

主编
忻再义

数 学 同 步

分 层 导 学

(高中二年级用)

上海科学技术出版社

内 容 提 要

同步分层导学丛书是与教材内容紧密配合的学生同步辅导读物,旨在同步地对课堂内容进行补充,并为学生提供训练机会.本书是其中的数学高二年级用书.

本书按章编写,并将每一章内容分成若干单元,在每一单元提出学习目标,进行例题剖析并配以练习.除个别章节外,练习分为基础型和提高型两类.本书设有章后小结及分层测试,还有阶段测试以及期末测试卷.书末附有全部题目的参考答案.

责任编辑 周玉刚

出 版 说 明

这套同步分层导学丛书是以上海市现行教材为依据的学生同步辅导读物,内容紧密配合教材.各分册按年级编写,旨在同步地对课堂内容进行辅导,为学生提供训练机会,并成为课堂教学有益的参考辅导读物.

根据数理化各学科的特点,将每章内容划分为若干单元,每一单元内设置不同的栏目,有学习目标、例题剖析、分层练习等.

学习目标 总结每单元需要掌握的知识及技巧.

例题剖析 精选了一些典型例题.通过分析、解答,使学生能够学会如何灵活运用各种解题技巧.

分层练习 对每一单元内容以试卷形式让学生进行自测训练.试卷分为基础型、提高型两级,适合不同层次的学生选用.

最后对每一章进行本章小结,旨在回顾重点、难点,解析一些侧重于整章知识的综合运用的例题,同时配有分层测试及阶段、期末测试,这些测试增设了创新型题目,以满足部分学生的需要.

丛书紧扣教材,内容新颖;开阔学生思路,提高学生素质;让学生花最少的时间,获得最大的收益.

参加本书编写的有(按章节顺序排列):赵秀琴、潘瑾、袁夷、王春明、王启莘、冯强等,本书由忻再义统稿.

上海科学技术出版社

2001 年 6 月

目 录

第八章 空间直线和平面	1
一、平面的性质及空间两条直线	1
学习目标	1
例题剖析	1
分层练习	3
二、直线与平面,平面与平面的平行	5
学习目标	5
例题剖析	6
分层练习	7
三、直线与平面,平面与平面的相交	10
学习目标	10
例题剖析	10
分层练习	13
本章小结	16
分层测试	18
第九章 多面体	22
一、棱柱	22
学习目标	22
例题剖析	22
分层练习	24
二、棱锥	26
学习目标	26
例题剖析	26
分层练习	28
三、棱台	30
学习目标	30
例题剖析	30
分层练习	31
本章小结	33
分层测试	35
阶段测试	39
第十章 向量初步	43

一、平面向量	43
学习目标	43
例题剖析	43
分层练习	45
二、空间向量	47
学习目标	47
例题剖析	47
分层练习	48
本章小结	51
分层测试	52
期末测试	56
第十一章 坐标平面上的直线	60
一、坐标法	60
学习目标	60
例题剖析	60
分层练习	62
二、直线方程	64
学习目标	64
例题剖析	65
分层练习	67
三、两条直线的交点、夹角、点到直线的距离	69
学习目标	69
例题剖析	69
分层练习	72
本章小结	74
分层测试	76
第十二章 圆锥曲线	80
一、曲线与方程	80
学习目标	80
例题剖析	80
分层练习	81
二、圆	82
学习目标	82
例题剖析	83
分层练习	83
三、椭圆与双曲线	85
学习目标	85
例题剖析	85
分层练习	87

四、抛物线	88
学习目标	88
例题剖析	88
分层练习	89
五、坐标系的平移	91
学习目标	91
例题剖析	91
分层练习	92
六、圆的参数方程	94
学习目标	94
例题剖析	94
分层练习	95
本章小结	97
分层测试	98
阶段测试	102
第十三章 数列与数学归纳法	105
一、等差数列与等比数列的通项公式	105
学习目标	105
例题剖析	105
分层练习	106
二、数列的前 n 项和	108
学习目标	108
例题剖析	108
分层练习	109
三、数学归纳法	111
学习目标	111
例题剖析	111
分层练习	112
本章小结	114
分层测试	116
期末测试	119
参考答案	123

空间直线和平面

一、平面的性质及空间两条直线

 学习目标

1. 理解平面的基本性质,能运用三个公理及其推论判断、证明关于共面、共线、共点的问题.能看懂并画出一般的空间图形.
2. 理解空间中两条直线间的各种位置关系,掌握平行直线的基本性质.掌握异面直线概念,会求异面直线所成角的大小.

 例题剖析

例 1 若直线 l 与四边形 $ABCD$ 的三条边 AB 、 AD 、 CD 分别交于点 E 、 F 、 G , 求证: $ABCD$ 为平面四边形(图 8-1).

分析 论证一个四边形为平面四边形,本质上是证明该四边形的四个顶点或四条边在同一平面内,这样问题就转化为证明若干点或直线的共面问题,我们可以利用平面的基本性质来完成.

证明 $\because AB \cap AD = A$,
 $\therefore$ 直线 AB 、 AD 确定一个平面 α ,
 $\therefore$ 点 A 、 B 、 D 都在平面 α 内.
 $\because AB \cap l = E, AD \cap l = F$,
 $\therefore EF \subset \alpha$, 即 $l \subset \alpha$, 而 $CD \cap l = G$,
 $\therefore DG \subset \alpha$, 即 $CD \subset \alpha$,
 $\therefore$ 点 C 也在平面 α 内,从而四边形 $ABCD$ 是平面四边形.

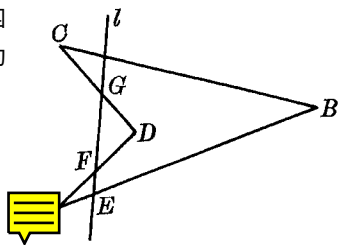


图 8-1

说明 证明几条直线或点在平面内,通常有两种方法,一是先由其中某些直线或点确定一个平面,再证明其他的直线和点都在这个平面内;另一种方法是先将所给的点或直线分成若干部分并分别确定平面,再证明这些平面重合.

例 2 在图 8-2 中,已知直线 a 、 b 、 c 不共面, $a \cap b \cap c = P$, 点 $A \in a$, 点 $D \in a$, 点 $B \in b$, 点 $C \in c$,

求证: BD 和 AC 是异面直线.

分析 证明异面直线问题,通常利用反证法.

证明 假设 BD 和 AC 不是异面直线,则可设 BD 和 AC 在同一平面 α 之内.于是 AD

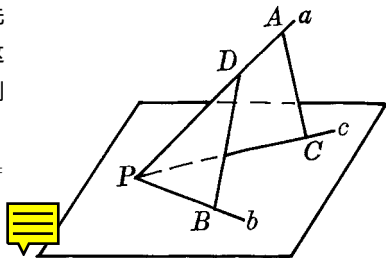


图 8-2

$\subset \alpha, BC \subset \alpha, a \subset \alpha$. 又 $P \in \alpha$,

$\therefore PB \subset \alpha, PC \subset \alpha$,

即 $a, b, c \subset \alpha$,

这与题设 a, b, c 不共面矛盾.

$\therefore$ 假设不成立, $\therefore BD$ 和 AC 是异面直线.

说明 用反证法证明问题的主要步骤是: ① 反设; ② 归谬; ③ 肯定原题结论成立.

例 3 如图 8-3 所示, 已知折线 $ABCD$, 若 AB, BC, CD 两两垂直且相等,

求: (1) $\angle BAD$;

(2) AC 与 BD 所成角的大小;

(3) AD 与 BC 所成的角的大小.

分析 由已知条件容易联想到折线 $ABCD$ 可以作为正方体的三条棱, 故可以把折线恢复成正方体, 设 $AB=BC=1$ 即可求得所求的角.

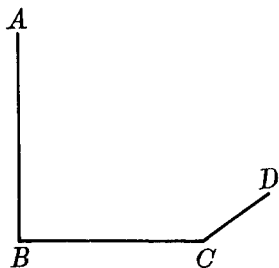


图 8-3

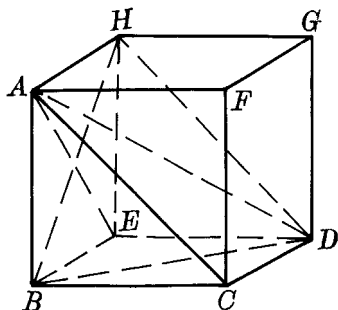


图 8-4

解 以 AB, BC, CD 为三条棱作出正方体(图 8-4), 设 $AB=1$, 连结 BD, DH, AE, BH .

(1) 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\angle ABD=90^\circ, AB=1, BD=\sqrt{2}$, 则

$$\tan \angle BAD = \frac{BD}{AB} = \sqrt{2}, \angle BAD = \arctan \sqrt{2};$$

(2) $\because AC \parallel DH$,

$\therefore AC$ 与 BD 所成角即是 $\angle BDH$.

在 $\triangle BDH$ 中, $BD=BH=DH$, 故 $\angle BDH=60^\circ$;

(3) $\because BC \parallel ED, \therefore \angle EDA$ 就是 AD 与 BC 所成的角.

在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中, $\angle AED=90^\circ, AE=\sqrt{2}, ED=1$,

$\therefore$ 直线 AD 与 BC 所成的角为 $\arctan \sqrt{2}$.

说明 把一些图形归结为某个基本图形的局部, 或者说找出这些图形的“寄生体”后, 就可以使元素及其关系变得明显而易于解决. 因此, 应该对正方体、长方体、正四面体等基本图形中的点、线、面的特点有一个清楚认识, 这样在遇到这些图形的局部时就可以“窥一斑而见全身”了.

求两条异面直线所成角时, 根据定义, 常将其中一线平移, 有时也可以利用三角形、梯形的中位线、平行四边形对边等表示. 在求角的大小时, 通常要解三角形, 因此要熟练掌握勾股定理和正、余弦定理.

例 4 如图 8-5 所示, 空间四边形 $ABCD$ 中, E, F, G 分别为 AB, AD, BC 的中点, M, N 为对角线 AC, BD 的中点, 求证:

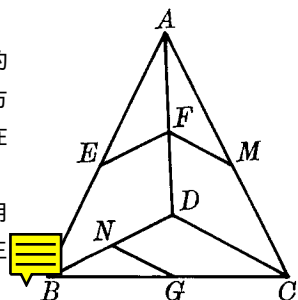


图 8-5

(1) $\angle EFM = \angle BDC$; (2) $\angle EFM + \angle DNG = 180^\circ$.

分析 在立体几何中,可以利用等角定理论证两个角相等.本题可以利用三角形中位线性质来完成.

证明 (1) $\because E, F$ 分别是 $\triangle ABD$ 边 AB, AD 的中点,

$\therefore EF \parallel BD$.

同理, $FM \parallel CD$.

$\therefore \angle EFM$ 和 $\angle BDC$ 两边分别平行且方向相同,

$\therefore \angle EFM = \angle BDC$;

(2) 易证 $NG \parallel CD$, 又 $FM \parallel CD$, $\therefore NG \parallel FM$.

$\therefore \angle EFM$ 和 $\angle DNG$ 两边分别平行, 其中 NG, FM 方向相同, 而 FE 与 ND 方向相反.

$\therefore \angle EFM + \angle DNG = 180^\circ$.



分层练习

基础型

一、填空题

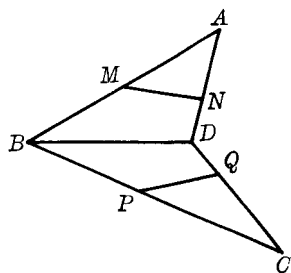
1. 若三个平面两两相交得到三条交线,则这三条交线交点个数为_____.
2. 若 a, b 是异面直线,直线 l_1, l_2 与 a, b 都相交,则 l_1, l_2 的位置关系是_____.
3. 已知角 α 和 β 的两边分别平行,当 $\alpha = 70^\circ$ 时, $\beta =$ _____.
4. 若四条直线两两平行,且任意三条不共面,则可以确定_____个平面.
5. 若两直线 l_1 与 l_2 同垂直于直线 l_3 ,则 l_1 与 l_2 的位置关系是_____.
6. 若空间四边形的两条对角线垂直且相等,则顺次连接各边中点所组成的图形是_____.

二、选择题

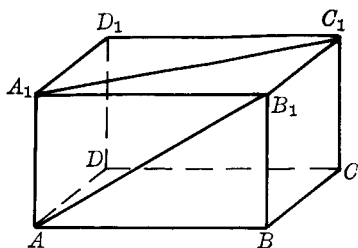
1. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的十二条面对角线中,与 A_1B 成 60° 角的异面直线有 ().
(A) 3 条 (B) 4 条 (C) 5 条 (D) 6 条
2. 若空间三条直线相交于同一点,它们确定的平面个数记为 n ,则 n 可取值为 ().
(A) 1 (B) 1, 3 (C) 1, 2, 3 (D) 1, 2, 3, 4
3. 有下列命题
(1) 两条直线确定一个平面.
(2) 两组对边相等的四边形是平行四边形.
(3) 两两相交的三条直线必在同一平面内.
(4) 分别位于两个不同平面的两条直线是异面直线.
其中正确命题的个数为 ().
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
4. 已知下列四个条件,其中能确定平面的是 ().
(A) 两条平行直线 (B) 两条互相垂直的直线
(C) 空间三点 (D) 一条直线和一个点

三、解答题

1. 直线 l 和 l 外不共线的三个点 A, B, C 一共可以确定几个平面, 试画图说明.
2. 如图, 空间四边形 $ABCD$ 的边上有点 M, N, P, Q .
 - (1) 求证: 当 M, N, P, Q 分别是各边的中点, 则 M, N, P, Q 共面;
 - (2) 求证: 当 MN 不平行于 PQ , 且 M, N, P, Q 共面时, 则直线 MN, BD, PQ 共点.



(第 2 题)



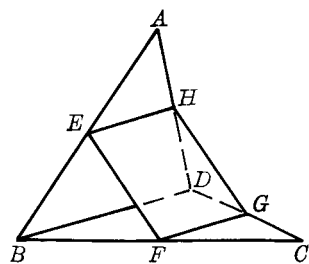
(第 3 题)

3. 如图, 长方体 AC_1 中, $\angle BAB_1 = \angle B_1A_1C_1 = 30^\circ$, $AA_1 = a$, 求:
 - (1) AB 与 A_1C_1 所成的角;
 - (2) AA_1 与 B_1C 所成的角;
 - (3) AB_1 与 A_1C_1 所成的角.
4. 已知 a, b 为异面直线, a 上两点 A, B 距离为 8, b 上两点 C, D 距离为 6, AD, BC 的中点分别为 M, N , 且 $MN = 5$, 求证: $a \perp b$.

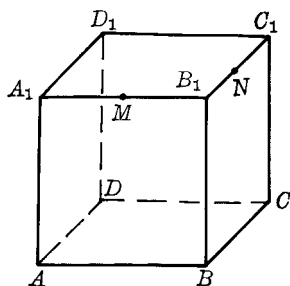
提高型

一、填空题

1. 两条直线没有公共点是这两条直线为异面直线的_____条件.
2. 若不重合的两条直线 a, b 与直线 l 都相交成等角, 则 a, b 的位置关系是_____.
3. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为 DD_1 的中点, 若 O 为底面的中心, 则直线 AM 与 A_1O 所成角的大小为_____.
4. 在空间四边形 $ABCD$ 中, E, F, G, H 分别是 AB, BC, CD, DA 上的点. 若 $\frac{AE}{EB} = \frac{AH}{HD} = \frac{CF}{FB} = \frac{CG}{GD}$, 则四边形 $EFGH$ 的形状是_____; 若 $\frac{AE}{EB} = \frac{AH}{HD} = \frac{BF}{FC} = \frac{DG}{GC}$, 则四边形 $EFGH$



(第 4 题)



(第 5 题)

的形状是_____；若 $\frac{AE}{EB}=\frac{AH}{HD}\neq\frac{CF}{FB}=\frac{CG}{GD}$ ，则四边形 $EFGH$ 的形状是_____.

5. 在棱长为 1 的正方体 AC_1 中,若 M,N 是 A_1B_1,B_1C_1 的中点,则过点 A,C,M,N 的截面面积为_____.
6. 若四面体 $ABCD$ 的每一条边长均为 a ,有一只蚂蚁从顶点 A 沿表面爬到对面 $\triangle BCD$ 的中心 O ,则它爬行的最短距离为_____.

二、选择题

1. 一条直线和此直线外不在同一直线上的三点所确定的平面个数是().
(A) 1 个 (B) 3 个 (C) 4 个 (D) 1 个,3 个或 4 个
2. 若 a 为直线, α 为平面,则下列推断中错误的是().
(A) 若 $A\in a,A\in\alpha,B\in a,B\in\alpha$,则 $a\subset\alpha$
(B) 若 $A\in\alpha,A\in\beta,B\in\alpha,B\in\beta$,则 $\alpha\cap\beta=AB$
(C) 若 $a\not\subset\alpha,A\in a$,则 $A\in\alpha$
(D) 若 $A,B,C\in\alpha,A,B,C\in\beta$,且 A,B,C 不共线,则 α 与 β 重合
3. 若异面直线 a,b 所成的角为 50° , P 为空间一定点,则过点 P 且与 a,b 所成的角都是 30° 的直线有且仅有().
(A) 1 条 (B) 2 条 (C) 3 条 (D) 4 条
4. 在空间四边形 $ABCD$ 中,若 M,N 分别是 AD,BC 上的点,且 $AM:MD=BN:NC=1:2$,又 $AB=3\text{cm},CD=6\text{cm}$, MN 与 AB,CD 所成的角分别为 α 与 β ,则 α 与 β 之间的大小关系是().
(A) $\alpha>\beta$ (B) $\alpha<\beta$ (C) $\alpha=\beta$ (D) $\alpha>\beta$ 或 $\alpha<\beta$

三、解答题

1. 已知直线 l_1,l_2,l_3 互相平行, l 交 l_1,l_2,l_3 于点 A_1,A_2,A_3 ,求证: l_1,l_2,l_3,l 四条直线共面,并指出本题可以进行怎样的推广?
2. 在四面体 $ABCD$ 中,作截面 PQR ,若 PQ,CB 的延长线交于点 M,RQ,DB 的延长线交于点 N,RP,DC 的延长线交于点 K ,求证: M,N,K 三点共线.
3. 在空间四边形 $ABCD$ 中,若 $AB=BC=CD=DA=6$,而对角线 $AC=BD=8$,求异面直线 AB 和 CD 所成的角.
4. 已知 E,F 分别是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AA_1,CC_1 上的点,且 $AE=C_1F$,求证:四边形 BED_1F 是平行四边形.

二、直线与平面,平面与平面的平行



学习目标

1. 理解直线与平面、平面与平面间的各种位置关系;
2. 理解直线与平面平行、平面与平面平行的概念,掌握线面、面面平行的判定定理和性质定理;
3. 掌握直线与直线平行、直线与平面平行、平面与平面平行的相互关系,会进行这些平

例题剖析

例 1 如图 8-6 所示,在正方体 AC_1 中,点 N 在 BD 上,点 M 在 B_1C 上,且 $CM=DN$,求证: $MN \parallel$ 平面 ABB_1A_1 .

分析 要证直线与平面平行,通常运用判定定理.即在平面内寻找一条直线与已知直线平行.注意到 $CM=DN$,容易想到运用平行线截割定理,构造平行线.

证明 过点 M 在平面 BC_1 内作 $ME \parallel BC$,交 BB_1 于 E ,过点 N 在平面 AC 内,作 $NF \parallel AD$,交 AB 于 F ,连结 EF . 则

$$\frac{EM}{BC} = \frac{B_1M}{B_1C}, \quad \frac{FN}{AD} = \frac{BN}{BD}.$$

又 $B_1C=BD$, $MC=ND$, 而 $B_1M=B_1C-MC$, $BN=BD-ND$,

$$\therefore B_1M=BN,$$

$$\therefore EM=FN, \text{ 又 } EM \parallel BC \parallel AD \parallel FN,$$

$\therefore$ 四边形 $MEFN$ 是平行四边形, $\therefore MN \parallel EF$, 而 $EF \subset$ 平面 ABB_1A_1 , $MN \not\subset$ 平面 ABB_1A_1 ,

$$\therefore MN \parallel \text{平面 } ABB_1A_1.$$

说明 证明平行问题,通常运用“线线平行”、“线面平行”、“面面平行”之间的转化来实现.

例 2 如图 8-7 所示,已知 $A \in \alpha, D \in \alpha, C \in \gamma, F \in \gamma, \alpha \parallel \beta \parallel \gamma, AC \cap \beta = B, DF \cap \beta = E$, 求证: $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

分析 这个题目从条件到结论都类似于平面几何中的平行线分线段成比例定理,所不同的是平面几何中两直线是共面的,而这里的 AC, DF 未必共面,且原来的平行直线变成了平行平面.如果在保持结论中有关线段长度不变的前提下,把异面直线转化成共面直线,并找出截割这两条直线的平行线,则问题便可得证.

证明 过点 A 作 DF 的平行线交 β, γ 于点 G, H , 则有 AC, AH 共面, $AG=DE, GH=EF$.

又平面 ACH 交 β 于 BG , 交 γ 于 CH ,

$$\therefore BG \parallel CH.$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GH}, \text{ 即 } \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$

说明 本题的证明中将 DF 平移到 AH , 旨在将异面问题转化到共面上来,从而可利用平面几何知识解决问题.立体问题平面化是解决立体几何问题的基本途径,应该熟练掌握这种数学思想.

例 3 在图 8-8 中,已知 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面外一点, A', B', C' 分别是 $\triangle PBC, \triangle PCA, \triangle PAB$ 的重心,

(1) 求证: 平面 $A'B'C' \parallel$ 平面 ABC ;

(2) 求: $S_{\triangle A'B'C'} : S_{\triangle ABC}$.

分析 要证两个平面平行,需要在一个平面内找两条相交直线且都平行于另一个平面.注意到 A', C'

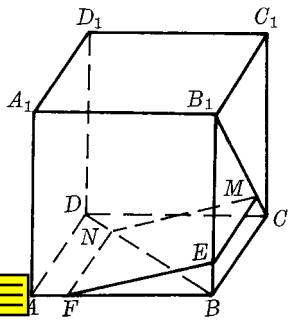


图 8-6

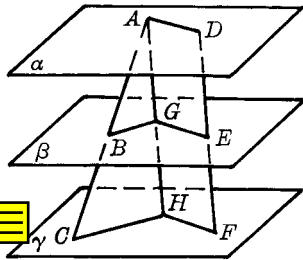


图 8-7

都是三角形的重心,连结 PC' 、 PA' 并延长分别交 AB 、 BC 于 C_1 、 A_1 ,则易证 $C'A' \parallel C_1A_1$,于是 $A'C' \parallel$ 平面 ABC ,同理可证明 $A'B' \parallel$ 平面 ABC .进而可得证平面 $A'B'C' \parallel$ 平面 ABC .

利用三角形相似的性质,可以得到 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比.

解 (1) 连结 PC' 、 PA' 并延长,分别交 AB 、 BC 于点 C_1 、 A_1 ,连结 A_1C_1 .

$\therefore C'$ 、 A' 分别是 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 的重心,

$$\therefore \frac{PC'}{C'C_1} = \frac{PA'}{A'A_1} = \frac{2}{1},$$

$\therefore A'C' \parallel A_1C_1$, 又 $A_1C_1 \subset$ 平面 ABC , $A'C' \not\subset$ 平面 ABC ,

$\therefore A'C' \parallel$ 平面 ABC .

同理可证 $B'C' \parallel$ 平面 ABC , 且 $B'C' \cap A'C' = C'$,

$\therefore$ 平面 $A'B'C' \parallel$ 平面 ABC .

(2) 设 PB' 的延长线交 AC 于点 B_1 , 连结 A_1B_1 、 C_1B_1 .

$\therefore \triangle PA'C' \sim \triangle PA_1C_1$,

$$\therefore \frac{A'C'}{A_1C_1} = \frac{PA'}{PA_1} = \frac{2}{3},$$

同理, 得 $\frac{A'B'}{A_1B_1} = \frac{2}{3}, \frac{B'C'}{B_1C_1} = \frac{2}{3}$.

$$\therefore \frac{A'C'}{A_1C_1} = \frac{A'B'}{A_1B_1} = \frac{B'C'}{B_1C_1},$$

$\therefore \triangle A'B'C' \sim \triangle A_1B_1C_1$,

$$\therefore S_{\triangle A'B'C'} : S_{\triangle A_1B_1C_1} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

又 $\therefore A_1$ 、 B_1 、 C_1 是 $\triangle ABC$ 各边中点, 则 $S_{\triangle A_1B_1C_1} : S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4}$,

$$\therefore S_{\triangle A'B'C'} : S_{\triangle ABC} = \frac{1}{9}.$$

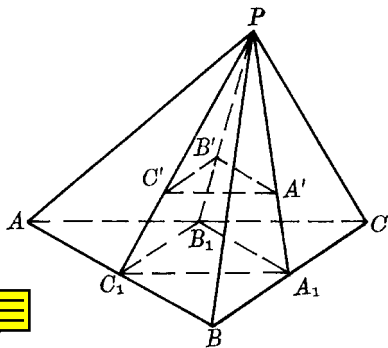


图 8-8



分层练习

基础型

一、填空题

1. $A \notin$ 直线 a , 过点 A 可以作 _____ 个平面与 a 平行, 点 $A \notin$ 平面 α , 过点 A 可以作 _____ 条直线与 α 平行.
2. 若平面外一条直线上有两点到这个平面距离相等, 则这条直线与该平面的位置关系是 _____.
3. 如果平面 P 和平面 Q 内的一条直线 CD 平行, 而平面 Q 也和平面 P 内的一条直线 AB 平行, 那么平面 P 与平面 Q 的位置关系是 _____.
4. 若 $a \subset \alpha$, 则“ $b \parallel a$ ”是“ $b \parallel \alpha$ ”成立的 _____ 条件.
5. 夹在两个平行平面之间的线段 AB 、 CD 相交于 K , $AK=3$, $BK=4$, $CD=14$, 且 A 、 C 在同一平面内, 则 CK 、 DK 分别等于 _____.
6. 如果直线 a 是经过一个三角形两边中点的直线, 平面 α 是经过这个三角形第三边的平

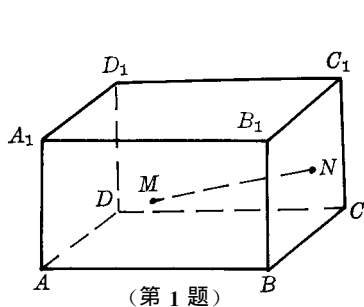
面,则 a 与 α 的位置关系是_____.

二、选择题

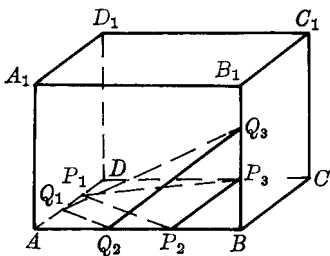
1. 直线 m 与平面 α 平行的充要条件是().
 (A) m 与 α 内一条直线平行 (B) m 与 α 内无数条直线平行
 (C) m 与 α 内所有直线平行 (D) m 与 α 无公共点
2. 已知直线 $a \perp$ 直线 $b, a \parallel$ 平面 β , 则下列结论正确的是().
 (A) $b \parallel \beta$ (B) $b \subset \beta$
 (C) $b \cap \beta = \emptyset$ (D) b 与 β 的关系不确定
3. 已知直线 $a \parallel$ 平面 α , 直线 $b \parallel$ 平面 β , 且 $\alpha \parallel \beta$, 则 b, a 的关系为().
 (A) 平行或相交 (B) 平行或异面
 (C) 相交或异面 (D) 平行、相交或异面
4. 平面 $\alpha \parallel$ 平面 β , 直线 $a \subset \alpha, P \in \beta$, 则 β 内过点 P 的直线中().
 (A) 不存在与 a 平行的直线 (B) 不一定存在与 a 平行的直线
 (C) 有且只有一条与 a 平行的直线 (D) 有无数条与 a 平行的直线

三、解答题

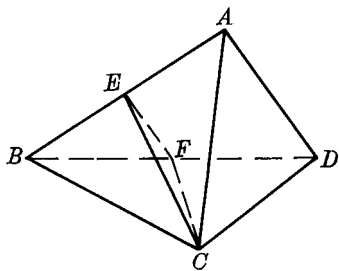
1. 如图,在长方体 AC_1 中,已知 M, N 分别是矩形 ABB_1A_1, BCC_1B_1 的中心,请猜测直线 MN 与平面 $ABCD$ 的位置,并加以证明.
2. 如图,在长方体 AC_1 中,已知 $P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3$ 分别为 DA, BA, BB_1 的三等分点,求证:平面 $P_1P_2P_3 \parallel$ 平面 $Q_1Q_2Q_3$.



(第1题)



(第2题)



(第3题)

3. 如图,已知四面体 $ABCD$ 的每一条边的长都为 a, E 是 AB 的中点, $AD \parallel$ 平面 CEF , 求截面 CEF 的面积.
4. 若 AB, BC, CD 是不共面的三条线段,点 E, F, G 分别是 AB, BC, CD 的中点, 求证:直线 $AC \parallel$ 平面 $EFG, BD \parallel$ 平面 EFG .

提高型

一、填空题

1. 经过两条平行线中的一条,可以作_____个平面与另一条直线平行.
2. 若夹在两个平行平面间的两条线段的长度相等,则两线段所在直线的位置关系为_____.
3. 已知直线 $a \parallel$ 平面 α, a 与 α 的距离是 d , 那么到平面 α 与到直线 a 的距离都等于 $\frac{2}{3}d$ 的点

的集合是_____.

- 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 经过其对角线 BD_1 的平面分别与棱 AA_1 、 CC_1 相交于 E 、 F 两点, 则四边形 $EBFD_1$ 的形状为_____.
- 平面 α 上不共线的三点到平面 β 的距离相等, 那么 α 与 β 的位置关系为_____.
- 若空间四边形 $ABCD$ 两对角线 $AC=4$, $BD=6$, 则平行于两对角线的截面四边形周长的取值范围是_____.

二、选择题

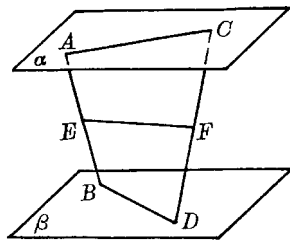
- 若三个不重合的平面, 能把空间分成 n 部分, 则 n 的所有可能的值为().
(A) 4, 6, 7 (B) 4, 5, 6, 8 (C) 4, 7, 8 (D) 4, 6, 7, 8
- a 是平面 α 外一条直线, 过 a 作平面 β , 使 $\beta \parallel \alpha$, 下列结论正确的是().
(A) 这样的 β 只可以作一个 (B) 这样的 β 至少可以作一个
(C) 这样的 β 不存在 (D) 这样的 β 至多可以作一个
- 有以下四个命题:
① 平行于同一平面的两直线必平行;
② 垂直于同一条直线的两个平面必平行;
③ 平行于同一平面的两个平面必平行;
④ 一个平面内有无数条直线平行于一个平面, 这两个平面必平行.
其中正确命题的个数为().

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

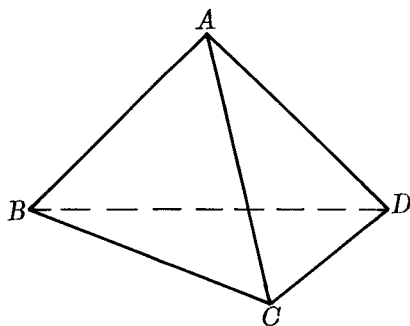
- 过两条异面直线外一点作平行于这两条异面直线的平面, 可以作().
(A) 1 个 (B) 无数个 (C) 0 个或 1 个 (D) 0 个

三、解答题

- 如图, 已知异面直线 AB 、 CD 分别与平行平面 α 、 β 相交于 A 、 B 和 C 、 D , E 、 F 分别是线段 AB 和 CD 的中点, 求证: $EF \parallel \alpha$.

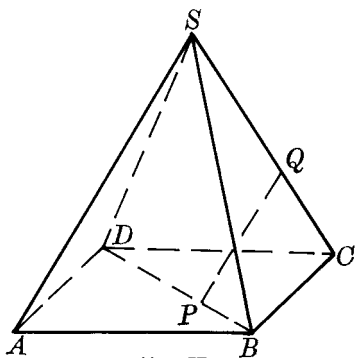


(第 1 题)

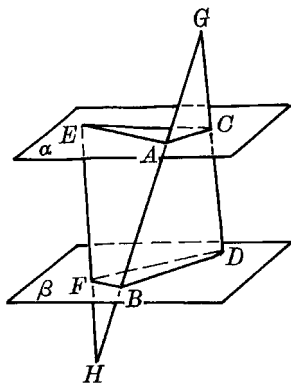


(第 2 题)

- 如图, 已知四面体 $ABCD$,
(1) 作一截面平行其相对两棱 AB 与 CD , 说明作图方法及依据;
(2) 试求截面在什么位置时, 该截面的面积最大, 并求当 $AB=4$, $CD=6$, 且 AB 、 CD 所成角为 60° 时最大截面的面积.
- 如图, 已知 $ABCD$ 是边长为 a 的正方形, $SA=SB=SC=SD=2a$, 点 P 、 Q 分别在 BD 和 SC 上, 且 $BP:PD=1:2$, $PQ \parallel$ 平面 SAD , 求线段 PQ 的长.



(第3题)



(第4题)

4. 如图, 已知平面 $\alpha \parallel$ 平面 β , 线段 GH, GD, HE 分别交 α, β 于 A, B, C, D, E, F , 若 $GA=9$, $AB=12, BH=16, \triangle AEC$ 的面积为 72, 求 $\triangle BFD$ 的面积.

三、直线与平面, 平面与平面的相交

学习目标

1. 掌握直线与平面、平面与平面垂直的概念和判定定理; 掌握三垂线定理及其逆定理; 会运用有关定理论证空间中的垂直问题; 掌握线线垂直、线面垂直、面面垂直的相互关系及作用.
2. 理解直线与平面所成角和二面角的概念, 会求直线与平面、平面与平面所成角的大小.
3. 理解点与平面、平行的直线和平面、两平行平面间的距离的概念, 能通过恰当的转化求解距离问题.

例题剖析

例 1 如图 8-9 所示, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $ABCD$ 为矩形, M, N 分别是 AB, PC 的中点, 求证: $AB \perp MN$.

分析 证明两直线垂直, 通常可以利用三垂线定理或线面垂直的性质来解决.

证明 连结 AC , 取其中点 O , 连结 NO , 则 $NO \parallel PA$, 又 $PA \perp$ 平面 $ABCD$,

$\therefore NO \perp$ 平面 $ABCD, \therefore OM$ 为 NM 在平面 $ABCD$ 内的射影, 而 $OM \parallel BC, AB \perp BC$,

$\therefore OM \perp AB, \therefore MN \perp AB$.

说明 在空间中, 直线与直线垂直、直线与平面垂直、平面与平面

垂直有着密切的关系. 在论证垂直问题时, 通常要进行多次转化. 对这三种垂直关系本质及其相互关系读者应要有一个透彻的理解, 这样才能熟练运用.

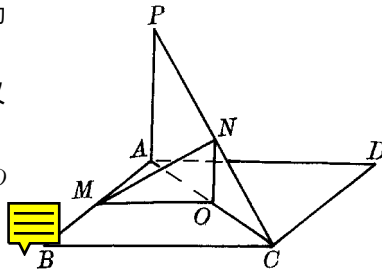


图 8-9

例 2 已知从点 O 出发的三条射线 Ox, Oy, Oz 不共面, A, B, C 分别在 Ox, Oy, Oz 上,

$OB \perp$ 平面 ABC , 二面角 $C-OA-B$ 为直二面角(图 8-10), 试确定 $\triangle ABC$ 的形状.

分析 确定三角形形状可以从三个角的关系或三条边的关系考虑. 题目中的已知条件容易让我们猜测三角形的边可能有垂直关系.

解法一 在平面 AOC 内过点 C 作 $CA' \perp OA$, 连结 $A'B$, 因平面 $AOC \perp$ 平面 ABO , 交线为 OA ,

$$\therefore A'C \perp \text{平面 } ABO,$$

$$\therefore \angle CA'B = 90^\circ.$$

又 $\because CA' \perp OB, CB \perp OB$,

$$\therefore OB \perp \text{平面 } CA'B.$$

又已知 $OB \perp$ 平面 ABC , 而过一点与一条直线垂直的平面有且只有一个,

$$\therefore \text{平面 } CA'B \text{ 与平面 } ABC \text{ 重合},$$

$$\therefore \angle CAB = \angle CA'B = 90^\circ,$$

故 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

解法二 $\because$ 平面 $AOC \perp$ 平面 AOB , 由 $OB \perp$ 平面 ABC , 可得平面 $ABC \perp$ 平面 AOB .

又平面 $AOC \cap$ 平面 $ABC = AC$,

$$\therefore AC \perp \text{平面 } AOB, \text{ 又 } AB \subset \text{平面 } AOB,$$

$$\therefore AC \perp AB,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 为直角三角形}.$$

说明 解法一中利用直二面角的平面角是直角, 构造了辅助平面 $CA'B$, 再用“过一点垂直于已知直线的平面有且只有一个”的结论证明该平面就是平面 ABC , 使结论获证. 解法二利用“两个相交平面如果都与第三个平面垂直, 那么它们的交线也与第三个平面垂直”很容易获得结论. 前一解法从二面角的平面角入手, 易想但论证繁些. 后一方法简单但需认真观察图中线面位置关系才可获得. 望读者在解题过程中注重从不同角度一题多解, 培养分析问题、解决问题的能力.

例 3 如图 8-11 所示, 若菱形 $ABCD$ 边长为 a , $\angle DAB = 60^\circ$, M 为 PA 的中点, $PC \perp$ 平面 $ABCD$, $PC = a$. 求: (1) PB 与平面 PAC 所成角的大小; (2) 二面角 $A-DM-B$ 及二面角 $P-AB-C$ 的大小; (3) 点 M 到平面 PBD 的距离.

解 (1) 连结 BD 交 AC 于点 O , 连结 OP .

$$\because PC \perp \text{平面 } ABCD, \therefore \text{平面 } PAC \perp \text{平面 } ABCD,$$

且平面 $PAC \cap$ 平面 $ABCD = AC$,

$$\therefore BD \perp AC \text{ 且 } BD \subset \text{平面 } ABCD,$$

$$\therefore BD \perp \text{平面 } PAC,$$

$$\therefore OP \text{ 为 } BP \text{ 在平面 } PAC \text{ 内的射影}, \angle BPO \text{ 为直线 } PB \text{ 与平面 } PAC \text{ 所成的角}.$$

$$\text{在 Rt}\triangle BOC \text{ 中}, BC = a, \angle BCO = 30^\circ, \therefore BO = \frac{1}{2}a, OC = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

$$\text{在 Rt}\triangle PCB \text{ 中}, BC = PC = a, \therefore PB = \sqrt{2}a.$$

$$\text{在 Rt}\triangle BOP \text{ 中}, \sin \angle BPO = \frac{OB}{BP} = \frac{\frac{1}{2}a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

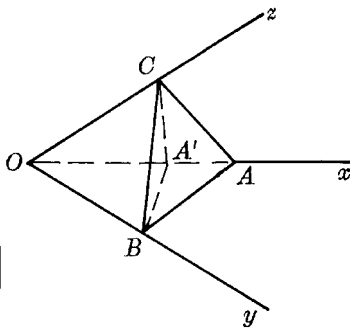


图 8-10

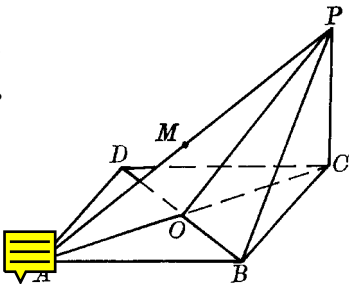


图 8-11