

数学课创新教学实验设计与探索

教学实验与能力培养（三）

王拥军 编著



目 录

学生数学能力结构	1
中学生运算能力发展的研究	5
中学生数学能力发展的研究	19
中学生数学思维品质培养的实验报告	41
初中代数教学以概括为基础培养学生思维品质的实验报告	50
对初中数学“差生”的教学心理实验研究	75
中学教学课堂教学中培养学生的独立思考与独立工作能力	89
创造性思维与数学教学实验探索	100
数学记忆的技巧与能力培养实验	110
数学课堂教学创造性思维培养实验	113
数学解题教学中培养创造性思维的实验探索	119
例题教学中激发和培养学生的学习兴趣实验探索	124
在添辅助线教学中培养创造性思维能力的教学实验	127
教学中训练学生思维的实验探索	131
思维训练与运算能力实验	136
数学复习中训练学生的发散思维实验	139
提高高三数学课堂复习效益的教学实验	146
克服思维定势的消极影响提高解题能力教学实验	149
在数学教学中应加强逆向思维的实验训练	153
非智力因素在数学教学中的作用实验探索	157
中差生“自学辅导”教学的实验探索	161
激发学习兴趣，提高高三数学教学质量	166

学生数学能力结构

数学改革，突出思维品质的培养。在充分而全面认识数学的教学目的基础上抓好以概括为基础的开放性动态系统的数学能力的培养，也就是把数学能力看成是三种能力(运算能力、空间想象能力和逻辑思维能力)与五种思维品质(深刻性、灵活性、独创性、批判性和敏捷性)的统一整体来培养”。从而提出了关于数学能力结构的一种新的观点，本文就这个观点作一些具体的阐述。

一、数学能力的传统提法

学生数学能力结构的传统提法认为数学能力由运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力这三种基本的数学能力构成。随着学生学习内容的变化，这里的运算不仅是指数学运算，还包括各种数学式子及方程的变形，以及极限、微积分、逻辑代数的运算等；逻辑思维包括概念、判断、推理等基本思维形式以及比较、分类、概括、类比、归纳与演绎、分析与综合等思维方法；空间想象包括对平面和空间几何图形的运动、变换和位置关系的认识，以及形数结合、代数问题的几何解释等。而三种基本的数学能力，是指学生在上述思维活动的可能性方面表现出来的个性心理特征。这三种能力的基础与核心是逻辑思维能力。它们互相联系，组成了学生的数学能力。

上述三种能力与相应的技能是不可分割的，能力的发展以技能为基础，但技能与能力是不同的。例如，两个学生通过各自的练习在解决某些数学问题时都能够做

到按一定合理的、完善的步骤自动地进行，解题速度和学习分数都差不多，我们可以说这两个学生在掌握这些数学知识和技能方面达到了接近的程度。但是，这两个学生掌握这些数学知识和技能的快慢、深度、巩固程度以及迁移广度可能有很大的不同，即在数学能力上有着不小的差异。因此，在教学过程中不仅要注意技能的形成，还要特别重视能力的培养。那么，学生能力的差异究竟通过什么来体现呢？关于数学能力结构的传统提法没有很好地回答这个问题，我们有必要对数学能力结构作进一步的探讨。

二、数学思维品质

现在，人们在谈数学能力的时候，越来越多地提到了思维品质。思维品质的实质，就是人的思维能力差异的表现。思维品质主要包括深刻性、灵活性、独创性、批判性和敏捷性五个方面。学生的数学能力差异正是通过数学思维品质来体现。

数学思维的深刻性是指学生在对具体数量关系和空间形式进行抽象、对各种数学材料进行概括以及逻辑推理过程中所表现的广度、深度和难度。它表现为在数学思维活动中能够全面地、深入地、从难地思考问题，善于抽象概括分类，逻辑性强，善于抓住数学知识的本质、规律和内在联系，系统地理解和掌握数学知识。

数学思维的灵活性是指学生思考数学问题方法与过程的灵活变换，数学推理中心理过程的可逆性（正向思维与逆向思维的转换），以及富于联想、思维结果的多样性。思维的灵活性具有求异和求得多解的特征，即求异思维或发散思维的特征，其实质就是灵活的迁移。

数学思维的独创性是指学生在解决数学问题时能够

表现出独特、发散和新颖的特点，善于提出问题，作出猜测和假说并加以证明。思维的独创性具有“创造”的特征，也就是创造性思维的特征，这种特征的产生依赖于学生对知识系统的高度概括和灵活的迁移。

数学思维的批判性是指学生在数学思维过程中善于严格地估计思维材料和精细地检查思维过程，随时控制和调节思维过程；善于发现问题，提出疑问，通过考虑正反两方面的论据，来作出正确的判断；有独立见解，善于排除错误的干扰，防止错觉，克服负迁移。思维批判性来自于思维过程中的自我意识或监控。

数学思维的敏捷性是指学生数学思维活动的速度。它表现在思考数学问题时反应灵敏，接触实质快，学习时由旧到新、由易到难的“台阶”少，“跨度”大，运算环节及推理过程能够缩短，思维效率高。

上述五个思维品质之间是相互联系、密不可分的。其中，思维的深刻性是一切思维品质的基础，灵活性、批判性和独创性是在深刻性基础上引伸出来的三个品质，它们互相依存，灵活性和批判性是独创性的基础，独创性是灵活性和批判性的发展。而敏捷性以其他四个思维品质为前提，同时又是其他四个品质的集中表现。

三、数学能力结构

关于数学能力结构的提法越来越丰富，除了传统的三种能力和五种思维品质之外，还有提到相应的一些思维能力的，例如，求异思维能力、逆向思维能力、创造思维能力和批判思维能力等等，这反映了人们对于数学能力结构认识的深入。我们认为，第一，数学能力结构应当包括传统的三种数学能力以及五种数学思维品质；第二，关于思维能力的其他一些提法与五种思维品质的

提法意思是接近的，可以纳入思维品质去考虑；第三，三种能力与五种思维品质(包括与思维品质相应的一些思维能力)的关系不是并列的关系，而是交叉的关系。我们把三种数学能力与五种思维品质看成一个系统，它们的交叉关系形成了十五个交叉点。

四、概括是数学能力的基础

思维最显著的特性是概括性。善于概括是思维深刻的重要特点，概括也是数学的重要特点。学习与运用的过程就是概括——迁移的过程。没有概括，就谈不上迁移，没有概括，就不能掌握知识，就不能运用知识，就不能学习新的知识，没有概括，就无法进行逻辑推理，就谈不上思维的深刻性和批判性；没有概括，就没有灵活的迁移，就谈不上思维的灵活性与创造性；没有概括，就没有“缩减”形式，也就谈不上思维的敏捷性。因此，概括是一切思维品质的基础。

与数学思维深刻性相联系的数学概括能力，就是从大量的或繁杂的数学材料中抽出最重要的东西；以及从外表不同的数学材料中看出共同点的能力。数学概括能力，应当包括以下几个方面：第一，数学概念和数学规律的概括；第二，把概括的东西具体化；第三，在现有概括的基础上进行更广泛、更高层次的概括；第四，在概括的基础上把数学知识系统化，这是概括的高级阶段。

例如，学生从认识具体的一些二元一次方程组并研究其解法之后，概括出一般的二元一次方程组的概念及解法，这是数学概念和数学规律的概括。学生运用这种解法去解各种具体的二元一次方程组，这是把概括和解法具体化。有些方程组表面上不是二元一次方程组，例如可化为二元一次方程组的分式方程组，甚至像三元一

次方程组，但学生能看到它们与二元一次方程组之间的共同点，找到它们的解法，这就进行了更广泛、更高层次的概括。学生在学习了各种方程组及其解法之后，分析他们之间的联系和关系，把这些内容系统化，这是概括的高级阶段。

由此可见，概括的过程就是迁移的过程，概括的水平越高，迁移的范围就越广，“跨度”就越大。由于概括，学生抓住了数学知识的本质，知识的全体，知识的内部联系，掌握了数学知识的规律性。由于概括，学生善于发现已经掌握的数学知识与新遇到的数学问题之间的共同联系，善于运用已学知识去解决新的问题，获得新的知识和技能，做到举一反三，触类旁通，温故知新。因此，概括能力是一切数学能力的基础，概括能力的提高，将会使学生学习数学的能力获得显著的提高，这是应当引起我们特别重视的。

综上所述，数学能力是以概括为基础的开放性动态系统，是三种数学能力与五种数学思维品质相互交叉构成的统一整体。

中学生运算能力发展的研究

一、研究目的

根据国内外的大量研究，一般认为，“儿童思维发展分为三个阶段”；“6、7—14、15岁是抽象逻辑思维发展的阶段”。但是抽象逻辑思维是如何发展的，作为智力活动的主要成份的思维活动的成熟期在何时，这是有争议的。我国儿童的思维活动的成熟期又在何时，目前资料

尚缺,值得我们探讨。确定我国儿童思维发展的年龄阶段和成熟期,对于教育实际,对于如何快出人才和多出人才,使新的一代更能符合四个现代化的要求,是非常必要的。

数学是中小学生的—门主课,通过研究学生的数学概念与运算能力的发展来确定他们的思维发展的规律性,是儿童心理学研究的一个重要途径。我们曾就小学生运算能力的发展问题,进行了一些粗浅的心理学研究。这次研究中学生运算能力的发展问题,可以作为上一研究的继续,是我们研究儿童思维发展的一个方面。

这个研究企图探索以下几个课题:中学生的数学运算能力的各个方面的表现及其发展中的年龄特征;儿童的思维,即智力活动的成熟特点及其成熟期;中学生思维的智力品质的个性差异及其表现;也摸索研究思维发展的方法及客观指标问题,等等。

为了使儿童心理学的研究成果,在实践中坚持为教育与教学服务的方向,我们根据自己研究的结果,也提出一些粗浅的教育建议,仅供参考。

二、研究方法

我们进行了综合性的研究。

(一)横断研究

我们分别对北京市三道街学校和北京市雅宝路中学(均属非重点的一般学校)的学生进行了研究。

1 对象:两个学校初一至高二的学生。每个学校的每个年级确定一个教学班(即50人,条件——按照教学大纲,完成了应有的教学进度),每个年龄(年级)组则为100名,共有被试500人。

2 方法:

(1)调查法。对被试进行谈话、作品分析和观察。

(2)教育性自然测验。与两校数学教研组配合,利用学生数学竞赛的机会,按研究目的的要求来确定试题。试题分两式,第一式是围绕中学数学教科书的内容,考查被试掌握基本概念(知识)和基本运算能力(训练)的情况;第二式是测定思维品质的灵活性、抽象程度和思维推理能力的不同难度的试题。为了确定思维敏捷度的个性差异,对被试演算时间作了统计。

(二)纵向研究

为了使我们的研究能更好地反映一些具体问题,我们利用在北京市三道街学校一度抓教学工作之便,曾在79届7班班主任的协助下,总结多年对该班学生运算能力发展趋势的追踪材料作对照性的分析。该班(被试)60人,从初二至高二,班主任未更动,每个学期有材料记载。

(三)技术上一律经过统计处理,并进行了差异的考验

运算能力的指标的制定力求客观:

1 概括能力的发展按五项指标来确定:对直观的依赖性;对数的实际意义的认识;数的顺序和大小;数的组成(分解组合),对数学概念定义的展开。

2 空间想象能力的发展按照三项指标来确定:对直观的依赖性;分析综合的范围(平面、立体);对空间图形分解组合的运算程度。

3 命题能力的发展按四项指标来确定:对数学命题结构的认识;对数学命题形式的理解;数学命题的分解组合程度;命题的变型程度。

4 推理能力的发展按四项指标来确定:推理步骤的

直接与间接性；推理的范围；推理过程的正确性；推理品质的概括性、自觉性和揭露本质的程度。

关键年龄的确定按每项指标在年龄组之间差异的考验的显著性为依据。

(四)总结经验

为了使我们的研究能与教育实际相结合，使我们的教学建议能反映教学第一线老师们的要求，我们走访了各类中学和区县级教师进修学校近十位在数学教学经验的中、老教师，学习他们的经验，征求并归纳了他们的意见。

在这个研究报告里，将综合我们通过各个方面的对照性的研究所获得的一些结果。

三、结果分析

研究中发现，中学生运算能力的发展是一个十分复杂的问题。为了便于分析，我们从五个方面着手研究。这五个方面是：数学概括能力的发展；数学空间想象能力的发展；数学命题能力的发展；数学推理能力的发展和数学运算中思维的智力品质的发展。

(一)中学生的数学概括能力的发展

我们研究了中学生掌握数学知识中理解数概念的扩充和运算，恒等变型和各类代数式的掌握，解方程和掌握函数及图象等，看到了中学阶段，学生的数学概括处于不同的水平，按指标要求，我们把它归为四个等级。

第 级是数字概括水平

属于这一级水平的学生，主要是通过数学理解其实际意义——“数量”，进行运算，因此他们的数学概括水平具有形象的东西还占一定优势。

第 级是形象抽象概括水平

从这一级水平起,学生开始能对数进行代数(文字)的概括。其明显的特点是掌握整式集合、分式集合等代数式和一元一次方程为起点指标。尽管这一级水平的学生的概括能力上升为抽象逻辑思维占优势,但仍然离不开形象支柱,需要具体的经验帮助他们理解数学知识。

第 级是形式抽象概括水平

这级水平所达到的指标,是学生根据假定进行概括,他们完全抛开算术的框图进行运算、定义、定理、公式和原理等形式的运算成为这一级水平理解数学概念的主要途径。

第 级是辩证抽象概括水平

学生掌握对立统一的运算能力,找出运算中的内在联系,在思维过程中进行的是多次的综合性分析,进行复杂的概括。例如掌握排列组合,数列与极限,甚至于微积分的初步知识,都是从组合分析过程入手,具备辩证抽象的概括能力。

从调查可以看出:初中一年级的概括水平与小学高年级相近,他们的数学运算系形象抽象概括水平,即第 级占优势。初中二年级是中学期间概括能力发展中第一次转折点($P < 0.05 =$ 。在初三发展的基础上,高中一年级的概括能力又是一个显著的变化($P < 0.05 =$,多数高中学生掌握了形式抽象的概括能力并向辩证抽象水平发展。高中二年级的概括水平于此进一步发展,但不显著($P > 0.1$)。

我们对纵向研究的追踪班,其发展过程基本上与横断研究结果相似,只有一个差别,即该班学生根据假定运算的概括能力,大部分到高二上学期才能达到,这关键阶段较横断研究在发展上挪后半年。

由此可见,中学生的数学概括能力的年龄特征是稳定的,并在这个稳定性的同时,也明显地表现出个体差异的可变性。

(二)中学生的空间想象能力的发展

中学生随着几何学的学习,空间想象能力在逐步发展。这个发展的趋势也反映了中学生空间想象中从经验型的抽象逻辑思维向理论型的抽象逻辑思维发展的过程。这个过程,按指标要求也可以归纳为四级水平。

用数字计算面积和体积,是对三度空间作量的运算阶段,具体形象性在运算思维中还占一定优势。

掌握直线平面阶段。从点、线、面的分析与综合开始,逐步掌握相交线、平行线、三角形、四边形、相似形和圆的实质,进行平面几何体的各种组合与分解的运算。

掌握多面体阶段。在平面几何的基础上,逐步掌握三度空间的多面体图形,进行对空间直线与平面的分析与综合,想象空间位置的关系,并加以组合与分解的运算。

掌握旋转体阶段。理解圆柱、圆锥、圆台和球的空间位置关系,进行对其轴的位置、轴截面的形状和侧面展开图的分析与综合,想象三度空间的旋转变化,并加以组合与分解的运算。

从调查分析中我们可以看出:

(1)目前中学生的空间想象能力是比较差的,这也是数学教学中的一个薄弱环节。

(2)中学生的空间想象力的发展与其知识的领会是一致的,从初一到初二空间想象力之所以发展($P < 0.05$) = 是由于初二开始学习几何的结果;从初二到初三立体

几何运算能力之所以发展，、 级的差异 $P < 0.05$ ，是由于初三开始学习了立体几何。由此可见教育对思维发展的决定作用。

(3)中学生在空间想象力的发展上，存在着年龄特征，也存在着关键年龄阶段。初二到初三是空间想象力质变的时期。证实了恩格斯在《自然辩证法》里所强调的“形的概念与数的概念一样，完全是从外部世界得来的”正确性。

通过高一补课，学生重新学习并领会立体几何知识，才有近半数学生达到第 级水平，高二继续补课，这上述近半数学生中绝大多数又达到第 级水平。由此可见，中学生的空间想象能力是在教学中“从外部世界得来的”，它既存在着年龄特征，又存在着个体的差异。

(三)中学生的数学命题能力的发展

中学生掌握命题能力，即掌握数学判断形式的的能力，其发展表现在掌握命题结构和命题形式这两方面。

1 中学生掌握命题结构能力的发展

中学生掌握命题结构能力的发展表现在正命题(原命题) 逆命题 否命题(对称命题) 逆否命题(反申命题)等四种命题的领会和运算上。

这四种命题结构的掌握，既反映了学生理解不同数学命题的抽象程度，又反映了学生思维过程中掌握思维方向的可逆与守恒性，也反映了思维活动的辩证关系，而命题与其他命题的关系，正是反映了“否定之否定”规律在学生运算上的具体体现。

从两个学校的被试多次达到指标的平均人数可以看出，目前中学生掌握命题的能力是比较低的，这是当前数学教学中的薄弱环节之一。在正常的教育条件下，中

学生掌握命题结构的能力是随着年龄增高而发展，命题结构的四种表现的全部掌握，尤其是对逆否命题的掌握，要到高中以后才能完成。

2 中学生掌握命题形式的发展

JPiaget 从数理逻辑出发，用群集和格，即 16 个二元命题运算来刻画儿童思维结构的成熟。我们在研究中看到，中学生掌握命题形式在不断发展，的确反映了他们思维发展的趋势。以解方程为例，按照规定的指标可以看出，中学生在运算中掌握的命题形式有三个等级：

() 能够确定简单命题。对肯定(P)、否定(q)、合取($P \wedge q$)和析取($P \vee q$)等命题的四种演算形式能够判别确定。例如能掌握方程和方程根的含义，求取未知数的值使原等式成立。

() 能够掌握和判别复合命题。即能够确定由几个命题用肯定、否定、合取和析取等演算作成命题。例如，确定方程的根只有一个解，有多个解，有无穷多解或无解的可能性，能够确定同解方程就是这种复合“等价”命题演算关系的显著标志。

() 能够按照运算法则确定命题的变型。在中学教学过程中，学生能够掌握交换、结合、分配和二重否定等法则，确定和演算命题的变型。例如学生根据方程的基本性质，运用演算法则，解方程组和确定方程组的同解变型。

上述三个命题形式的掌握水平，不仅反映了中学生的运算能力从简单到复杂，从具体形象到抽象逻辑的思维活动水平的发展过程；而且也反映了中学生运算能力从数群(群集)结构向数的“格”的结构的发展过程，他们能对原有命题形式加以组合分析，找出这种配合之间

的关系，使思维结构趋向成熟。

我们在研究中重点分析了三个年龄组，对两校的被试多次研究结果中可以看到中学生掌握命题形式能力的发展趋势：

(1)初二学生能够很好地掌握命题的简单形式，并开始掌握复合命题；初三的多数学生能够掌握复合命题形式；高一以后完成各类命题形式的运算，趋向“基本成熟”。

(2)在掌握命题形式与思维的格的结构中显示出年龄特征的稳定性与可变性的统一。高中大多数学生能够掌握命题形式之间的组合分析结构，即“格”的结构。

(四)中学生的数学推理能力的发展

在研究中，我们看到中学生推理和证明的方法有：直接证法和间接证法；综合法和分析法；类比法和对比法；演绎法和归纳法。中学生运用这些方法时，按照确定推理发展的四项指标要求，他们在数学推理的思维过程中所表现出的能力可归纳为四级水平：

第 级是直接推理水平。套上公式，对上条件，直接地推出结论。

第 级是间接推理水平。不能直接套公式，需要变化条件，寻找依据，多步骤地推出结论。

第 级是迂回推理水平。分析前提，提出假设后进行反复验证，才导出结论。

第 级是按照一定数理逻辑格式进行综合性推理的水平。处于这一级水平的学生，他们的推理过程逐步简练和合理化。

从调查分析中可看出：

(1)目前中学生的逻辑推理水平是低的，这同样是数

学教学中的薄弱环节,初一学生有一半以上不能套公式做题,高中学生竟有人不能按公式一步推理;多步推理成为中学生的普遍难题(在我们访问重点学校有经验的老师时,也同样反映这个问题);抽象的综合性推理更是困难,可见这个结果不能不引起教育界的重视。

(2)中学生在正常的教育教学情况下,数学推理水平是随着年级升高(年龄增加)而发展的。初二学生普遍地能按照公式进行推理,高一多数学生掌握多步骤间接推理和迂回推理,高二学生的抽象综合推理水平得到较大的发展。按照这些研究结果看,初二和高二是中学生数学推理能力发展的转折点($P < 0.05$)。

我们在纵向研究中,也获得类似的结果。看到进入高中阶段学生的数学推理能力趋向抽象和简化,推理过程中自觉性和揭露本质的程度也在发展。这说明,中学生运算思维过程是一个螺旋式“内化”的过程,推理活动的“思维量”逐趋“简化”。

(3)中学生数学逻辑推理能力存在着个体差异。

(五)数学运算中思维品质的发展及个体差异。

在研究中我们看到,中学生在数学运算中思维品质从多方面表现出来,但集中地表现在四个方面:思维活动的敏捷性、思维活动的灵活性、思维活动的深刻性和思维活动的独创性。同时我们还看到,这四个品质既随年龄增长而发展,又显著地表现为个体差异,这种个体差异到15—17岁趋向稳定(基本定型)。

1 思维活动的敏捷性在中学生运算中的表现

这种表现,就是迅速的运算能力,培养正确迅速的运算能力,正是中小学数学教学的重要任务之一。

(1)思维活动的敏捷性与年龄特征

我们从三道街学校上学期一次平均 40—45 分钟数学测验的交卷时间的统计结果可见：中学生在数学运算中，敏捷程度是有显著差异的。这种差异有一定的年龄特征，从初二开始更为显著，年级越高，差异越大。我们从纵向研究追踪班个案材料中也看到，初三以后，运算过程中速度的个体差异逐趋“稳定”，高中阶段，这种差异“基本定型”。

(2)正常、超常与低常的中学生运算速度的比较

朝阳区 38 名在校的“超常”学生(占 3%)被选拔参加 1978 年高考(均考入重点大学)。选拔考试，数学 120 分钟交卷，成绩在 80 分以上。以同样试卷，我们让三道街学校高一重点班运算，平均交卷时间为 180 分钟，平均成绩仅 35 分。经过差异的考验， $P < 0.01$ (有意义)。

抽出这 38 名“超常”学生中年龄最小的李 × ×(初三，15 岁，高考成绩 403 分)，让他完成朝阳区选拔课外活动小组成员的数学试题，50 分钟交卷，完成习题，获得满分。我们又让三道街学校同年级 20 名数学爱好者完成同样试题，150 分钟交卷，习题只完成 60%，平均成绩才 31 分，差异是很大的。

从上述两个例子可以看出，超常学生运算时思维敏捷，反应快，演算速度快。经我们多次调查与统计，“超常”学生的运算速度一般平均是正常学生的 $1/2—1/3$ 时间。

我们在三道街学校调查 15 名低常学生(占学生数的千分之五)，他们上到中学，一般已无法继续“求学”，他们思维迟钝，演算速度慢，与正常学生同时计算他们力所能及的习题时，演算时间往往是正常学生的 3 倍以上。