数学思维与方法

——研究式教学

（第 2 版）

陈鼎兴　著

东南大学出版社
·南京·

内 容 提 要

本书是一本研讨教与学两方面的书，通过丰富和详实的例子，力图阐明知识的发现过程和常用的科学思想方法. 本书所需的基础知识不超过工科大学一年级的数学知识，即使只有高中数学知识的读者也可以阅读本书一半的内容. 本书是正在大中学辛勤耕耘的老师，尤其是年青教员的益友；也是在大中学刻苦攻读的莘莘学子的良朋.

图书在版编目(CIP)数据

数学思维与方法：研究式教学/陈鼎兴著. —2 版.
南京：东南大学出版社，2008. 4
ISBN 978-7-5641-1166-3

Ⅰ. 数… Ⅱ. 陈… Ⅲ. ①数学教学—教学研究
②数学—思维方法 Ⅳ. O1

[JP2]中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第
038188 号[JP]

[HJ*5]

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼 2 号 邮编：210096)
出版人：江 汉
全国各地新华书店经销 溧阳晨明印刷有限公司印刷
开本：700mm×1000mm 1/16 印张：15.75 字数：309 千字
2008 年 4 月第 2 版 2008 年 4 月第 4 次印刷
ISBN 978-7-5641-1166-3/O·70
定价：25.00 元

(本社图书若有印装质量问题，请直接与读者服务部联系。电话(传真)：025—83792328)

目　录

1　研究式教学概述 …… (1)
2　研究式教学的实例 …… (8)
2.1　实例 1　绪论 …… (8)
2.2　实例 2　导数概念 …… (30)
2.3　实例 3　微分中值定理 …… (43)
2.4　实例 4　微积分基本定理 …… (59)
2.5　实例 5　幂级数 …… (69)
2.6　实例 6　跋——我们都是 Newton …… (88)
3　研究式教学实施要点 …… (98)
3.1　点题 …… (99)
3.2　统观全局 …… (102)
3.3　科学的洞察力：猜测 …… (106)
3.4　科学的敏感性 …… (111)
3.5　提高教学起点 …… (113)
3.6　实际性 …… (116)
3.7　趣味性 …… (122)
3.8　哲理性 …… (128)
4　浅谈科学思想方法 …… (132)
4.1　一切研究从最简状态开始 …… (132)
4.2　一个重要的思维模型：一般⇆特殊 …… (140)
4.3　必要条件法 …… (150)
4.4　发散性思维 …… (162)
4.5　本质论 …… (174)
4.6　RMI 方法 …… (182)
4.7　MM 方法 …… (189)
4.8　常用的数学方法 …… (198)

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

4.8.1 转换 …… (198)
4.8.2 化归 …… (201)
4.8.3 逼近 …… (204)
4.8.4 合情推理 …… (211)
4.8.5 对偶 …… (217)
4.8.6 不变量 …… (221)
4.8.7 数学的美 …… (224)
5 一次亲身的实践 …… (231)
参考书目 …… (245)

前　言

本书是讲教学的. 更确切地说，本书依托高等数学的教学舞台，探讨知识的研究和发现的过程和方法. 全书洋溢着浓郁的研究气氛.

“教学”的本意包含教与学两个方面. 但不知从何时开始，“教学”仿佛只意味着教书. 这也许因为传统的教学太偏重于知识的传授，学生只是知识的被动接受者，从而窒息了他们在教学中的主动性和积极性. 本书力图恢复“教学”的本意. 不知道学生想学什么的教学一定不是一种好的教学.

本书共分 5 章. 前 3 章侧重于“教”，是以工科院校本科高等数学教学为载体，阐述了作者所倡导的一种教学风格，或说教学方法——研究式教学. 第 1 章是概述，简要阐述了研究式教学的内涵；第 2 章是实例，即通过高等数学 6 堂课的实例，展现研究式教学的全貌；第 3 章是实施要点，总结了研究式教学实施过程中的八大要点. 后 2 章侧重于“学”，介绍了在教学和研究中常用的一些科学思想方法. 第 4 章是方法，通过大量详实的例子阐述了各种常用的科学思想方法（包括常用的数学方法）；第 5 章是实践，借助于一个“求内接于椭圆的周长最大的三角形”的例子，展现了研究问题的一个全过程及各种科学思想方法的综合应用.

本书的宗旨是阐明知识的研究和发现过程以及有关的科学思想方法，在选材和举例上力求通俗，贴近教学、贴近学生、贴近实际，只要具备大学一年级的数学知识就可以通读全书；即使只有高中数学知识，也可以读懂其中的一半内容. 全书的题材局限于高等数学教学的小天地，因此阐述的数学思维的深度和广度都是极其有限的. 然而，在本书中无论是评教还是论学，都力图展示发现知识的数学思维过程和数学方法的升华，故用“数学思维与方法”作为书名，有不当之处敬请读者批评指正. 然而，作者认为：就培养创新型人才而言，其理应该是相通的. 作者的最大心愿是能给阅读本书的每一位读者在创新精神和科学思想方法方面有一些启迪.

本书在 2001 年出了第 1 版，深受读者欢迎. 这次再版，除对原书中的错误之处进行订正之外，在第 2 章增加了两个实例，在第 3 章和第 4 章又增添了很多例题和附录，这使得本书的内容更加丰满，说理更加有据.

本书承北京大学数学科学学院张顺燕教授和东南大学应用数学系管平教授的精心审阅，提出了许多宝贵意见并多处修改了原稿中的疏漏和错误. 在此，向张教授和管教授致以深深的敬意和由衷的感谢.

作　者

2008 年 3 月

1　研究式教学概述

在当前的教育界有一个中心议题：如何在教育中培养具有创新精神和创新能力的一代新人，造就一批站在世界科学技术前沿的学术带头人和尖子人才.

人才的培养是一个长期的系统工程，需要一代又一代人的不懈努力，可谓“十年树木，百年树人”. 培养创新型人才应该贯彻到教育的全过程，无论是初、中等教育，还是高等教育；也无论是基础教育，还是专业教育，都概莫能外. 只有在全社会造成一种氛围，造成一种土壤，才能使拔尖的创新型人才脱颖而出. 当然，在高等教育中，培养创新型人才显得格外瞩目和义不容辞，因为高等学府本来就肩负着培养高层次、高素质人才的使命. 而在高等学府中求学的青年学子，恰同学少年，风华正茂，他们正处在最具活力、最有热情、最少保守思想的黄金时期，也是他们的世界观逐渐形成和逐渐走向成熟的重要时期.

众所周知，每门学科都有它特定的研究范畴和研究对象，在教学上形成了该学科的知识点. 这也是全部教学活动的载体，没有知识点的教学是不存在的. 而且，一个人的创新能力往往与他所掌握的知识量密切相关. Engels(恩格斯，1820—1895)曾在《自然辩证法》一书中写道：“那时差不多没有一个著名人物不曾做过长途旅行，不会讲四五种语言，不在许多部门放射光芒.”因此，有人认为：在传授知识的同时，也就在增长能力，也就在提高人的素质. 这当然是有道理的. 因为，知识与能力、素质具有同一性；但是，还应该看到另一方面，即知识与能力、素质具有对立性. 单纯的知识传授式的教学，也就是“教师只要能将知识传授给学生，便是尽了教师之职责；学生只要能将知识记住，就算是学习的成功”，这样的教学模式即使在过去也受到许多著名的有识之士的非议和批评. 比如 20 世纪最杰出的物理学家，Nobel 物理学奖获得者 Einstein(爱因斯坦，1879—1955)就批评道：“知识是死的，学校却要为活人服务.”他在《自述》一文中写道：“人们为了考试，不论愿意与否，都得把所有这些废物统统塞进自己的脑袋. 这样强制的结果使我如此畏缩不前，以至我在通过最后的考试以后，整整一年对科学问题的任何思考都感到扫兴.”更何况到了今天的信息时代，知识的爆炸、知识更新的加速等都是不争的事实，那种单纯的知识传授式的传统教学方法，学生称之为“照本宣科”，越来越不受学生的欢迎. 更为甚者，这样的教学必然挫伤学生学习的积极性，使得学生的学习兴趣普遍下降. 学生只为考试而学，老师也只为考试而教，形成了各种应试教育，正可谓：考考考，老师的法宝；分分分，学生的命根. 这是值得每个教育工作者和教育管理工作者深思的严峻事实.

那么,学生究竟要学什么?他们的学习兴趣在哪里?为此,我广泛地调查和征询学生的意见,除去他们渴望要求拓宽知识面外,还有如下三条意见:

1)为什么要学这些知识?

2)学了这些知识后有什么用处?

3)如果遇到问题后,老师您是怎么想的?

这些问题实质上反映了学生不满足于"是什么"的知识型的学习,而要探究"为什么"的能力型的学习.要讲明白"是什么"并不困难,教材也写得一清二楚;而要讲清楚"为什么"却不是那么容易的,其中第三个问题尤其值得我们深思.提出这个问题的学生常常是一些比较优秀的,甚至是略微调皮的学生(比如参加数学建模集训的学生),这个学生群体是值得我们在教学中格外关注的.他们的学习态度比较积极,思想比较活跃,又比较富有独立进取精神(因此,往往不循规蹈矩,容易被我们所忽视).他们渴望从老师那里学到思维,学到方法,学到能力,用一句话来讲:他们希望看到"老师的风采".这个群体具有较大的发展潜力和发展空间.

改革传统的单纯知识传授型教学模式是当前教学改革的一个重要的方向,强调素质教育,提倡创新精神就是一个关键.然而,目前的素质教育的主要思路还是增加选修课、开辟第二课堂、组织课外兴趣小组等等.而作为当前教育的主战场的第一课堂的教学如何贯彻素质教育的宗旨呢?从总体上讲,理论的探讨多于实际的操作.因此,绝大多数的第一课堂的教学仍然在传统的知识传授型的模式中进行,不免使人感到素质教育有脱离教学主战场之嫌.甚至有人认为,现在的教学有滑坡的趋势.由此可见,习惯势力是非常顽固的,课堂教学,即教学方法的改革是很困难的,甚至可以说:教学方法的改革是当前教学改革的攻坚战.

我在教学岗位上已有 30 余年了,从事高校数学教学亦已有 20 个年头了.在长期的教学实践中,逐渐形成了我特有的教学风格,或说教学方法,我称之为"研究式教学".我的研究式教学有它独特的内涵:将我所讲授的知识当作一个研究课题,在教学中着重讲授以下两件事:

1)发现知识的原始过程;

2)发现该知识时所用的科学思想方法.

这个教学方法仍然以老师的讲授为主(更适合于低年级学生),但讲授的内容已经发生了实质性的变化:从单纯的知识传授改变成熔知识、能力、素质于一炉,仿佛引领学生参加了研究和发现的全过程,使学生在学习中得到熏陶和提高.

下面,由我来分别加以阐述.

每个人的自身都蕴藏有创新的潜能,这是因为创造新事物的能动作用是人的基本特性之一,也是人与动物的基本区别之一.培养学生创新精神,实际上就是在传授知识的同时努力激活这种创新的潜能,激发他们的创新欲望,提高他们的创新能力,燃烧起他们的创新激情.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

创新能力的提高是需要学习的.那么,谁是他们最好的老师呢?我认为:古今中外的千百位科学大师才是他们最好的老师.在人类的文化遗产中,最为弥足珍贵的就是这些科学大师们的足迹——他们创造和发现知识的过程.这是极富创造性和启发性的,是人类文化宝库中的极品.请看微积分的创立过程吧!

在古代,Aristotle(亚里士多德,公元前384—公元前322)学派认为:宇宙是上帝创造的,地球是宇宙的中心,静止是最自然的状态.一切物体都有趋于中心及归于自然的趋向,这是上帝赋予宇宙万物的最显著的属性.所以,成熟的苹果会从树枝上落到地面,这是趋于中心之使然;而一切运动如果"不受力"的作用,终究会停下来,这是归于静止(最自然的状态)之必然.这个宇宙观统治了人们长达两千多年之久.

天才的物理学家Newton(牛顿,1642—1727)在前人研究的基础上向这个旧宇宙观发起了总攻击.虽然一切实验都表明运动物体在"不受力"的作用下都归于静止,但是,人们也观察到同一运动物体在光滑表面上比在粗糙表面上运动的距离要远得多.由此可见,运动物体归于静止并不是因为"上帝害怕运动,静止是最自然的状态"等等原因,而是因为运动物体表面间的作用,也即我们现在称为"摩擦力"作用的缘故.这个自然现象在当时已经为许多人所发现,并进行讨论和研究,但Newton技高一筹,他展开了他的"思维实验":如果一个运动物体在一个阻力愈来愈小的环境中运动,则它在静止前必然愈走愈远;而一旦"完全没有了阻力",那么,它必然保持原来的运动状态一直运动下去.这就是著名的Newton第一运动定律:

> 任何一个物体保持静止的或匀速直线运动的状态,除非物体受力的作用被迫改变这种状态.
>
> ——Newton

进一步,虽然运动物体的速度不是由力产生的,然而阻力确实可以使运动物体静止下来.由此事实,Newton敏锐地发现了以他的名字命名的第二运动定律,用公式表示为

$$F=ma$$

即力产生了加速度(速度的改变).

至此,Newton已经作出了伟大的发现.但是,才华横溢的Newton并没有停止前进的步伐.怎样来证实自己的发现呢?Newton将他深邃的目光投向了浩瀚的天空.Newton摒弃了传统的观念:"天上是上帝与众神仙居住的地方,他们不遵循

地面上的规律.”Newton 坚信上帝是按统一的、简洁的、和谐的数学法则创造宇宙的,即他坚信星际的运行也遵循他的运动定律.那么,他面临两大问题:(1) 作用于星际的力 F 是什么?(2) 什么是变速曲线运动的加速度 a?为了回答第一个问题,他发现了万有引力定律;为了回答第二个问题,他创立了微积分.Newton 借助于微积分的数学工具,更准确、更深刻、更完整地揭示了天体运动的规律;同时,Newton 也证明了他的运动定律与万有引力定律的正确性,以及证明了被封建教会迫害长达两百多年的 Copernicus(哥白尼,1473—1543)的日心说的正确性.这是 Newton 力学的伟大胜利,也是微积分的巨大成功.

在 Newton 的墓志铭上写有这样的句子:

> 自然与自然定律都隐藏在茫茫黑夜中,上帝说:“让 Newton 出世吧!”于是一切都豁然开朗.

Newton 成为千古传诵的伟人!

多么精彩的发现过程!它充满激情和哲理,给人以无限的想象空间和启迪.但是在传统的教学中,常常只把科学大师们所创造的成果即知识传授给学生,而他们创造和发现知识的过程却被湮没了.这是非常遗憾的,也是一种不完全的教学.因此,研究式教学主张追踪科学大师们的足迹,遵循他们的思维脉络,发掘他们发现知识的原始过程,并且在今天的水准上展现出来(注意:不是简单的重复,也不是讲述科学发展史).这样的教学具有示范和潜移默化的功效,对于激发学生的创新热情和提高学生的创新能力有十分重要的影响,甚至会影响他们的一生.

研究与创新是需要掌握一定的科学思想方法的.历史表明:科学上的重大发现和理论上的重大飞跃往往伴随着科学思想方法上的重大突破.然而,传统的教学太侧重于知识的传授,而常常忽视了科学思想方法上的提高和升华.这也是一种不完全的教学,正可谓:拣了芝麻,丢了西瓜.下面我们来举两个简单的例子.

例 1.1 计算 $X = 3.14 \times 2.58$.

解 两边取(常用)对数,得

$$\lg X = \lg 3.14 + \lg 2.58 \xlongequal{\text{查对数表}} 0.496\,9 + 0.411\,6 = 0.908\,5,$$

查反对数表,得

$$X = 8.100\,3.$$

这是中学数学教学中利用对数进行计算的例题,现在有了袖珍计算器,只需轻轻一按,结果就跃然眼前,无论速度与精度都大大提高了.对数表、计算尺等计算工

具都已经成为历史的文物，然而它所蕴涵的数学思想方法却永远熠熠生辉，就是著名的“关系—映射—反演”方法（简称 RMI 方法）. 它的示意框图如图 1.1 所示：

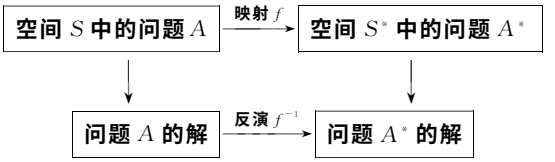


图 1.1　RMI 方法

这个方法在众多的领域里有广泛的应用，如微分方程中的 Laplace（拉普拉斯，1749—1827）变换、离散数学中的母函数等等. 由于电子计算机的迅猛发展，今天我们步入了数字化时代，按其本质来讲，数字化也是“关系—映射—反演”的例子，如电子计算机的 ASCII 码就是字符与整数之间的一个“关系—映射—反演”.

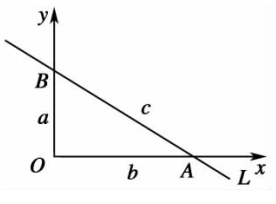
在传统的教学中，只讲知识（如何用对数进行计算），而缺乏高层次的科学思想方法（如 RMI 方法）上的升华，这不能不认为是一种缺憾. 这种科学思想方法上的熏陶应该在中小学教学中就开始，如以上的对数计算就是一个很好的例子.

例 1.2　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是两两互相垂直的（非零）矢量，则

$$|(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})|^2=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|^2+|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|^2. \tag{1.1}$$

这是一道矢量代数的练习题，它的证明并不困难，这里就从略了，请读者自行补出.

这道题似乎平平淡淡，毫不起眼，它也有什么深刻的含义吗？如果你看了以下的类比（见图 1.2），也许会别有一番滋味在心头.

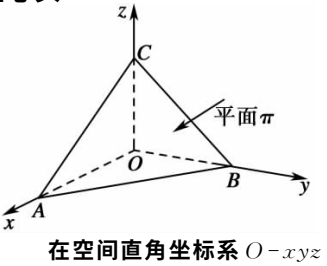


在平面直角坐标系 xOy 中，直线 L 在 2 条坐标轴之间得 3 个截距：

$$a,b,c,$$

则有

$$c^2=a^2+b^2.$$



在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，平面 π 在 3 个坐标面之间得 4 个“截距”：

$$\triangle OAB,\triangle OBC,\triangle OCA,\triangle ABC,$$

则有

$$S^2_{\triangle ABC}=S^2_{\triangle OAB}+S^2_{\triangle OBC}+S^2_{\triangle OCA}. \tag{1.2}$$

图 1.2　三维空间的勾股定理

左边是大名鼎鼎的勾股定理，通过类比，式（1.2）就是勾股定理在三维空间的有趣推广. 简直是画龙点睛的神来之笔，由这么一点，将一道普普通通的题点活了. 它给人的启示远远大于原题给人的启示. 如果我们要求学生将勾股定理推广到三

维空间，有谁会想到这个结果呢？（一般会想到：长方体的对角线的平方＝三边平方之和．但这是一个平凡的推广）更为重要的是，联想、类比、归纳及推广等等，这些科学思想方法的学习与实践正是学生学习研究和创新的必由之路．

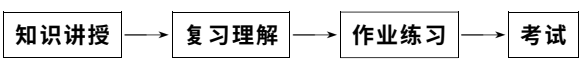
知识与科学思想方法可以比喻成“鱼和渔”．古人云：“授之以鱼，不如授之以渔．”这句至理名言道出了科学思想方法的重要性．日本的数学教育家米山国藏说：“我搞了多年的数学教育，发现学生在初中、高中等接受的数学知识，因毕业进入社会后几乎没有什么机会应用，所以通常在出校门后不到一两年很快就忘掉了．然而，不管他们从事什么业务工作，惟有深深地铭刻于头脑中的数学精神，数学的思维方法、研究方法、推理方法和着眼点（若培养了这方面的素质的话），却随时随地发生作用，使他们受益终生．”所以，他认为：“无论是对于科学工作者、技术人员，还是数学工作者，最重要的就是数学的精神、思想和方法，而数学知识只是第二位的．”这一段话很值得我们深思．

在 1999 年我与大学新生的一次座谈会上有如下一段对话：

学生　中学老师曾教我们如下的学习方法：遇到问题先进行分类，然后联系并搜索有关知识，最后得到问题的解答．这个方法可行吗？

回答　电子计算机的功能是什么？① 存储信息；② 按预定的程序检索．你不就被造就成了一台计算机，通过上课输入知识，再通过大量的练习、测验及考试（摸底考、阶段考、模拟考、统考等）输入检索程序．那么，人的创新精神到哪里去了？

这段对话真实地反映了传统教学中的弊病，即把知识当成教条，把知识的应用当成机械的模仿行为．有人把这样的教学归结为八个大字：“死记硬背，勤学苦练．”在学生中，也常常自嘲为“考试机器”．长此以往，只能窒息了他们的创新精神和创新欲望．该到下决心的时候了，要把学生从



的狭小的天地中解放出来．

以平面几何作图为例，比较两种教学思路也许是有用处的．一种思路是总结各种作图的方法和技巧，诸如：

奠基法　　平移法　　旋转法　　翻折法

轨迹法　　相似法　　计算法　　逆序法

等等；然后，辅以大量的练习，以期融会贯通．传统的教学就是这样一个思路．我在少年时期就是这样学习的，能做出这样的总结已经是非常敬业的老师和很优秀的学生们携手共创的业绩了．然而，这实在是“死记硬背，勤学苦练”的一个典范了．由此培养的学生少了一点独立性，少了一点创新精神，少了一点叱咤风云的气魄．

另一种思路，如科学大师 Descartes（笛卡儿，1596—1650）所做的，他不拘泥于个别问题的讨论，而是从一般的方法论出发，提出了如下三个发人深省的问题：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

1）尺、规的功能是什么？

2）几何作图的本质是什么？

3）几何作图有解的充分必要条件是什么？

由此，从根本上解决了几何作图的问题. 弹指间，将困扰人们长达两千多年之久的几何作图古典三大难题化解在无形之中，而且开创了解析几何的新领域（请参阅第 2.1 节）. Descartes 成了近代数学的创始人之一.

平心而论，这两种教学思路都是需要的. 前者精雕细刻，仿佛生产一个工艺品；后者气势恢弘，往往开辟一个新天地. 然而，传统的教学太钟情于第一种教学思路，而对于第二种教学思路却很少涉猎，这对于培养高层次的创新型人才是极为不利的.

教育改革的关键在于思想观念的转变. 整体的创新精神和大批的创新型人才的涌现是关系到国家和民族盛衰的大问题，倘若我们现在还掉以轻心，将会犯历史性的、不可逆转的错误，这应该成为我们思考教育问题的共同出发点. 那种片面强调知识传授，推行保姆式教学，既背离了培养创新型人才的大方向，也低估了学生中蕴藏的学习和创新意识的积极性. 在这里我想再次强调一下：每个人（无论是“好学生”，还是“差学生”）的自身都蕴藏着创新的潜能，需要我们精心地培养和发掘. 我多年的教学实践证明：学生欢迎这样的教学改革，因为他们从中可以学到分析和研究问题的能力，得到研究和发现的乐趣.

全国的教育工作者们：这是历史给予我们的使命，可谓“责无旁贷，任重道远”.

2　研究式教学的实例

研究式教学具体是怎样实施的？这是很多人关心的问题. 今选 6 堂课的教学实例来阐明它的实施过程，这 6 堂课选自工科大学本科一年级的主干课程高等数学的教学实践，所用的教材是同济大学数学教研室主编的《高等数学》(第 4 版).

在教案中，用虚线框标示的内容是课堂上板书的内容，其中的数码标号是指板书的时机(即讲到该处时显示板书). 为了便于做成多媒体教学软件，我将板书的内容做了分屏处理，如果有多媒体教室将会收到更好的效果. 有关软件也可以在网上运行，供学生自学和复习之用.

文中的评注栏是关于研究式教学的注释，供参考之用.

2.1　实例 1　绪论

第 1 屏

同学们好！今天我们上高等数学的第一次课，一次轻松愉快的课. ❶

❶ 绪　　论

如果我们把学习一门课当作在科学的殿堂里的一次遨游，那么，“绪论”就是一个总导游. 一次好的绪论课对该门课程的学习有提纲挈领的作用.

高等数学的绪论课将从以下三个方面展开：❷

❷ 一、高等数学发展简史

我们将从数学发展史上来考察微积分的形成及其历史地位. ❸

❸ 二、微积分的基本思想和方法

我们将从微积分所研究问题的内在矛盾运动上来阐明它的基本思想和方法. ❹

❹ 三、学什么？怎么学？

我们将从一般的数学学习的目的、意义和方法上给大家提些

评　注

点题：开门见山.

高等数学教学的全局观.

忠告和建议.

评　注

第 2 屏

❶ 一、高等数学发展简史

众所周知,经典数学的研究对象是现实世界中的数量关系和空间形式. 在自然界中,到处都渗透着数学的思想和法则. 如果扔一块肉骨头给狗,❷

❷

图 2.1　狗与肉骨头

狗一定沿直线奔过来,而不会走一条弯曲的路线,因为狗“懂得”:两点之间线段最短;蜂巢是正六角形的图案,❸

❸

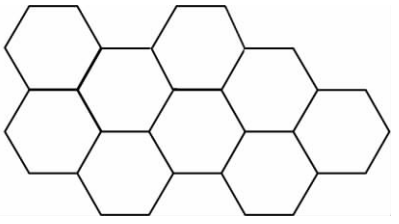
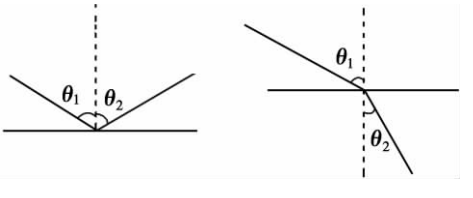


图 2.2　蜂巢

因为蜜蜂“懂得”:用最省的建筑材料(蜂蜡)营造最大的居住空间. 这是有生命的物体,对无生命的物体仍然处处透出数学的法则. 光线的反射和折射,❹

❹



光线反射定理　　光线折射定律

$\theta_1 = \theta_2$　　$\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \dfrac{v_1}{v_2}$

图 2.3　光线的反射与折射

数学一直被误解为冰冷的逻辑推理和符号运算,殊不知它居然离我们这么近、这么可亲可爱. 这才是真正的数学. 在冰冷的外表下有一颗火热的济世的心脏,这就是数学的魅力.

正是由于光线走了一条“最速线”(即费时最小的路线);而两端固定的一条软绳,它必然呈“悬链线”的形状,这是因为只有这样它的重心位置才最低(即它的总位能才最小). ❺

评　注

❺

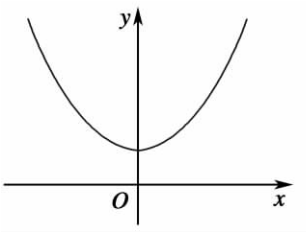


图 2.4　软绳呈悬链线

多么奇妙的自然界!无怪乎古希腊的学者们认为世界是上帝按照数学的法则创造的,数学的规律是宇宙格局的精髓,数学是开启宇宙奥秘之门的金钥匙,数学家是能听懂上帝声音并能与上帝对话的人.

我们是无神论者,这里可将“上帝”解读成“自然界”,这些见地仍然是很精辟的.

数学是人类科学发展史上最古老、最悠久的学科之一. 在古希腊时代(大约公元前 5 世纪—公元前 3 世纪)数学就成为一门独立的、理性的学科发展起来了. 它的最杰出的代表作是 Euclid(欧几里得,约公元前 300 年)的《几何原本》,至今已有两千多年的历史了.

第 3 屏

从那时起到 17 世纪,我们称它为❶

❶ 初等数学时期(公元前 3 世纪—17 世纪)

又称为常量数学时期. 这是一个漫长的时期,这个时期的数学的主要研究对象是❷

❷
匀速地运动(速度不变);
匀加速地运动(速度均匀变化);
直边图形(不弯曲);
圆弧边图形(均匀弯曲);
有限次的四则运算;
等等.

根据研究对象的不同，数学形成两大分支：❸

❸ 几何学：研究空间形式；
代数学：研究数量关系.

在那个时期，这两个数学分支基本上是独立地、平行地发展着（只有在个别地方，如解斜三角形中，才有几何与代数的结合）. 那个时期的数学发展很缓慢，这又恰恰与当时的奴隶制和封建制的不发达的社会生产力的需求相适应. 尽管那时也有一些杰出的数学家已经具有近代数学极限的思想的萌芽，如古希腊的学者 Archimedes（阿基米得，公元前 287—公元前 212）递缩等比级数成功地算出了由抛物线围成图形的面积 S. ❹

❹

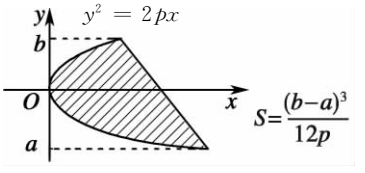


图 2.5　抛物线围成的面积

我国南北朝时期的学者祖冲之（429—500）利用割圆术求出了圆周率的近似值❺

❺ $\pi \in (3.141\,592\,6, 3.141\,592\,7)$.

但是，他们都不能摆脱时代的局限，没有也不可能创造出新的数学体系.

初等数学的内容已经在小学、初中和高中阶段的数学课程中学过了，在 12 年的数学学习中，你们迈过了人类两千多年创造的知识. 这是多么伟大的步伐！

第 4 屏

随着人类社会的进步和发展，资本主义社会相继在西欧、北美建立起来. 一方面，资本主义的发展伴随着残酷的掠夺和血腥的殖民制度，资本主义是建立在全世界千千万万劳动群众的白骨堆上的，这是千真万确的事实；另一方面，资本主义顺应了历史发展的潮流，它比封建主义更进步. 资本主义极大地促进了社会生产力的解放和发展. ❶

评　注

评　注

❶ 资产阶级在它不到一百年的阶级统治中所创造的生产力，比过去一切时代创造的全部生产力还要多、还要大.

——《共产党宣言》

毫无疑问，生产力的发展必然促进科学技术的进步. 由于资本主义向外扩张的需要，造船、航海、采矿、修筑运河和铁路等蓬勃发展起来. 这就迫切需要一种崭新的数学工具，用它来描述正在变化的物体的运动规律. 这个数学工具❷

❷ 微积分

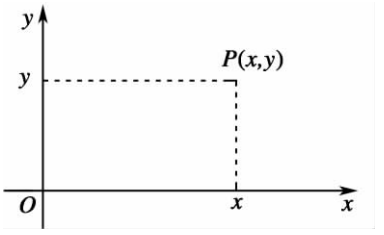
正是在这样的历史条件下应运而生.

数学的发展史，其他一切科学的发展史，乃至一百万年以来人类的发展史，都雄辩地证明了辩证唯物主义是颠扑不破的真理. 那种认为数学的发展仅仅依靠逻辑推理，仅仅是少数天才人物头脑中的产物，而这些天才人物的出现又纯属偶然，与社会的发展及实践无关的观点，显然是错误的.

研究式教学的哲理性. 数学与哲学的亲密联姻.

近代数学的第一个创始人大约要算法国的数学家、哲学家 Descartes，一个被 Newton 称为巨人的人. 他引进了直角坐标系，创立了解析几何学. 解析几何的有关内容已经在高中的数学课程中学习过了，这里就平面解析几何作一个简单的回顾. 在平面上取两条互相垂直的数轴组成一个平面直角坐标系. 直角坐标系的伟大功绩在哪里？它实现了两个一一对应：第一个一一对应是平面上的每一点 P（几何基本元素）与一对有序实数 (x,y)（代数基本元素）之间的一一对应. 这个一一对应还属于静态的一一对应. ❸

❸



$P\leftrightarrow(x,y)$

点↔坐标

图 2.6　静态的一一对应

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com