●国家基础教育课程改革系列丛书

世界课程改革与教学创新

文　　库

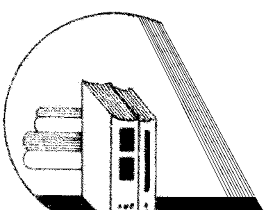
（第三辑）

学科课程改革与教学创新

数学课程改革与课堂教学创新

（一）

北京师联教育科学研究所　　编



學苑音像出版社

责任编辑：王　军
封面设计：师联平面工作室

世界课程改革与教学创新文库

（第三辑）

学科课程改革与教学创新

数学课程改革与课堂教学创新

（一）

北京师联教育科学研究所　编

学苑音像出版社出版发行

★

三河文阁印刷厂印刷

圆园园缘年 愿月第 员版　第 员次印刷

开本：愿远园伊员园远园 员辕员远 印张：猿苑 字数：源园园千字

陨杂月晕苑原愿愿员园圆原员园员原猿

本书配碟发行全 源园册 （册均 元 不含碟）

本书如有印刷、装订错误，请与本社联系调换

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongboo

中西方古代数学思想对数学教育思想的影响

中西方古代数学思想的不同特色,不仅对数学本身的发展影响深远,而且不可避免地影响到数学教育思想。我国古代以《九章算术》为代表的数学体系,是以计算为中心的理论体系,这与古希腊以《几何原本》为代表的数学逻辑演绎体系,迥然不同。这两种迥然相异的数学体系,反映了截然不同的数学思想。从其形成的时代背景看,由春秋战国时起,我国的农业、手工业以及各种技术都有很大的发展,其间,天文历法、机械制造、土木工程、军事设施、采矿冶金、田亩测量、度量衡、物资分配、运输、交换、赋税等,都需要各式各样的数学知识,或提出新的数学问题。到秦汉时期,社会各行业得到更大的发展,许多行业都迫切需要应用数学,这就有力地推动了应用数学的发展与普及。而这时间(墨家之后、刘徽之前)又正处于形式逻辑衰落期间。所以,以《九章算术》为代表的中国古代数学思想明显表现出实用性、计算性、算法化。

《几何原本》成书时代的希腊与中国则完全不同。形式逻辑由柏拉图开始,经亚里斯多德的工作达到极盛,把形式逻辑的思想方法运用于数学研究和排斥数学应用在当时形成一种强大的思潮,欧几里德处于这一时期,他完成其《几何原本》。所以,以《几何原本》为代表的西方古代数学思想主要是逻辑性、理性。

数学思想与数学教育思想之间有一定的内在联系。自《九章算术》问世时起,曾长期作为我国传播数学知识的教材,早期为自学或个人传授,隋唐时开始建立国立学校,其中设有算学科,《九章算术》就成为重要的教科书。而《几何原本》在西方乃至世界数学教育史上

影响之大，更是人所共知，至今我国中学平面几何课程仍延用欧氏几何体系。受其影响，便形成中、西方古代数学教育思想的显著差异：中国古代的数学教育崇尚功利性，注重计算实际问题的技术，把数学作为“六艺”之一列入教育内容，不讲究数学的逻辑体系，很少提到思辨性要求；而古希腊的数学教育主要是为了训练心智，通过数学抽象去理解世界的本原和实质。柏拉图在他的学校门上挂着“不懂几何者不得入内”的牌子，强调的就是这种理念性，强调纯逻辑思维而轻视数学的应用。简言之，即古希腊的数学教育强调逻辑思维能力，而中国古代的数学教育则注重“问题解决”。

中西方传统文化特征对数学教育思想的影响

任何一个民族的科学文化都有其产生发展的历史渊源,因而表现出不同的风格和特点。传统文化的特征,其核心是文化建构过程中的思维方式,而思维方式就决定着数学教育的价值取向。中国古代数学思想和古希腊数学思想就是两种不同传统文化下的必然产物。中国传统文化注重‘经世致用”,把经纶天下、治国救民作为理想的目标,注重人际关系,思维方式的一个重要特征就是实用性,具体表现为思维的直观性和非思辨性。中国古代数学与当时社会、经济、政治等都有密切联系,从某种程度上说,《九章算术》是当时社会的简单缩影。受着这种实用性思维方式的制约,中国古代数学教育,虽过分注重数学知识的应用性,强调数学教育的工具价值,培养运用数学工具解决实际问题的能力,但却超越不了直观经验和具体计算,未能做到把数学教育当作系统的理性思维科学教育来对待。

在西方则不同,早在古希腊文化中就样成了一种把客观对象与认识主体相对立的思维习惯,这种对立只有通过认识活动才能被扬弃。注重人与自然的关系,承认一个独立于人的道德行为之外的客观对象,并以此对象作为一切认识活动的起点。希腊文化孕育了古希腊数学的纯粹理性思维特征,轻视应用,强调数学教育的育人价值,注重培养逻辑思维能力。古希腊数学教育的价值取向,从柏拉图的《理想国》中清晰可见。传说连古代最伟大的数学家阿基米德,也“把所有直接为了使用和谋利的机械和技巧都看作是鄙贱之事”。

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongboo

科学、技术与社会的古代关系对数学教育思想的影响

科学、技术与社会之间的古代关系表现为：一是科学和技术应该保持着各不相干的状态，不应互相影响；二是科学和技术最终都要受社会或国家的管理或控制。在古希腊和古罗马文化中，手艺人和技术专家的工作被认为有一定程度的社会需要，但却威胁着个人美德与社会秩序，因而要适当限制。而科学是指理论性的理解或沉思性的理解，而不是实践性或生产性的制做。科学和技术不仅处于分离状态，而且都要受到国家的限定，置于政治指导之下。在中国除了实用化倾向外，另一个妨碍中国纯粹科学理论发展的原因，就是科学与技术、知识分子与工匠的分离。中国封建社会一条颠扑不破的真理是：“万般皆下品，唯有读书高”。这里所说的‘书’主要是指‘四书五经’。所以，千百年来直接从事技术活动的中国工匠们往往在接近科学大厦的门口时就裹足不前了。并且一切科学、技术活动都在伦理定向的象征化思维方式的严格控制之下。

中、西方在科学、技术与社会的古代关系上，有着惊人的一致性。但在科学和技术的价值取向上不同。西方重学轻术，而中国重术轻学，并且将数学在科学与技术二者间的归属不同，从而产生了两种极端化的数学教育思想。中国古代社会只注意到作为技术性的数学教育，并且对数学教育不够重视，而古代西方则注重数学教育的文化性、人格性目的。

· 源·

中西方古代数学教育思想的失落与换位及其启示

从不同角度的分析得到共同的结论,即‘ 实用功利 ’和‘ 思维训练 ’分别代表了中西方古代数学教育思想的两种倾向。这两种思想在数学教育史上表现着不同的优势和缺陷。西方由于注重抽象思维能力的培养,强调对数学的逻辑结构的整体把握和理性认识,追求严密推理的、理想完美的数学,从而造就了强大的民族创造力和大批优秀科学家,极大地推动了科学的发展,使得‘ 希腊人永远是我们的老师 ”,使得古希腊社会具有现代社会的一切胚胎。同时也应该看到,其排斥数学应用的思潮必定潜伏着内在的危机。

中国的实用功利性思想,把数学教育与生产实践紧密结合起来,充分发挥数学的应用价值,有效地推动了社会各行业的发展。同时,由于要解决来自实践中的实际问题,也就一定程度上促进了数学的发展,例如中国古代之所以在世界上最早承认负数,看来主要是从实践中提出来的,得、失,人们都会经历,便逐渐形成了相反意义的量。相形之下,其弊端是把数学教育作为一种解决问题的一招一式的技术教育对待,没有充分注意数学严密的逻辑性和高度的抽象性,所以,认识只能停留在经验型的直观感悟层次上,结果使数学成为与个人经验密切相关的一种技术化理论,随着某一位天才数学家的谢世而处于消歇。明末以后中国数学的落后,与古代数学教育思想的缺陷有重要关系。

灵怨世纪下半叶起,西方资本主义工业革命,呼唤着数学的应用

价值，片面重视训练心智、培养思维的传统数学教育思想受到人们的批判与怀疑，随之实用功利性目的逐渐得到重视，以至几经演化形成当今盛行的"问题解决"。相反地，在中国也许是尝到了轻视培养逻辑思维能力的苦衷，开始步西方之后尘，致使如今我国的数学教育现实是，不重视数学应用的优良传统，"双料冠军"显示了中国学生纯逻辑思维能力之强，但数学应用能力之低下又预示着危机。

我们认为，两种传统的数学教育思想的对立，永远也不会完善数学教育，只有两者相结合，扬长避短，才能真正把握好数学教育的基调。这是历史的告诫、现实的呼唤。

数学教育评论

[瑞士] 皮亚杰

人们对数学教育方向的考虑,自然要取决于人们对心理发展或对所获得的运算及数学逻辑的解释。这种解释同样取决于所赋予这些东西的认识论的含义。这两个问题,就它们的心理起源和认识论的含义来说,是密切相关的。假若柏拉图哲学是对的,数学实体是独立于主体之外而存在的,或者,假若逻辑实证主义是正确的,把数学归结为一种普遍的句法和语义,在这两种情况下,就有理由把重点放在教师把真理简单传授给学生,并尽早地使用教师的语言,即原理的语言,而不必太考虑儿童自发的观点。

相反,我们认为,存在着一种作为整个智力发展功能的自发的和渐进的基本逻辑数学结构的建构活动。这些‘自然的”(人们所说的“自然数’中的‘自然’)结构,比起传统数学的情况,更接近于‘现代”数学中所使用的意义。因此,存在着教师一般不知道的一些事实。一旦教师较好地掌握了心理学知识,这些事实对他就会相当有用,能帮助他不把事情弄得复杂化。还有利于实现学生的创造性,而不是把他们仅仅看作顺从的‘接受’器。

然而,要想达到这一阶段,就必须修正我们关于语言与动作的关系的看法。事实上,从心理学的角度来看,很清楚,逻辑并不产生于语言,而是可以从动作的普遍协调中找到其较深的起源的。事实上,在整个语言产生之前,在纯感觉运动的水平上,动作易于重复并随之而概括化,这样就建立起可称作同化的图式。这些图式按照某些规律把自己组织起来,似乎不可能否认这些规律与逻辑规律之间的关

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongboo

系。两种图式可以协调或分开(再结合),一种图式可以部分地插入另一种之中(包含),或者只是一部分和另一部分有共同之处(交叉);一个图式的组成部分,或者两种或两种以上图式的协调,能够容许有一种不变的相继次序或某些排列(顺序类型);也有一与一的对应,一个与几个或几个与一个的对应(一一对应,等等);并且,一旦一种图式给一个动作以一个目标,主体走向相反的方向,那就是互相矛盾的。总之,这里存在着动作的整套逻辑,它导致某些同一性的建构,是超出了知觉的(例如掩蔽起来的物体的永久性),并导致某些结构的精细化〔朋加埃(孕[illegible])在他的认识论的文章中曾描述过的位移的实体群〕。

因此,特别在数学教育中,忽视动作的作用而始终停留在语言的水平上,那是一种极大的错误。特别是对年幼的学生来说,摆弄物体的活动对理解算术的和几何的关系是必不可少的(埃及人的经验数学就是这种情况)。数学教师对涉及物体实验的活动的反感是很好理解的。他们也许看到了与物体的物理特性有关的一种关系,从而可能害怕经验的证明会有害于作为他们的学科的特点的推论的和纯理性的心智的发展。但是,事实上这是极大的误解。心理学的分析使我们消除了这种担心,并保证了数学家们关于心智的推论和形式方面必须受到训练的基本要求。事实上存在着和主体动作有关的、彼此很不相同的两种‘经验’。首先,存在着所谓的‘物理经验’(广义的),指作用于物体以发现物体本身的特性,例如,比较重量或密度,等等。但也还存着可称作‘逻辑数学的经验’的东西,这是一般不为人们所认识的;这种经验不是从特定物体的物理特性收集其信息,而是从儿童作用于物体的实际动作(或更确切地说,从动作的协调)收集其信息的。这两种类型的经验是不相同的。我的一位有名的数学家的朋友说,当他四五岁时,一种属于第二种类型的经验开始激发了他对数学的兴趣。他坐在花园里,把一些卵石排成一条直线数点着玩,从左到右,由一数到十。然后再从右数到左;发现仍然是十,这使

他十分吃惊。他从相反的方向数点，发现两个方向都是十。他继续以各种方式排列卵石，最终确信总数十与卵石的顺序无关。在儿童实际排列卵石或把它们放在一起的时候，总数和顺序显然都不是卵石的物理特性。在这一情况下，儿童发现了合并卵石的动作产生了一些和排列卵石顺序的动作无关的结果。用任何固体的东西，他都会看到这一情况，在这种动作中，卵石的物理特性不起特殊的作用(除了它们可听从摆弄的事实外)；然而它们的性质没有改变，就是说它们是守恒的，但是守恒本身却产生了逻辑数学经验)。

这样，动作和逻辑数学经验的这种最初的作用，不但远远没有阻碍推理思维随后的发展，相反地却构成了一种必需的准备，理由有二。第一个理由，介入后来的演绎推理过程之中的心理的或智力的运算本身起源于动作，它们是内化了的动作，而且一旦具备了必须的协调，内化充分了，身体动作形式的逻辑数学经验就不再需要了，内化的推理就足够了。第二种理由，动作协调和逻辑数学经验，在内化自己的同时，就产生了恰好和逻辑数学抽象相一致的一种特殊的抽象作用。这是起源于物体的物理特性并因而称为“经验抽象”([illegible])的普通的或与亚里士多德抽象相反的一种抽象。逻辑数学抽象可称为“反省抽象”([illegible])，这是因为两个有互相关系的理由。一方面，这种抽象“反射”(就像反射镜或放映机的方式一样)的每样东西都是处于较低级水平(例如动作水平)，它把它们反射到思维的或心理表象的较高级的水平上。另一方面，在重新组织心理活动的意义上讲，它是一种“反省抽象”，它把通过动作协调抽出来的每样东西重新建构在一个较高的水平之上。

然而，在必须表现动作及逻辑数学经验的年龄(苑–愿岁以前)和开始可能从事抽象思维的年龄(将近员原–员圆岁并连续发展到员源–员愿岁)之间存在着一个重要的阶段，其特征吸引着心理学家们的兴趣，而教师们知道这些特征是有用处的。事实上，在苑岁和员原–员圆岁之间，可以看到具有守恒、可逆等等特征的推理运算的一种重要的自发

发展。这使得类和关系的基本逻辑精细化，通过包含和顺序概念的综合而进行整数系列的运算建构①，通过连续统一的再分和作为一个单位挑选出的部分按顺序置换的综合而进行度量概念的建构。虽然这在儿童的逻辑思维中有了相当大的进步，但仍然是很有限的。在这个水平上，儿童尚不能在语言表达的纯粹假设之上进行推理，要想得到一个合乎逻辑的推论，他就需要应用可摆弄的物体（在真实世界中或在他想象中）进行推理。基于这些理由，我们把这一水平列为“具体运算”，以区别于形式运算。事实上，具体运算是介于前运算阶段的动作和出现较晚的抽象思维两者之间的中间形态。

这样，在儿童自发的动作和他的反省思维之间就建立起了连续性，从这一点可以看出，比起传统数学中所使用的概念来，表明现代数学特征的基本概念更接近于‘自然’思维的结构。首先，应该指出在运算上自发作用的重要性，这是因为这一作用能使集合与摹式建构之间建立起联系，特别是集合能与循环顺序组合起来。例如，我们和英海尔德曾要求 源–缘岁至 苑–愿岁的儿童用一只手把一个念珠放入一个透明的圆筒里，同时用另一只手把另一个念珠放入藏在屏幕后面的另一个透明的圆筒里。本设计要了解的问题是儿童是否理解这样构成的两种系列是相等的，并且还要找出，假若这种动作无限地进行下去，儿童是否认为它们还会保持相等。我们询问过的所有儿童都承认，动作继续下去，两个系列是相等的，只有最年幼的儿童才拒绝对动作无限进行下去的情况进行概括。约从 缘岁或 远岁以后，儿童们承认这种概括，而且一个 缘岁半的男孩子发现了下面很有趣的公式：“当人们一次知道了，就永远知道了。”然而就是这个儿童，在

① （几个作者（[illegible]等等）似乎曾听说我认为序数比基数更早一些，或者相反，我从来没有这样讲过，我经常考虑的是有限数的这两个方面在一种综合中能分离和心理上能互相加强，既超出了类包含又超出了不对称传递关系的顺序。假若顺序是必要的，这是因为各单位彼此区别开来，只能靠它们顺序的位置，这些单位之所以变成相等的，是由于抽去了它们性质上的差异。但是基本单位的顺序和单位的数字（基数）是相关的，这些单位按数字顺序排列，一个在一个之前。）

他看了 员园个一排的红筹码和另外一排 员园个一一对应的蓝筹码之后,若把一排中各筹码的距离稍摆开一点,不再看得出两排之间的一一对应时,他就拒绝承认两排还保持相等了。这个例子说明了结合复现观点建立对应关系的建构作用。

几何直觉是理论和儿童的自发发展之间的趋同现象的一个极突出的例子。从历史上看,这些直觉出现在欧几里德几何之中。很久之后人们才发现投影几何的结构。到了 员怨世纪才发现拓扑学。从心理学上看,猿岁和 源岁的儿童还不知道怎么样画正方形,并倾向于把正方形和圆形相对照——诸如长方形和三角形等等的图形都同化为简单的闭合曲线——然而他们却很仔细地区分了闭合图象和开放图象,并能同样仔细地在一个图形之内,在一个图形之外,或在一个大图形的边沿上,画一个圆形。从这种早期的拓扑学的直觉中,随后及同时产生的投影概念(依靠‘ 瞄准 ’或‘ 观测 ’作为证明)和欧几里德概念,其遵循的一种程序比历史更接近心理学的理论。

从具体运算的水平——约在 苑–愿岁时——可以找到另外一种有趣的趋同现象,那就是布尔巴基所发现的三个‘ 母结构 ’的基本等值,这一等值本身表明了这些结构的‘ 自然的 ’性质。首先,有一种代数性质结构的建构,是由于它的合成的规律具有一个反数和一个同一元素 垣粤原粤越园 这种情况特别在逻辑类的系统中可以观察到(分类,等等,以量词限定包含 粤约月,假若 月越粤垣粤忆——而且二者都不是空集)。第二,可以找到顺序结构,其合成的规律是建立在互反性上的,并且表明关系系统(顺序)的特征。最后,可以观察到建立在连续统、邻近和分开观念上的拓扑结构。这些基本结构后来就互相联合起来。特别是反数〔或否定(原粤)〕和互反性,它们在具体运算水平上,是不能互相结合的,从 员员–员圆岁的形式运算水平之后,就可以互相组合了,它们在一种四群([illegible]中使这种组合成为可能。在这一情况下,有组合(全部子集合的集合)系统的命题逻辑的开端,它把自己置于逻辑类和关系的基本结构之上。于是主体就能够处理

具有四种变换的系统。让我们以命题运算 孕⊃择作例子来说明这四种变换：

（员）（陨）等同或‘零’变换 陨（责⊃择）越责⊃择

（圆）（晕）逆向变换 晕（责⊃择）越责∩～择

（猿）（砸）互反变换 砸（责⊃择）越择⊃责

（源）（悦）关联变换 悦（责⊃择）越～责∩择在这种情况下，砸越悦晕，砸越晕悦，晕越悦砸，晕砸悦越陨，最后保证了逆向和互反的唯一的一个系统中的协调。

还可以举出许多别的例子，特别是基本的和‘不重要’的类型的形式的建构例子。然而现在是描述儿童的‘自然发展的’自发思维和某些基本理论的概念之间的这些趋同现象怎样对教师有用的时候了。自然，会遇到某些人试图用陈旧的教学方法教年幼儿童学习‘现代’数学，过早地使用形式化的办法，完全靠教师用语言传授给学生。用这样的方法必然要遭遇到一些失败，这些失败是有助于解释某些大数学家们所持的怀疑态度的，例如勒莱（允援蕴藻则葬赠）①。然而，错误不在于数学教学大纲的‘现代化’性质，只是在于这种情况下所使用的方法论和心理学。事实上，因为职业的关系，数学教师有一种非常抽象的思维方式，要他置身于他的年轻学生的思维所必需的具体观点，他常常感到格外困难。然而，从发展的观点和就上面已讲过的结构的渐进同化而论，在结构开始的具体状态和它们变得形式化与抽象化的最后阶段之间，似乎并不存在矛盾（上面已看到了）。假若教师彻底认识（这是教师的困难所在）这些相继的自发思维结构的详细情况和作用，他必然会看出这两种思维之间并不存在矛盾。简单地说，真正难以解决的实际问题在于把教师语言中所理解的这些一般类型的概念转移到儿童自发建构而加以应用的同样概念的特殊情况上去，没有这种概念，儿童们就考虑不到客体，不会概括所获得的信息。

① 见 蕴藻则葬赠在巴黎科学院所作的批评报告（第 圆远猿号报告，第 怨缘页，员怨远圆年 猿月 员源日会议）。

为了在教师的逻辑数学结构和学生在其发展的不同水平上的逻辑数学结构之间形成这种必需的接合,应该提到一些很普遍的心理学教育学原则。第一个原则,真正理解一个概念或理论意味着主体重新创造这个理论。一旦儿童能够重复某些概念并且能在学习情境中对这些概念作某些应用,人们就认为他已经理解了。然而,这并没有满足重新创造的条件。真正的理解表现在新的自发的应用上。换句话说,一种主动的概括意味着更多的东西:主体似乎能够自己发现有关所理解的情境的真正原因,因此他自己至少能部分地重新创造这一情境。这自然并不是说,教师不再有什么作用了,而是说,他的角色不是传授‘功课’的那样一种人,而是组织情境以引起儿童的好奇心和寻求解答,并靠恰当的安排以激励儿童行为的一种人。如果儿童努力掌握某一观点但遇到了困难,主动教学法的做法不是直接去改正儿童,而是提出反例,引导儿童进行新的探索,让儿童自己得到改正。

教师心目中时时应有的第二种考虑是:在所有的水平上,包括青少年期和处于系统化形式的多种初级水平,学生在‘做’和‘在动作中理解’所能做到的,要远远超过他用自己的语言所表达的。换句话说,儿童开始通过活动解决问题的时候,他所应用的大部分结构仍然是无意识的。事实上,儿童在参与某些事物时,早在‘觉察到’以前,就能在行动中有所作为了——“觉察到”则是出现在动作很久以后的事,这是一个很普遍的心理学规律。换言之,比起有意识地应用能力来,主体具有远远大得多的智慧能力①。所以,一旦教师有机会认识了上面提到的心理学的研究,知道了儿童所具有的直接在他的思维下面的思维结构,教师就能通过他自己和儿童进行适当的讨论,或者组织小组工作,让同样年龄或者年龄相似的小伙伴们(一个年龄大的儿童做小组的领导人)自己进行讨论,很容易地帮助儿童觉察到这些结构,这种讨论反过来也有利于语言化和‘觉察’。

第三个意见看来是重要的。在传统的数学中,时常要求儿童解

此为试读,需要完整PDF请访问:www.ertongboo