路,提高学生素质;让学生花最少的时间,获得最大的收益.

参加本书编写的有:丁伟强、朱文达、李景祥、吴运、胡军、郑芝英等,本书由叶声扬统稿.

上海科学技术出版社
2001 年 6 月

目 录

第一章 集合与函数	1
一、集合、命题及函数性质	1
学习目标	1
例题剖析	1
分层练习	3
二、幂、指数、对数函数及函数应用	6
学习目标	6
例题剖析	6
分层练习	8
本章小结	10
分层测试	12
第二章 不等式	16
一、不等式的性质及不等式的证明	16
学习目标	16
例题剖析	16
分层练习	17
二、不等式的解法及不等式的应用	19
学习目标	19
例题剖析	19
分层练习	21
本章小结	23
分层测试	24
第三章 复数	27
一、复数的代数形式	27
学习目标	27
例题剖析	27
分层练习	29
二、(理科)复数的三角形式	30
学习目标	30
例题剖析	31

分层练习	32
本章小结	34
分层测试	36
第四章 数列	39
一、等差数列和等比数列	39
学习目标	39
例题剖析	39
分层练习	40
二、数列极限及数学归纳法	42
学习目标	42
例题剖析	42
分层练习	44
本章小结	47
分层测试	49
第五章 三角	53
一、三角函数	53
学习目标	53
例题剖析	53
分层练习	54
二、解三角形及其应用	56
学习目标	56
例题剖析	56
分层练习	58
本章小结	60
分层测试	61
第六章 立体几何与向量	65
一、直线、平面、多面体	65
学习目标	65
例题剖析	65
分层练习	67
二、向量	70
学习目标	70
例题剖析	70
分层练习	72
本章小结	73
分层测试	74
第七章 解析几何	80

一、直线与圆	80
学习目标	80
例题剖析	80
分层练习	81
二、椭圆、双曲线、抛物线	83
学习目标	83
例题剖析	84
分层练习	85
三、(理科)极坐标与参数方程	88
学习目标	88
例题剖析	88
分层练习	89
本章小结	91
分层测试	93
第八章 排列、组合、二项式定理、概率、统计	98
学习目标	98
例题剖析	98
分层测试	99
第九章 专题复习	101
一、数形结合	101
学习目标	101
例题剖析	101
分层练习	102
二、参数讨论	103
学习目标	103
例题剖析	103
分层练习	105
三、探索与创新	106
学习目标	106
例题剖析	106
分层练习	108
四、实际应用问题	110
学习目标	110
例题剖析	110
分层练习	112
本章小结	114
分层测试	115

高考模拟试卷(一).....	119
高考模拟试卷(二).....	122
高考模拟试卷(三).....	125
参考答案.....	128

集合与函数

一、集合、命题及函数性质

 学习目标

1. 理解集合、空集、子集、交集、并集、全集、补集等概念,并能进行集合的交、并、补运算.
2. 理解四种命题形式及其相互关系,理解推出关系及命题证明的意义.
3. 理解充分条件与必要条件的含义,能判别一些简单问题的充分条件与必要条件.
4. 理解函数概念,会求函数值、代数函数的定义域和简单代数函数的值域,会求两个函数的和函数与积函数.
5. 理解函数的单调性、奇偶性的概念,能判断一些简单函数的单调性、奇偶性.
6. 理解函数的最大值和最小值的概念,能求出一些简单函数的最大值或最小值.
7. 会求实际问题中两个变量间的函数关系,利用函数解决简单的实际应用问题.
8. 能利用函数的定义域、值域、奇偶性、单调性、最大值或最小值等概念来研究简单函数的性质,并能根据性质画出函数的图象.

 例题剖析

例 1 (1) 已知集合 $A = \{y | y = x^2 - 2x - 3, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{y | y = -x^2 + 4x + 5, x \in \mathbf{R}\}$.
求 $A \cap B$.

(2) 已知集合 $A = \{(x, y) | y = x^2 - 2x - 3, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{(x, y) | y = -x^2 + 4x + 5, x \in \mathbf{R}\}$.

求 $A \cap B$.

分析 第(1)题中, A, B 是两个数集,它们分别是二次函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 和 $y = -x^2 + 4x + 5$ 的值域, $A \cap B$ 是两个函数值域的公共部分;第(2)题中, A, B 为两个平面点集,它们分别是抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 和 $y = -x^2 + 4x + 5$ 上的点所组成的集合, $A \cap B$ 是两条抛物线的交点所组成的集合.

解 (1) $\because y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4, \therefore y \geq -4$.

$y = -x^2 + 4x + 5 = -(x - 2)^2 + 9, \therefore y \leq 9$.

$\therefore A = [-4, +\infty), B = (-\infty, 9], \therefore A \cap B = \{y | -4 \leq y \leq 9\}$.

(2) 解方程组 $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3, \\ y = -x^2 + 4x + 5, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = -1, \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 4, \\ y = 5. \end{cases}$

$\therefore A \cap B = \{(-1, 0), (4, 5)\}$.

说明 用描述法表示集合时,要弄清集合中元素的形式,在集合 $\{x|P(x)\}$ 中, x 表示集合中元素的形式, $P(x)$ 表示元素的性质和特征.由于(1)、(2)两题中元素的形式不同,因此相应的集合也是不同的,在求交集的过程中,解题思路也不同.

例 2 已知函数 $f(x) = (a^2 - 1)x^2 + (a - 1)x + 2$, 分别写出“ $f(x) > 0 (x \in \mathbf{R})$ ”的一个充分非必要条件及充要条件.

分析 当 $a^2 - 1 \neq 0$ 即 $a \neq \pm 1$ 时, $f(x)$ 为二次函数; 当 $a = -1$ 时, $f(x) = -2x + 2$ 是一次函数; 当 $a = 1$ 时, $f(x) = 2$ 是常数函数. 因此使 $f(x) > 0 (x \in \mathbf{R})$ 的条件因 a 的取值不同而不同.

解 “ $\begin{cases} a^2 - 1 > 0, \\ \Delta = (a - 1)^2 - 4 \times 2(a^2 - 1) < 0 \end{cases}$ ” 即 “ $a < -\frac{9}{7}$ 或 $a > 1$ ” 是 “ $f(x) > 0 (x \in \mathbf{R})$ ” 的一个充分非必要条件. 这是因为 “ $\begin{cases} a^2 - 1 > 0, \\ \Delta < 0 \end{cases}$ ” 表示 $f(x)$ 的图象是开口向上且在 x 轴上方的抛物线, 故 $f(x) > 0 (x \in \mathbf{R})$. 但当 $a = 1$ 时, 也有 $f(x) = 2 > 0 (x \in \mathbf{R})$.

由上述讨论, 得 “ $\begin{cases} a^2 - 1 > 0, \\ \Delta = (a - 1)^2 - 4 \times 2(a^2 - 1) < 0 \end{cases}$ 或 $a = 1$ ” 即 “ $a < -\frac{9}{7}$ 或 $a \geq 1$ ” 是 “ $f(x) > 0 (x \in \mathbf{R})$ ” 的充要条件.

说明 “ $f(x) > 0 (x \in \mathbf{R})$ ” 的充分非必要条件不是唯一的. 如 “ $a = 1$ ” 也是 “ $f(x) > 0 (x \in \mathbf{R})$ ” 的一个充分非必要条件. 同样, 在某些问题中, 必要非充分条件也不一定唯一.

例 3 设 $y = f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$.

(1) 求 $y = f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的表达式;

(2) 指出 $y = f(x)$ 的单调性. (不必写出判断过程)

分析 对 $x > 0$, 有 $-x < 0$, 由于 $x < 0$ 时, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$, $\therefore f(-x) = \frac{1}{2}(-x)^2 + 2(-x) + 1$. 再由 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 即 $f(-x) = -f(x)$, 从而可求出 $x > 0$ 时 $f(x)$ 的表达式.

解 (1) 当 $x > 0$ 时, $-x < 0$, 由已知 $f(-x) = \frac{1}{2}(-x)^2 + 2(-x) + 1 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$,

又 $\because f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, $\therefore f(-x) = -f(x)$.

当 $x > 0$ 时, $f(x) = -f(-x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$.

当 $x = 0$ 时, $f(0) = -f(0)$, $\therefore f(0) = 0$.

综上所述, 得

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1, & \text{当 } x < 0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时;} \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1, & \text{当 } x > 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

$$(2) \because f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+2)^2 - 1, & \text{当 } x < 0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时;} \\ -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 1, & \text{当 } x > 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

$\therefore f(x)$ 在区间 $(-\infty, -2]$ 与 $[2, +\infty)$ 上单调递减; 在区间 $[-2, 0)$ 与 $(0, 2]$ 上单调递增.

说明 讨论分段函数 $f(x)$ 的奇偶性,应注意对不同范围内的自变量 x , $f(x)$ 有不同的表达式.

例 4 设 $x \in [-1, 1]$, 求函数 $y = x^2 - ax + 1 (a \in \mathbf{R})$ 的最大值与最小值.

分析 函数 y 的图象(抛物线)的对称轴 $x = \frac{a}{2}$ 的位置随 a 的变化而变化,因此要对 $\frac{a}{2} \in [-1, 1]$ 及 $\frac{a}{2} \notin [-1, 1]$ 进行讨论,同时 $\frac{a}{2} \in [-1, 1]$ 时,还要分 $\frac{a}{2}$ 在 $[-1, 1]$ 上偏左、偏右两种情况讨论.

$$\text{解 } y = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + 1 - \frac{a^2}{4}.$$

(1) 当 $\frac{a}{2} < -1$, 即 $a < -2$ 时,在区间 $[-1, 1]$ 上函数 y 单调递增, $\therefore$ 当 $x = -1$ 时,函数有最小值 $y_{\min} = f(-1) = 2 + a$;

当 $x = 1$ 时,函数有最大值 $y_{\max} = f(1) = 2 - a$.

(2) 当 $\frac{a}{2} > 1$, 即 $a > 2$ 时,在区间 $[-1, 1]$ 上函数 y 单调递减, $\therefore$ 当 $x = -1$ 时,函数有最大值 $y_{\max} = f(-1) = 2 + a$;

当 $x = 1$ 时,函数有最小值 $y_{\min} = f(1) = 2 - a$.

(3) 当 $-1 \leq \frac{a}{2} < 0$, 即 $-2 \leq a < 0$ 时,当 $x = \frac{a}{2}$ 时,函数有最小值 $y_{\min} = f\left(\frac{a}{2}\right) = 1 - \frac{a^2}{4}$;
当 $x = 1$ 时,函数有最大值 $y_{\max} = f(1) = 2 - a$.

(4) 当 $0 \leq \frac{a}{2} \leq 1$, 即 $0 \leq a \leq 2$ 时,当 $x = \frac{a}{2}$ 时,函数有最小值 $y_{\min} = f\left(\frac{a}{2}\right) = 1 - \frac{a^2}{4}$, 当 $x = -1$ 时,函数有最大值 $y_{\max} = f(-1) = 2 + a$.

综上所述,当 $a < -2$ 时, $y_{\min} = 2 + a, y_{\max} = 2 - a$;

当 $-2 \leq a < 0$ 时, $y_{\min} = 1 - \frac{a^2}{4}, y_{\max} = 2 - a$;

当 $0 \leq a \leq 2$ 时, $y_{\min} = 1 - \frac{a^2}{4}, y_{\max} = 2 + a$;

当 $a > 2$ 时, $y_{\min} = 2 - a, y_{\max} = 2 + a$.

说明 本例是讨论含字母系数的二次函数的最值,由于字母系数不同的取值范围影响函数的最值,因此要对字母系数的取值进行分类讨论,分类的标准按抛物线的对称轴通过定义区间(偏左或偏右)及不通过定义区间而定.再借助于函数图象的直观性,求得函数的最值.这里既体现了分类讨论的思想,又体现了数形结合的思想.

解分类讨论题,最后的小结是必要的,这主要是为了归纳解题过程中分散得到的结论,同时也有利于检查解题过程中对字母参数进行的分类是否重复或遗漏.



分层练习

基础型

一、填空题

1. 已知集合 $A = \{y | y = -x^2 + 2, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{y | y = |x| - 1, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
2. 设全集 $I = \{3, 5, a^2\}$, 集合 $A = \{5, a + 1\}$, $\bar{A} = \{4\}$, 则 $a =$ _____.
3. 函数 $y = ax^2 + bx + c$ 为偶函数的充要条件是 _____.
4. 函数 $y = \frac{\sqrt{6+5x-x^2}}{\sqrt{x-1}-2}$ 的定义域是 _____.
5. 函数 $y = -2x^2 + 4x - 1$ 当 $x \in [0, 3]$ 时的最大值 $M =$ _____, 最小值 $m =$ _____.

6. 写出一个定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数,使它在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数又是减函数,用解析式表示这个函数是_____.

二、选择题*

1. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 有一个正根和一个负根的充要条件是()

- (A) $\frac{b}{a} > 0$. (B) $\frac{b}{a} < 0$. (C) $\frac{c}{a} > 0$. (D) $\frac{c}{a} < 0$.

2. 已知集合 $A = \{(x, y) | x + y = 4\}$, $B = \{(x, y) | x - y = 2\}$, 则集合 $A \cap B$ 是()

- (A) $x = 3, y = 1$. (B) $(3, 1)$. (C) $\{(3, 1)\}$. (D) $\{3, 1\}$.

3. 下列函数中,偶函数的个数是()

- (1) $y = |x^3|$; (2) $y = (x^2 + x)^2$; (3) $y = x^{-\frac{2}{3}}$; (4) $y = \frac{x^2(x-1)}{x-1}$.

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

4. 下列函数中,在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数的是()

- (A) $y = x^{-\frac{3}{2}}$. (B) $y = -x^{\frac{2}{3}}$. (C) $y = x^2 - 2x + 5$. (D) $y = \sqrt{x} - 1$.

三、解答题

1. 设集合 $A = \{m | \text{二次方程 } mx^2 - 2x + 1 = 0 \text{ 无实根}, m \in \mathbf{R}\}$, $B = \{m | \text{二次方程 } x^2 - 2\sqrt{3}x + m = 0 \text{ 有实根}, m \in \mathbf{R}\}$.

求 $A \cap B$ 和 $A \cup B$.

2. 设函数 $F(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3, & \text{当 } x < 0 \text{ 时;} \\ f(x), & \text{当 } x > 0 \text{ 时} \end{cases}$ 是偶函数.

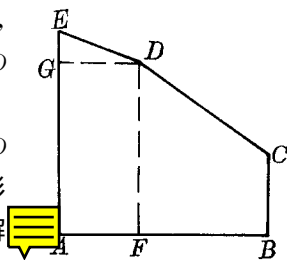
- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;
(2) 指出函数 $F(x)$ 的单调性(不必写出判断过程);
(3) 画出函数 $F(x)$ 的图象.

3. 设 $x \in [a, a+1]$, $a \in \mathbf{R}$, 求函数 $y = x^2 - 2x + 1$ 的最大值和最小值.

4. 如图所示,有一块五边形的木板 $ABCDE$, 已知 $\angle A = \angle B = 90^\circ$, $AB = AE = 6\text{dm}$, $BC = 2\text{dm}$, 点 D 到 AB 的距离 $DF = 5\text{dm}$, 点 D 到 AE 的距离 $DG = 3\text{dm}$.

- (1) 在 AB 边上取一点 P (与点 A 不重合), 作 $PQ \perp AB$, 交边 ED 或 DC 于点 Q , 再作 $QR \perp AE$ 于点 R , 把木板截成矩形 $APQR$, 设 $AP = x\text{dm}$, 矩形 $APQR$ 的面积为 $S(\text{dm}^2)$, 试用解析式把 S 表示成 x 的函数;

- (2) 要使截得的矩形 $APQR$ 的面积最大, AP 的长应取为多少?
这个最大面积是多少?



(第4题)

提高型

一、填空题

1. 设集合 $A = \{(x, y) | y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{(x, y) | y = -2x^2 + 2, x \in \mathbf{R}\}$. 则 $A \cap B$

* 本书中的选择题,每个小题都给出了代号为 A、B、C、D 的四个结论,其中只有一个结论是正确的. 把你认为正确结论的代号写在题后的括号内. 下同.

=_____.

- 集合 $A = \{-3, a+1, a^2\}$, $B = \{a-3, 2a-1, a^2+1\}$, 且 $A \cap B = \{-3\}$, 则 $a =$ _____.
- 设 A 是 B 的充分非必要条件, B 是 C 的充要条件, C 是 D 的充分非必要条件, 则 D 是 A 的_____条件.
- 已知 $f(x)$ 的定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且 $f(x) - g(x) = x^3 - x^2 + 1$, 则 $g(x) =$ _____.
- 如果函数 $f(x)$ 满足 $f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x + 1$, 则 $f(x) =$ _____.
- 已知函数 $f(x) = x^2 + 4(a-1)x + 6$ 在区间 $(-\infty, 4]$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围是_____.

二、选择题

- 已知全集 $I = \mathbf{N}$, 集合 $A = \{x | x = 2n, n \in \mathbf{N}\}$, $B = \{x | x = 4n, n \in \mathbf{N}\}$, 则()
(A) $I = A \cup B$. (B) $I = \overline{A} \cup B$. (C) $I = A \cup \overline{B}$. (D) $I = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, “ $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是奇函数”是“ $f(x)$ 与 $g(x)$ 的积是偶函数”的()
(A) 充分非必要条件. (B) 必要非充分条件.
(C) 充分必要条件. (D) 既非充分也非必要条件.
- 如果函数 $f(x) = x^2 + bx + c$ 对任意实数 t 都有 $f(2+t) = f(2-t)$, 那么()
(A) $f(2) < f(1) < f(4)$. (B) $f(1) < f(2) < f(4)$.
(C) $f(2) < f(4) < f(1)$. (D) $f(4) < f(2) < f(1)$.
- 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x^2+1) = x^4 + x^2 - 6$, 则 $f(x)$ 在其定义域内的最小值是()
(A) $f(0)$. (B) $f(1)$. (C) $f(1) - \frac{1}{4}$. (D) $f(1) + \frac{1}{4}$.

三、解答题

- 设集合 $A = \{x | x^2 + (2m-3)x - 3m = 0\}$, $B = \{x | x^2 + (m-3)x + m^2 - 3m = 0\}$, 若 $A \neq B$, $A \cap B \neq \emptyset$, 试用列举法表示集合 $A \cup B$.
- 设定义在 $[-2, 2]$ 上的偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递减, 若 $f(1-m) < f(m)$, 求 m 的取值范围.
- 已知: $\frac{1}{3} \leq a \leq 1$, 若 $f(x) = ax^2 - 2x + 1$ 在 $[1, 3]$ 上的最大值为 $M(a)$, 最小值为 $m(a)$, $g(a) = M(a) - m(a)$.
(1) 求 $g(a)$ 的解析表达式;
(2) 讨论 $g(a)$ 的单调性, 并求出 $g(a)$ 的最大值和最小值.
- 有甲、乙两种商品, 经营销售这两种商品所能获得的利润是 p 和 q (万元), 它们与投入资金 x (万元) 的关系有经验公式:

$$p = \frac{1}{5}x, q = \frac{3}{5}\sqrt{x}.$$

今有 3 万元资金投入经营甲、乙两种商品, 那么对甲、乙两种商品的资金投入分别应为多少? 才能获得最大利润, 最大利润是多少?

二、幂、指数、对数函数及函数应用



学习目标

1. 知道幂函数的概念及一些常见的幂函数的性质与图象.
2. 理解指数、对数的意义,会熟练地将指数式与对数式互化.
3. 掌握积、商、幂的对数运算性质,掌握对数换底公式.
4. 理解常用对数的意义,能用计算器或数学用表求一个正数的常用对数,知道自然对数.
5. 理解反函数的概念,会求已知函数的反函数,掌握函数与它的反函数在定义域、值域以及图象上的关系.
6. 理解指数函数与对数函数的概念及联系,掌握它们的图象及其性质,并能作简单的应用.
7. 掌握简单的指数方程和对数方程(不等式)的解法,能解决简单的实际应用问题.



例题剖析

例 1 (1) 设 $10^a = 4$, $b = \lg 2$, 求 10^{2a-3b} .

(2) 设 $2x = \log_2 3$, 求 $\frac{2^{3x} + 2^{-3x}}{2^x + 2^{-x}}$.

分析 对第(1)、(2)题,利用指数式与对数式互化,可将对数化成指数进行计算,也可将指数化成对数进行计算.

解 (1) 方法一 由 $b = \lg 2$, 得 $10^b = 2$. $\therefore 10^{2a-3b} = \frac{10^{2a}}{10^{3b}} = \frac{4^2}{2^3} = 2$;

方法二 由 $10^a = 4$, 得 $a = \lg 4$, $\therefore 10^{2a-3b} = 10^{2\lg 4 - 3\lg 2} = 10^{\lg \frac{4^2}{2^3}} = 10^{\lg 2} = 2$.

(2) 方法一 由 $2x = \log_2 3$, 得 $2^{2x} = 3$.

$$\therefore \frac{2^{3x} + 2^{-3x}}{2^x + 2^{-x}} = \frac{2^{4x} + 2^{-2x}}{2^{2x} + 1} = \frac{3^2 + \frac{1}{3}}{3 + 1} = \frac{7}{3}.$$

方法二 由 $2x = \log_2 3$, 得 $-2x = \log_2 \frac{1}{3}$, $4x = \log_2 9$.

$$\therefore \frac{2^{3x} + 2^{-3x}}{2^x + 2^{-x}} = \frac{2^{4x} + 2^{-2x}}{2^{2x} + 1} = \frac{2^{\log_2 9} + 2^{\log_2 \frac{1}{3}}}{2^{\log_2 3} + 1} = \frac{9 + \frac{1}{3}}{3 + 1} = \frac{7}{3}.$$

说明 (1) 对数恒等式 $a^{\log_a N} = N$ 表示指数和对数的互逆运算关系,可以用来计算一些指数里含有对数式的值;换底公式 $\log_a b = \frac{\log_a b}{\log_a a}$ 可将不同底数的对数式化成同底数的对数式,进而找到解题的途径,还可以推出有用的公式:

$$\log_a^m b^n = \frac{n}{m} \log_a b \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1).$$

(2) 在解题中还应灵活掌握指数式和对数式的转换及变形. 例如第(2)题中的变形. 还可以将分子分解因式后再与分母约分,得 $\frac{2^{3x} + 2^{-3x}}{2^x + 2^{-x}} = \frac{2^{2x} - 1 + 2^{-2x}}{2^x + 2^{-x}} = \frac{3 - 1 + \frac{1}{3}}{3} = \frac{7}{3}$.

例 2 若 $\log_a 3 < \log_b 3 < 0$, 则 a 与 b 的关系是()

(A) $0 < b < a < 1$. (B) $0 < a < b < 1$. (C) $0 < a < 1 < b$. (D) $1 < a < b$.

分析 可用换底公式将 $\log_a 3 < \log_b 3 < 0$ 化为 $\frac{1}{\log_3 a} < \frac{1}{\log_3 b} < 0$. 从而 $\log_3 b < \log_3 a < 0$; 也可以利用 $y = \log_a x$ 和 $y = \log_b x$ 的图象的位置关系, 找到对应于 $y=1$ 时 $x=a$ 和 $x=b$ 的位置; 还可以用特殊值求解.

解法一 由 $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, 将题设化为 $\frac{1}{\log_3 a} < \frac{1}{\log_3 b} < 0$. 再由不等式的性质知 $\log_3 b < \log_3 a < 0$. 因为函数 $y = \log_3 x$ 是增函数, 则 $b < a$, 且 $0 < a < 1, 0 < b < 1$, 故 $0 < b < a < 1$, 应选(A).

解法二 由 $\log_a 3 < \log_b 3 < 0$, 知点 $A(3, \log_a 3)$ 、点 $B(3, \log_b 3)$ 在第四象限且分别在函数 $y = \log_a x$ 和 $y = \log_b x$ 的图象上, 由此可作出这两个函数的大致图象(如图 1-1). 再作直线 $y=1$ 分别与这两个函数的图象交于点 $C(a, 1)$ 、 $D(b, 1)$, 过 C 、 D 分别作 x 轴的垂线, 垂足分别对应 a 、 b . 由图可以得到 $0 < b < a < 1$. 应选(A).

解法三 由 $\log_a 3 < \log_b 3 < 0$, 可知 $0 < a < 1, 0 < b < 1$, 则可以排除(C)、(D). 又 $\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1 < -\frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{9}} 3 < 0$. 于是取 $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{9}$, 而 $0 < \frac{1}{9} < \frac{1}{3} < 1$. 故应选(A).

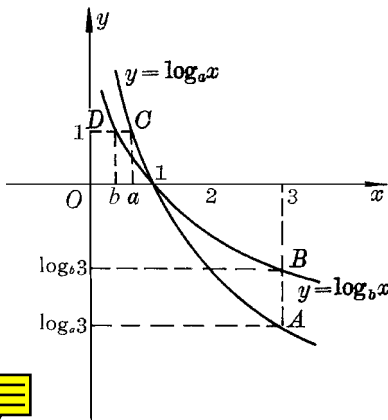


图 1-1

说明 (1) 对数函数的图象都过点 $(1, 0)$, 只要再知道图象上的另一点(本题中的点 A 、 B), 就能画出对数函数的大致图象. 而对数函数 $y = \log_a x$ 的图象还过点 $(a, 1)$, 确定这一点就能确定 a 在 x 轴上的位置. 解法二即利用了这一方法. 这种“数形结合”的思想方法是重要的数学思想方法之一.

(2) 排除法和特殊值法是解单项选择题的有效方法, 解法三就是这两种方法的结合.

例 3 解下列方程:

$$(1) 8^x + 4^x = 5 \cdot 2^{x+2}; \quad (2) \log_3(x^2 + 5x - 2) + \log_{\frac{1}{3}}(x + 2) = 1.$$

分析 (1) 第(1)题中, 先将底数化成以 2 为底, 然后设 $2^x = y$ 进行换元, 将原方程化为整式方程.

(2) 第(2)题中, 先将底数化成以 3 为底, 然后再转化为整式方程.

解 (1) 原方程化为 $2^{3x} + 2^{2x} = 20 \cdot 2^x$, 设 $2^x = y$, 得

$$y^3 + y^2 = 20y.$$

解方程, 得 $y_1 = 0, y_2 = -5, y_3 = 4$.

$\because y = 2^x > 0, \therefore y = 4$, 即 $2^x = 4, \therefore x = 2$.

故原方程的根是 $x = 2$.

(2) 原方程化为 $\log_3(x^2 + 5x - 2) - \log_3(x + 2) = \log_3 3$,

$$\therefore \log_3(x^2 + 5x - 2) = \log_3(x + 2) + 1,$$

$$\therefore x^2 + 5x - 2 = 3(x + 2),$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0.$$

解方程, 得 $x_1 = 2$ 或 $x_2 = -4$.

经检验: 原方程的根是 $x = 2$.

说明 (1) 解指数方程的常用变形方法是化对数式、化同底幂、换元, 利用 $a^{f(x)} = a^{g(x)} (a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的充要条件是 $f(x) = g(x)$, 将指数方程化为普通代数方程. 在变形过程中, 应注意及时化简, 如第(1)题解

题过程中,方程 $2^{3x}+2^{2x}=20 \cdot 2^x$ 两边同除以 2^x ,可得 $2^{2x}+2^x=20$,令 $2^x=y$,得 $y^2+y=20$,解得 $y_1=-5$ (舍), $y_2=4$,故 $x=2$.

(2) 解对数方程的常用变形方法是化同底幂、对数式变形、换元,利用 $\log_a f(x)=\log_a g(x) (a>0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 的充要条件是

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)>0, \\ g(x)>0, \end{cases} \quad \text{将对数方程化为普通代数方程. 值得注意的是,由 } \log_a f(x)=\log_a g(x)$$

转化为 $f(x)=g(x)$ 并不是同解变形,未知数 x 的取值范围可能扩大了,有可能产生增根,因此要验根或加上条件

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0. \end{cases}$$

(3) 上述方程中的等号“=”换成不等号,就是指数不等式和对数不等式,同样利用这种转化思想,根据指数函数、对数函数的单调性,就可将指数不等式或对数不等式转化为普通的代数不等式,并注意在对数不等式中加上条件

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0. \end{cases}$$



分层练习

基础型

一、填空题

- $(0.8)^8, 8^{0.8}, \log_{0.8} 8$ 三数从小到大的顺序排列是_____.
- 设 $\lg 2=a$, 则 $\log_2 5=$ _____ (用 a 表示).
- 已知 $2^a=3^b=6$, 则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$ _____.
- 方程 $2^{\log_3 x}=4$ 的解是_____.
- 函数 $y=\lg(x^2+1), (x \in [-3, -1])$ 的反函数是_____.
- 函数 $y=\sqrt{\log_{0.5}(4x-3)}$ 的定义域是_____.

二、选择题

- $\frac{\log_8 9}{\log_2 3}$ 的值是()
(A) $\frac{2}{3}$. (B) 1. (C) $\frac{3}{2}$. (D) 2.
- 设 a, b 满足 $0 < a < b < 1$, 则下列不等式中正确的是()
(A) $a^a < a^b$. (B) $b^a < b^b$. (C) $a^a < b^a$. (D) $b^b < a^b$.
- 如果 $\log_a 2 > \log_b 2 > 0$, 那么 a, b 间的关系是()
(A) $0 < a < b < 1$. (B) $1 < a < b$. (C) $0 < b < a < 1$. (D) $1 < b < a$.
- 关于 x 的方程 $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \log_a x \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ ()
(A) 仅当 $a > 1$ 时有唯一解. (B) 仅当 $0 < a < 1$ 时有唯一解.
(C) 必有唯一解. (D) 必无解.

三、解答题

- (1) 将下列各数按从小到大的顺序排列起来:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}, \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}, \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{5}, \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{5}}, \log_2 5.$$

- (2) 已知 x, y 为正数, $3^x=4^y$, 求使 $2x=py$ 的 p 值.

2. 解下列方程:

(1) $9^{-x} - 2 \cdot 3^{1-x} = 27$;

(2) $\lg(1-3x) = \lg(3-x) + \lg(7+x)$.

3. 1987年7月11日世界人口达50亿,联合国将7月11日定为“世界人口日”.1992年的“世界人口日”全球人口达到54.8亿.如果世界人口的年增长率不变,请计算:

(1) 世界人口年增长率是多少?

(2) 预测2010年7月11日世界人口数.

4. 已知函数 $f(x) = \log_a \frac{x+b}{x-b}$ ($a > 0, b > 0$, 且 $a \neq 1$).

(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域和值域;

(2) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性;

(3) 判断函数 $f(x)$ 的单调性;

(4) 求函数 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$.

提高型

一、填空题

1. 函数 $y = \sqrt{8-2^x} + \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x-1\right)}$ 的定义域是_____.

2. 若 $\log_a \frac{2}{3} < 1$, 则 a 的取值范围是_____.

3. 已知 $f(3x) = \log_2 \sqrt{\frac{9x+5}{2}}$, 则 $f(1) =$ _____.

4. 方程 $6^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$ 的解是_____.

5. 设 $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$, 则 $f^{-1}(0) =$ _____.

6. 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 6x + 17)$ 的值域是_____.

二、选择题

1. 当 $0 < a < b < 1$ 时, 下列不等式中正确的是()

(A) $(1-a)^{\frac{1}{b}} > (1-a)^b$.

(B) $(1+a)^a > (1+b)^b$.

(C) $(1-a)^b > (1-a)^{\frac{b}{2}}$.

(D) $(1-a)^a > (1-b)^b$.

2. 已知 $1 < x < 2$, 令 $a = (\log_2 x)^2$, $b = \log_2 x^2$, $c = \log_2(\log_2 x)$, 则()

(A) $a < b < c$.

(B) $a < c < b$.

(C) $c < b < a$.

(D) $c < a < b$.

3. 设 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, 且 $3^a = 4^b = 6^c$, 则()

(A) $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

(B) $\frac{2}{c} = \frac{2}{a} + \frac{1}{b}$.

(C) $\frac{1}{c} = \frac{2}{a} + \frac{2}{b}$.

(D) $\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{2}{b}$.

4. 已知 $F(x) = \left(1 + \frac{2}{2^x - 1}\right)f(x)$ ($x \neq 0$) 是偶函数, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $f(x)$ ()

(A) 是奇函数.

(B) 是偶函数.

(C) 可能是奇函数也可能是偶函数.

(D) 是非奇非偶函数.

三、解答题

1. 解下列方程:

(1) $4^x + 4^{-x} - 6(2^x + 2^{-x}) + 10 = 0$;

$$(2) \log_2(9^x - 5) = \log_2(3^x - 2) + 2.$$

2. 设 a, b, c 为正数, $a^x = b^y = c^z$, 且 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$, 求证: $c = ab$.

3. 设函数 $f(x) = \log_a(a - ka^x)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1, k \in \mathbf{R}$)

(1) 求 $f(x)$ 的定义域;

(2) 若 $f(x)$ 的反函数就是它本身, 求 k 的值;

(3) 在(2)的条件下, 求 $f^{-1}(x^2 - 2) = f(x)$ 的解.

4. 某地区 2000 年底居民住房的总面积为 $a(\text{m}^2)$, 其中危旧住房占 $\frac{1}{4}$, 新型单元房占 $\frac{1}{3}$. 当地政府决定从 2001 年起加快住房改造, 计划在五年内全部拆除危旧住房, 每年拆除的面积相同, 同时以 21% 的年增长率加快建造新型单元房, 用 $f(n)$ 表示第 n 年年底该地区住房的总面积.

(1) 写出 $f(1), f(2), f(3)$, 并归纳 $f(n)$ 的表达式; (不必证明)

(2) 危旧住房全部拆除后, 至少再过多少年, 才能使该地区居民住房的总面积从 2001 年起平均年增长率超过 10%?

本章小结

本章的重点是集合的概念及其运算; 充分条件、必要条件; 函数关系的建立; 函数的奇偶性、单调性、最大值与最小值; 对数的意义与运算性质; 指数函数与对数函数的图象和性质. 难点是命题的证明; 充分条件与必要条件的判别; 求函数的最大值与最小值; 反函数的概念; 函数关系的建立及函数应用.

函数图象形象直观地描述了两个变量之间的变化运动关系, 是研究函数性质的重要工具, 也是利用数形结合的思想解决数学问题的必要条件. 因此, 要善于将函数的解析式以及函数的性质与函数的图象作综合研究, 增强数形转化能力. 熟记一些常用函数的图象, 掌握函数作图的基本方法, 对加深理解函数概念及性质, 增强知识的归纳与记忆, 提高解题能力与应用能力都是十分重要的.

例 1 已知集合 $A = \{x | \lg(x^2 - 2ax + a^2 + 1) < \lg 2\}$, $B = \{x | (x - a)(x - 2) > 0\}$. 若 $A \cup B = \mathbf{R}$, 求实数 a 的取值范围.

分析 由 $\lg(x^2 - 2ax + a^2 + 1) < \lg 2$ 可得 $x^2 - 2ax + a^2 - 1 < 0$, 因为一元二次不等式的解集与二次函数的图象有密切的内在联系, 所以我们可以采用数形结合的思想来求解.

解 对一切 $x \in \mathbf{R}$, $x^2 - 2ax + a^2 + 1 = (x - a)^2 + 1 > 0$.
由 $\lg(x^2 - 2ax + a^2 + 1) < \lg 2$, 有 $x^2 - 2ax + a^2 - 1 < 0 \Rightarrow$
 $a - 1 < x < a + 1$, 即 $A = (a - 1, a + 1)$.

设 $f(x) = (x - a)(x - 2)$. 作出 $f(x)$ 的图象 (图 1-2).

要使 $A \cup B = \mathbf{R}$, 由 $f(x)$ 的图象知必须

$$\begin{cases} f(a-1) > 0, \\ f(a+1) > 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -(a-3) > 0, \\ a-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow 1 < a < 3.$$

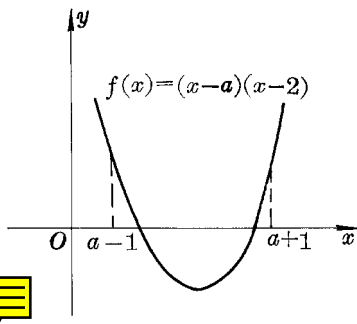


图 1-2