数学课创新教学实验设计与探索

教学实验与能力培养（四）

王拥军 编著

目　　录

“发展数学思想，提高数学素养”研究报告

自《九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲》明确提出数学思想方法是数学基础知识的重要组成部分以来，数学教学中如何有效地培养和发展学生的数学思想方法已经成为数学教育工作者普遍关注和潜心探索的一项重要课题。但是，就目前的初中数学教学实际来看，课堂教学中发展学生的数学思想还远没有落到实处，数学教学旨在提高人的数学素养仍停留在口头上。相反，课堂教学中单纯应试教学的力度还在增强，表现为：重视知识结论教学，轻视知识发生过程教学；重视知识达标评价，忽视数学思想形成评价；重视数学教育的技术功能，忽视数学教育的文化功能；重视眼前利益，忽视长远效果。所有这些都是制约素质教育进入数学课堂教学主阵地的重要因素。毋庸讳言，学生数学思想的形成和发展比数学知识的增长和积累需要更长的时间，花费更大的精力。数学思想的教学目标及其评价较难把握，教学实践中教师不易操作。因而，造成数学思想教学的理论研究与教学实际相脱节。为了能使这种“脱节”现象有所改观，真正落实数学素质教育精神，我们在1993年初就开始酝酿，数学教学中如何有效地进行数学思想方法教学。提出了“发展学生数学思想，提高学生数学素养”教学实验研究课题(简称为“MA”课题，“MA”是 Mathematical Accomplishment 的缩写)。

一、有关概念的界定及其关系

(一)数学思想

所谓数学思想是指现实世界的空间形式和数量关系反映在人的意识中经过思维活动而产生的结果。它是对数学知识和方法的本质认识,是对数学规律的理性认识。值得注意的是,数学思想与数学方法既有联系又有区别,数学思想是数学方法的理论基础和精神实质。数学方法是指人们解决数学问题的步骤、程序和格式，是实施有关数学思想的技术手段。数学思想具有概括性和普遍性,数学方法具有操作性和具体性，思想比方法在抽象程度上处于更高的层次。能否有意识地运用数学思想和方法处理数学问题甚至现实问题，是衡量一个人数学素养水平的重要标志。

(二)数学素养

《九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲》指出:"使学生受到必要的数学教育,具有一定的数学素养,对于提高全民族素质，为培养社会主义建设人才奠定基础是十分必要的。"基于上述观点，我们认为：数学素养是指以人的先天生理特点为基础，在后天的环境和数学教育影响下形成并发展的心理方面的稳定属性,它包括：数学意识即能用数学的观念和态度去观察、解释和表示事物的数量关系、空间形式和数据信息；数学语言即能初步运用数学这一人际交流不可缺少的工具进行简捷、准确地表达思维；问题解决即不仅具有一般解决数学问题的能力，而且能运用数学思维方式去处理现实问题；思维品质即具有一定的数学思维能力，形成良好的思维习惯和方法，并发展忠诚、坚定、自信、严谨求实的精神品格等。

(三)数学思想、数学思维能力、数学素养三者之间的关系

数学思想是人们对数学知识和方法形成的规律性的理性认识、基本看法。这些看法和认识是通过思维活动对数学对象所作出的概括反映，它是数学思维活动的产物。另一方面，数学思想还是思维活动的基础，它对思维活动有很大影响。数学思维过程受到思想的指导、监控和制约，并能影响思维的效率。具体表现为：一是数学思维能力通过数学思想作为中介来指导数学思维活动。较高层次的运算能力的形成是要能够善于依据问题的条件寻求合理、简捷、准确的运算途径，而这运算途径的选择必须依赖于化归思想来导向，掌握“换元、配方、待定系数”等数学方法。同样，逻辑思维能力和空间想象能力也必须借助于抽象概括、类比猜想、归纳、演绎等数学思想方法去指导思维活动，才能有效发展。二是数学思想的发展有助于知识转化为能力。数学思想是数学知识、方法的精髓。它能将零散的数学知识“吸附”起来，使知识结构得到优化，认识结构迅速构建，进而提高数学能力。例如，学生通过某个具体数学问题的求解，掌握了设参数求解的方法，若他能借用这个方法处理同类问题,则说明他已有知识向能力转化的趋势。若他能进一步认识到，设参数之所以能解决许多问题，是因为参数在解题中起着桥梁或纽带作用，从而获得了“抓中介”这种一般性的整体转化的思想，形成了知识广泛迁移的基础，标志着能力的形成和增长。

数学思想是数学素养的重要组成部分。数学深刻的智力价值、应用价值和文化价值皆寓于数学知识和数学思想方法之中。所以，发展数学思想不仅能开发学生的智力、培养学生的能力(如前所述)，而且对提高学生的精神境界和科学文化素养有着巨大作用。例如，发展学

生的化归思想，不仅能使学生懂得和掌握化归的意义和方法，而且在此基础上形成优化意识。这种优化意识是未来信息社会每位合格公民所必备的重要素养之一。像少花钱多办事，少投入、多收益，各种经济运行方案的优化设计等都是优化意识的再现。而要实现最优化目标，还必须具备较好的自觉性、坚持性、忍耐性等意志品质。可见，发展数学思想的教学过程本身也是提高学生数学素养的重要途径，况且学生数学思想的形成将使其尽早受益、终身受益。

二、理论假说及其依据

我们认为,数学课堂教学若能在传授知识的过程中，有计划、有目的、科学地渗透数学思想方法，发展学生的数学能力，就能极大地提高数学教学质量，全面提高学生的数学素养。

其理论依据主要有两点。第一，数学思想既抽象又朴素，它具有普遍适用性和共有性。尽管青少年学生还不具备完整的、清晰的、系统的数学思想，但他们或多或少都有某种“数学思想”的认识或体验，比如分类意识类比、化归、整体思想等都可以在生活中找到许多具体生动的体现。当然，这些认识或体验是不自觉的、肤浅的、朦胧的。但是，它又确确实实存在于学生的思维之中。此外，学生每天接触的数学教材中，存在着大量的可供抽象、概括的具体素材，并且经抽象概括后又有广泛的应用领域。如教材中的定理、公式等都是某种(些)数学思想的具体体现的结果。因而，学生接受数学思想是基于主客观两方面的前提条件，是有一定基础的。另一方面，数学中的思想也是人们长期思维活动的产物和结晶，它又具有社会共有性。《九年义务教育全日制初级

中学数学教学大纲》明确指出：“初中数学中的基础知识包括初中代数、几何中的概念、法则、性质、公式、公理、定理等，以及由其内容所反映出来的数学思想和方法。“即把数学思想和方法视为人类共有的重要精神财富——数学知识的重要组成部分。所以，数学思想具有数学知识的某些基本特征。既然如此，我们就可以把数学思想当作知识那样传授给学生，并且可以用数学语言来描绘它、解释它，用生活中的实例来验证它、活化它。如我们可以向学生解释“化归思想”就是将面临的问题，转化归结为已经解决或容易解决的问题。并且可用类似“曹冲称象”、匈牙利著名数学家 P·罗莎的“数学家烧开水”等一些典故进一步阐述数学思想及其功用，使学生感觉到数学思想并非虚无缥缈的幻影,而是实实在在、生动活泼的存在于头脑中的知识。但是，这种萌芽期的数学思想还是一种方法性、工具性的知识。也正是它的存在，使得数学中发展学生的数学思想才成为可能。第二，数学思想从形成到发展具有鲜明的个性特征。一个人某种数学思想的形成过程大致是这样的，当他面临要解决的数学问题时，他就会基于原有的数学修养以及非智力因素心理品质，在头脑中构成一种对要解决的问题做出反应的前提条件——立场、角度或观点。在这种观点的作用下，该数学问题在他的头脑中形成一种心理学上称为表象的产物(经过感知的客观事物在头脑中再现的形象),这是一种由感知到抽象思维过渡的必要中间环节，由此产生了不甚清晰、准确，也不成体系的零散的“思想萌芽”。它是数学思想的雏形，是最低层次的思想认识，而当这种初步认识逐步概括成为一种以部分事实为依据含有猜想成份的假说，并在一定范围内得到证实

其真理性之后，就形成了一种学说，它是关于某类数学问题的规律性的一种认识结果，这就是一种数学思想。可见，数学思想是个体思维活动的产物，它反映了学生的认识、观点、方法、态度和习惯等个性特征。可以说，任何两个学生的数学思想都是存在着差异的，因此，学生虽然具有了某些知识形态(萌芽期)的数学思想，但不经过自己独立的思维活动,不通过亲自的数学实践活动，是不可能发展为带有个体特色的数学思想的。换言之，而学生只有把知识形态的数学思想与其亲身体验、经验、心理活动结合起来，才能形成活化的、认知形态的数学思想。由于现实生活中存在着这两种不同形态的数学思想，因而，在数学教学中我们就可以把知识形态的数学思想像传授知识那样，灌输给学生。当然，这种灌输与知识传授还有不同，先让他们构建起数学思想的大体框架，起初这种思想框架对学生来讲可能是空洞的，未被理解认识的，然后再让学生通过自己的思维活动逐步理解它、检验它、丰富它并内化为认知形态的数学思想，构建起较为系统的、独立的、活化的数学思想体系，从而实现数学教学中发展学生数学思想，提高学生数学素养的目的。

三、实验研究的若干原则

(一)渗透性原则

初中生数学知识还不够丰富，抽象思维能力较为薄弱。把数学思想作为一门独立的课程开设还缺乏应有的基础。而另一方面，数学思想方法蕴含在知识之中。若不能有意识地把思想方法作为教学对象，使之明朗化，学生就得不到应有的熏陶。因此，借助数学知识这一载体，把数学思想方法的教学渗透到数学知识的形成发生

过程，即概念形成、公式定理推导、问题解决方法探索、数学规律的揭示过程。同时要注重把握渗透的时机、分寸，使渗透数学思想的教学卓有成效。

(二)层次性原则

初中数学教材中蕴含的数学思想方法相当丰富，由于数学思想方法的形成需要一个反复孕育、多次渗透、阶梯式的循序渐进过程。因此，教学中应当依据学生的年龄、身心、思维和认知特征，将数学思想方法作适当的分层分解，如可将某种数学思想分解成孕育、形成、发展三个层次并将其渗透到相应的知识教学中。尤其是发展阶段，要通过经常反复的渗透，才能使学生形成自觉运用数学思想的意识。

(三)实践性原则

学生数学思想的发展水平最终取决于自身的参与数学活动的程度。数学思想教学是数学思维活动过程的教学，是思维操作的动态型的教学。学生若不进行独立的思维活动，具有鲜明个性特征的数学思想就无法形成。因此，数学思想的教学要特别注重营造教学氛围，精心设计教学方案，悉心引导学生积极主动地参与到数学知识的发生过程，在数学实践活动中，反复地在数学思想方面接受熏陶,从而逐步构建起个体的‘数学思想系统”。

四、实验研究的主要内容

“发展学生数学思想，提高学生数学素养”的主渠道是课堂教学，而课堂教学中怎样操作实验变量，这是数学思想方法教学实验研究的核心问题。为此，我们在教学实验过程中，着重从三个方面探索“MA”教学中的可操作性问题。

(一)“MA”教学实验的变量及其水平分解

为了贯彻实验原则，使数学思想教学落到实处，我们依据大纲要求和教材内容，将数学思想方法的类型、性质、状态、目标作了适当的界定和划分。

(二)“MA”教学实验自变量的宏观设计与操作

学生数学思想的形成要经历一个从模糊到清晰，从理解到应用的较长发展过程。在这个过程中，学生数学思想的发展比知识、技能的掌握更加艰难。因此，必须从整体、系统、发展的角度进行数学思想教学的宏观设计。为此我们依据数学思想的形成过程和条件，将数学思想教学从宏观上划分为四个层次，并制定了相应的操作思路。

渗透孕育期：这一时期，我们以数学知识教学为载体，以教材中蕴含的数学思想方法为重点，着重清理渗透、孕育的思路，探索渗透的时机，把握渗透度，使学生感受到数学思想的朴素、真切。比如，在新学期开始的第一课，我们就有目的地向学生渗透分类思想："新教材共分上、下两册，其中上册分四章，下册分三章。每章都分若干节……。"使学生刚接触教材，就受到分类思想、系统思想的熏陶。又如，教材上有关“当作”、“看成”词语较多，含有这些词语的语句表达的内容都是化归思想的具体体现，当然是渗透化归思想的极好时机。总之，概念的形成过程、结论的指导过程、规律的揭示过程、方法的探索过程，一句话就是知识的发生过程是渗透数学思想的极好机会和根本途径。

领悟形成期：我们认为一个学生要初步形成某种数学思想，需具备四点：一是能理解该思想的含义；二是初步掌握该思想方法的操作步骤；三是了解该思想的使用范围和局限性；四是能运用该思想于简单情形的问题。

由于数学思想有深奥和浅显之别，学生认知水平不尽相同，因此，不同数学思想的形成期也不一样，即使是同一种思想，它的初步形成期的确定也并不唯一。我们依据学生的实际，结合教学计划制定了数学思想初步形成期分布表，目的是突出重要数学思想的教学，便于操作。如我们在重点中学的实验班确定化归思想的初步形成期是初一下学期的“可化为一元一次方程的方程”，而普通中学的实验班则确定在初二上学期的“一元二次方程”。抽象概括、数形结合思想的初步形成期确立在初三上学期的“函数概念”和“直角坐标系”。方程思想和数学模型初步形成期确定在初二下学期的“一元二次方程应用”。类比、归纳、猜想、演绎则确立在初二的“三角形内角和定理”和“多边形内角和定理”。尽管经过渗透孕育期，学生不同程度地对数学思想有了一些认识，但还是朦胧的、肤浅的，所以，这一时期可向学生正面介绍数学思想。如通过典型问题向学生介绍什么是化归思想，化归思想的三要素(化归目标、对象、手段)。在学生明确化归思想的含义后，重点是使学生掌握化归的方法，并通过引导学生亲自参与数学活动过程，有意识地尝试用该思想指导思维活动，加强化归思想与化归方法的结合，提高对化归思想的认识。

应用发展期：皮亚杰认为，活动在人的智慧、思维和认识的发生发展中起着关键的作用。思维、认识的发展过程就是在实践活动中主体对客体的认识结构不断建构的过程。我们认为，要使学生数学思想从知识状态发展到认知状态，就必须让他们参与数学实践活动。为此，在新知识教学中，我们突出用数学思想促进知识的迁移和能力的培养。比如“一元一次不等式”的教学，首先

向学生进一步介绍数学思想在新旧知识相互转化中的作用,使学生明确新知识在一定条件下可以转化为旧知识。其次，引导学生运用类比、化归思想成功地实现了从一元一次方程向一元一次不等式的迁移。另一方面，在加强宏观思想应用训练的同时,注重微观技能技巧的演练，使得策略与方法、思想与技巧相辅相成。比如，尽管学生会运用化归思想解一元一次不等式，但是，在去分母和系数化为 1 这两个环节上易出现符号或运算错误，所以，应将其列为技能技巧训练的重点加以解决。

巩固深化期：经过前三个阶段的教学过程，多数学生已初步具有了数学思想的“雏形”,尤其是形成期较早的数学思想如化归、类比思想等。在后继教学过程中，我们抓住教材中的教学重点、难点，尝试运用数学思想的宏观指导，帮助学生克服难点，掌握重点，同时作为巩固深化学生数学思想的契机加以充分利用。比如在“乘法公式”一节教完后,通常有许多学生感到公式不易记,运用起来更困难。为此,我们针对这一重点(又是难点),设计一堂数学思想训练深化课。将所学乘法公式借助于数学思想与方法串成一个有机整体，帮助学生构建认知结构,用数学思想统帅、吸附知识,从而达到活记公式、善用公式的目的。

我们认为，数学思想从孕育到形成、发展，一般都需要经历一个复杂的“润物细无声”的过程。正因为如此，数学思想的各种发展期也是相对的，各种宏观设计和操作也是因人因地而异的。

(三)“MA”教学实验自变量的微观设计与操作

尽管数学思想的形成需要经历一个长期的发展过程，但它的基础在课堂教学中，因此，精心设计好每一

堂课的数学思想教学方案是有效发展数学思想的关键。我们根据教材内容，将数学课大致划分为四种课型：概念课、规律课、问题课和综合课。由于每种课型的教学内容不同，因而数学思想的教学设计也有别。经过实验研究和探索,我们初步总结出了数学思想教学设计的‘四环节教学结构”理论模式，概述如下：

概念课：1 创设问题情境，激发思维动机，蕴含数学思想；2 揭示概念背景，了解合理性和必要性，渗透数学思想；3 暴露形成过程，概括本质属性，揭示数学思想；4 拓展概念教学，深化理解定义，激活数学思想。

规律课：1 创设问题情境，激发探索欲望，蕴含数学思想；2 鼓励大胆猜想，指导发现结论，渗透数学思想；3 暴露思维过程，探索论证方法，揭示数学思想；4 反思探索过程，优化思维方法，激活数学思想。

问题课：1 巧构启发导语，激发思维兴趣，蕴含数学思想；2 强化目标意识，引导合理发散，渗透数学思想；3 监控思维流程，指导思维定向，揭示数学思想；4 深化问题教学，提高思维效益，激活数学思想。

综合课：1 创设问题情境，提供探索背景，蕴含数学思想；2 设疑点拨解惑，突破思维障碍，渗透数学思想；3 指导概括提炼，升华思想方法，揭示数学思想；4 引导反思总结，完善思维过程，激活数学思想。

五、实验效果简析

经过三年来的理论研究和实践探索，实验班学生在数学学习态度、方法，在数学思想方法的掌握，在应考能力、迁移能力等方面有了明显提高，学生数学素养也得到了相应发展。现仅列举新海中学(省重点)、新浦中学(市重点)、教育学院附中(普通初中)三所学校的实验

班与普通班的学生发展情况作具体分析。

新海中学实验班不仅中考的数学成绩十分显著的优于普通班，而且在面向大多数的基础上，保证了优秀学生个性的发展，优分率达 88%，参加省初中数学竞赛获奖人数显著优于普通班，且均居全市首位。中考总成绩达重点高中录取线人数 35 人，居全市之首。新浦中学实验班在初一入学时，由全年级入学成绩总分列倒数的 45 名学生组成，与普通班比较有非常显著的差异，而三年后中考数学成绩比较无显著差异，且通过对学生三科学习兴趣调查也表明，该实验班在激发学业后进生的学习兴趣，转差赶优，提高全体学生的数学水平方面做出了突出成绩。教育学院附中实验班与普通班的中考成绩虽然无显著差异，但从数学思想抽样测试成绩看还是略占优势。

实验班学生学业成绩的提高与数学思想的形成、发展有没有关系呢?对此问题,我们设计了数学思想检测试题,对 6 个班的学生(每班随机抽取 10 人)进行对比测试。实验班学生能运用数学思想解题的人数多于对比班；三题总比数为：64：44。在回答解答该题所用到的两种主要数学思想时，实验班也明显优于普通班。可见，在数学教学过程中渗透数学思想，对提高学生学业成绩，促进学生数学素养的全面发展有十分重要的作用，也是推进数学素质教育的一条行之有效的途径。

综合训练课培养学生思维能力的实验探索

一、实验背景

综合训练课是数学教学的重要课型，综合训练课应以所学知识为基础，以培养学生的思维能力为目的。下面就综合训练课中的审题、分析、求解、探究四个环节的教学，浅谈本人的一些作法。

二、实验步骤

(一)审题——挖掘‘隐含条件”,培养思维的深刻性、严谨性。

数学习题的题设和题断是一对矛盾。深入地分析习题的条件，全面地、严密地、深刻地认识问题的本质，这就是审题。

审题教学中，教育学生一方面谨防粗枝大叶，将“隐含条件”漏掉；一方面忌带主观臆测，把本来不存在的假设加进去；造成不应有的偏差和谬误。

例 1x2-xcosθ+2sinθ-1=0 两实根平方和的最大值 M 和最小值 m，分别是()

(A)M=7，m 不存在；

(B)M=6，m=-2；

(B)M=6，m=421-18；

(B)M=1，m=0。

分析：此题的隐含条件是Δ=-sin2θ-sinθ+5≥0①

｜sinθ｜≤1②即-1≤sinθ≤-4+21＜1③

而 x21+x22=-(sinθ+2)2+7

选 A，则将 sinθ∈R 作为潜在假设；选 B 则忽略了隐含条件①且将 sinθ=1 作为假设；选 C 就综合考虑了隐含条件①、②即③。

例 2 已知 x2+tg2α1=2xtgα，α∈0，π2。

求 2x+2x3+2x5+…+2x2n-1+…

错解：∵x2-2xtgα+tg2α=0

∴x=tgα

故 2x+2x3+2x5+…+2x2n-1+…

=2·x1-x2=2tgα1-tg2α=tg2α

分析：当 0<q<1 时，无穷数列为递缩等比数列，其各项和为 S=α１1-q。解法错误所在就是审题不认真，漏掉了条件α∈0,π2,而默认 tgα<1。

象这类错误是不胜枚举的。教师应在审题教学中，结合具体习题引导学生深入地思考条件的完备性，培养思维的深刻性、严谨性。

(二)分析——从题目的条件、结论出发，多方面联想，培养思维的灵活性、广阔性。

学生进入综合训练阶段，已经积累了一定的基础知识，掌握了一些基本技巧和基本方法。这一阶段教师引导学生对习题进行分析，不但在同科知识中多向发散，还要在各科(如代数、几何、三角、解几)知识之间进行远距离发散，寻求各种可能的解题方案。

例 3 证明：任给七个实数，其中至少有两个数(记作 x,y)满足

0≤x-y1+xy≤33①

分析：(一)如果只着眼于七个实数，是难于下手的。如果引导学生联想到正切函数的值域为 R，且两角差的正切公式为 tg(α-β)=tgα-tgβ1+tgαtgβ，把七个实数看作七个角的正切，把 0 和 33 分别看作 tg0 和 tgπ6，问题就迎刃而解了。

(二)抽屉原理：设七个实数 a=tgαi(i=1,2,3,…,7)且α∈-π2，π2，把-π2，π2 分成六个区间：-π2，-π3，-π3，-π6，-π6，0，0，π6，π6，π3，π3，