●国家基础教育课程改革系列丛书

# 世界课程改革与教学创新

## 文　　库

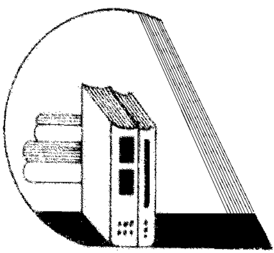
## （第三辑）

## 学科课程改革与教学创新

# 数学课程改革与课堂教学创新

## （二）

北京师联教育科学研究所　　编



學苑音像出版社

责任编辑：王　军
封面设计：师联平面工作室

# 世界课程改革与教学创新文库
## （第三辑）
## 学科课程改革与教学创新
## 数学课程改革与课堂教学创新
## （二）

北京师联教育科学研究所　编
学苑音像出版社出版发行
★
三河文阁印刷厂印刷
2004年8月第1版　第1次印刷
开本：850×1168　1/32　印张：157　字数：4060千字
ISBN 7－88050－122－3

本书配碟发行全40册640.00元（册均16.00元不含碟）

# 目　　录

# 迪恩斯论数学教学

曾到匈牙利、法国以及英格兰留过学的迪恩斯不仅是心理学家，而且还是数学教育家。他曾与心理学家布鲁纳合作，在哈佛大学进行数学教学的实验研究，致力于把心理学的成果应用到数学教学中去。迪恩斯部分地以皮亚杰的学习心理为基础，并利用他自己在数学教育和学习心理方面的兴趣和经验，创立了一个数学教学体系。这个体系包括了数学概念教学的四条原则、概念学习的六个阶段、实物联系教学法以及他的数学教学思想。

## 一、数学概念及其教学

迪恩斯把数学看作是对结构的研究，术语‘概念’就是意味着数学结构。以数学的结构思想为出发点，他认为数学概念有三种类型：(1)纯数学概念，它表示数的分类和数与数之间的关系，而与数的表达方式无关。例如，six[①]、8、XIII、1110(基数为2)、和△△△△都是偶数概念的实例，其中每一个都是表示一个特殊偶数的不同方式；(2)记号概念，它由具有特定含意的一系列符号来表示。例如，以10为基数，275意味着200加70再加5个单位。适当记号系统的选择是影响数学发展的重要因素。算术发展较慢，很大程度就是因为古代表示数的方法麻烦。数学分析的发展在英格兰出现问题也是由于英国数学家坚持使用牛顿的微积分的繁琐记号，没有采用莱布尼兹的较有效的记号系统；(3)应用概念，它是纯数学概念和记号概念在

① 译者注：它是英文表示的数，相当于6

数学及相关领域中应用的结果。长度、面积和体积都是应用概念。

迪恩斯认为在教授应用概念之前,应该让学生掌握必要的纯数学概念和记号概念;在呈现记号概念之前,学生应该学习纯数学概念;否则,学生仅记住操作符号的模型,不能真正理解基本的纯数学概念。学生出现符号操作错误,正是他们企图应用他们没有完全掌握的纯数学概念和记号概念的结果。

## 二、概念教学的原则

迪恩斯认为概念学习是任何刺激——反应理论都不能解释的一种创造性艺术。他强调具体经验和直觉在概念学习中的作用,因而在他的数学教学体系中特别重视数学实验室、数学游戏以及操作对象(数学游戏器具)。他认为学生学习数学,必须学会:(1)分析数学结构及它们的逻辑关系;(2)从大量不同的结构中抽出共同性质及对结构进行分类;(3)概括扩充以前掌握的较小的结构;(4)利用已学会的抽象来构造更复杂、更高级的抽象。

根据上述观点,迪恩斯提出了四条概念教学的一般原则:(1)动力原则。概念教学中要充分利用各种各样的具体材料及学生已有的经验,同时还要逐渐引导学生伴随着操作进行智力活动。在整个活动过程中,要让学生感受到数学游戏和概念学习的乐趣,使学生产生好奇的内驱力。(2)可构造性原则。在数学游戏过程中,要考虑学生的智力发展水平。在不同的年龄阶段,游戏的类型及要求不尽相同。(3)数学的变化性原则。在学习牵涉到变量的概念时,要依靠最大可能数目的经验。(4)感觉的变化性原则或多重具体化原则。为使学生掌握概念而采用的各种变式,必须突出概念的本质特征,不要使学生产生错觉,把非本质特征当作本质特征。

## 三、数学概念学习的阶段

迪恩斯认为学习数学概念是以递进的阶段进行的,有点类似于

皮亚杰的智力罚展阶段。依据上述四个原则,迪恩斯假设教授和学习数学概念为六个阶段:

阶段1:自由活动

本阶段是由教师提供大量丰富的材料让学生自由地操作,不强调活动的结构化思想。如果从过去习惯于利用结构方法教数学的教师的角度来看,自由活动可能没有多大价值,但它仍是新概念学习的重要阶段。通过含有概念直观代表的环境的相互作用,学生体验到新概念的许多组成全分,形成准备理解数学概念结构的智力结构和态度。

阶段2:游戏

完成体现概念代表的自由活动之后,学生将开始观察概念的具体化模型和规律性。他们将注意到某些规则支配着事情,一些事情可能发生,另一些事情不能发生。一旦学生发现事件的确定规则和性质,他们就开始游戏,试验教师制订的游戏规则,并设计他们自己的游戏。游戏允许学生试验概念中的变量和分析概念的结构。体现概念的不同代表的各种游欢将帮助学生发现概念的逻辑的和数学的组成部分。

阶段3:寻求公因子

利用概念的直观代表进行几次游戏以后,学生还不能发现该概念所具有的共同的数学结构。只有当学生认识到各种概念代表的共同性质之后,他们才能区分概念的肯定例证与否定例证。为帮助学生寻求概念代表的共同性质,迪恩斯建议教师要重视演示实例之间的'转换'(或'翻译')

阶段4:陈述

学生发现概念代表的共同性质以后,他们还需要进一步举出多种具有这种共同性质的代表概念的实例,以加深对共同性质的理解和掌握。在这个阶段,教师要注意启发学生,使学生善于联想,积极思维。

阶段 5：符号化

在这个阶段，学生需要用适当的言语和数学符号来描述概念代表，给概念下定义。学生自己发明每个概念的符号代表当然很好，但为了同教科书保持一致，教师应该干涉学生选择符号系统。比较好的做法是首先让学生自己构造符号代表，然后再要求他们与教科书中的符号相比较。此时，教师要向学生阐明好的符号系统在解题、证明定理和解释概念中的价值。教师也应该指出，用符号表示的公式、法则和定理，有时由于其中的符号的含意不明显，给使用带来困难。言语的陈述清楚地说明了定理只能适用于直角三角形。因此，善于记住公式、法则和定理的符号表示的学生，当应用它们到解题情境中时常遇到困难。

阶段 6：形式化

经过符号化阶段，学生并没有真正掌握概念，学生还必须整理概念，把新概念纳入已有的知识结构和认知结构之中。教师要让学生运用概念解决纯数学问题和应用数学问题，以检查学生掌握新概念的巩固程度。

## 四、实物联系教学法

迪恩斯根据学生学习概念的阶段理论，同时又考虑到数学的结构思想和学生的认知能力，提出了实物联系教学法。这种教学法的特征是使用有形的实物，通过精心安排的游戏，使学习者按次序一步步地学习。

综上所述，迪恩斯的数学教学思想可概括为：1. 所有数学都以经验为基础，学生只有通过从真实经验中抽象出数学概念和经验来学习概念。2. 学生学习数学概念有一个固定的自然过程，这个过程包括：(1)涉及到具体材料和抽象思想的活动和实验阶段；(2)把经验整理成为一个有意义的整体；(3)学生突然领会概念需要顿悟；(4)要有固定在新概念上的练习阶段，以便学生在新的学习中应用它、利用

它。3. 数学是创造性艺术,必须把它作为艺术来传授和学习。4. 教学中必须把新数学概念与以前学习的概念和结构相连结,以便过去的学习对新学习产生正迁移。5. 为了学习数学,学生必须能够把具体情形或事件‘翻译’成抽象的符号形式。

(杨骞　译)

# 加涅的学习理论与数学教学

美籍教育心理学家加涅，是学习理论的权威。他创立的学习理论，内容丰富，包括学习模式、学习过程、学习结果、学习类型、学习方法等等，几乎涉及学习的所有领域。同时，他运用他的理论和思想，致力于教学改革，提出了有效的教学模式，促进了心理学与教育的有机结合。加涅对数学教学十分重视和感兴趣，曾对数学学习和数学课程进行专门研究，而且，常把数学作为测验和应用他的学习理论的媒介。因而，加涅的学习理论，特别是学习类型，与数学教学有着密切的关系。

## 一、数学学习的目标

在考查加涅的八种学习类型以前，有必要讨论一下在他的理论中涉及到的数学学习目标。这些目标是我们要求学生通过学习数学必须直接或间接达到的。数学学习的直接目标，有事实、技能、概念和原理，它是根据数学内容划分的；间接目标，有学习的迁移、探究能力、解题能力及数学态度等。

数学事实是数学中一些特定的公约，如数学符号。2 是词“two”的符号，“+”是加法运算的符号，“sin”是三角中一个特殊函数的名字，这些都是数学事实。学习事实，往往要通过各种机械学习的方式，如记忆、操作、实践、游戏、定时测验等。学生掌握事实的标志，在于能陈述这个事实，并且在不同情形下能适当地应用它。

数学技能是在考虑速度和精确性的意义上，期望施行的运算和过程。许多技能可以用多种规则和指令或特殊过程的有序序列（算

法)来说明。学校里要求学生掌握的数学技能如有长除法、分数加法、小数乘法,作三角形、二等分角、求集合的并和交等等。技能可以通过论证或各种类型的训练和实践来学习。学生形成技能的标志,在于能正确、迅速地解决需要技能的不同类型的问题或在不同情形中应用技能。

数学概念是一个抽象的思想,依据它,人们可以给物体或事件分类,以及说明某物体或事件是否属于这种抽象思想的实例。集、子集、相等、不等、三角形、立方体、半径和指数都是概念的例子。掌握了三角形概念,就能够从多种图形中区别出三角形和非三角形。概念可以通过直接观察或定义来学习。对处在皮亚杰理论中具体运算阶段的儿童,往往要使用前种方式来学习新概念。他们常通过听、看、摸等感知概念的各种实例和非实例,以及比较实例和非实例,获得概念;而处于形式运算阶段的儿童,则可采用后种学习方式,通过直接思维就可学会概念。学生掌握概念的标志,在于能正确地分清概念的实例和非实例。

原理是最复杂的数学对象,它是概念相互结合的产物。语句“如果一个三角形的两边及夹角分别等于另一个三角形的两边及夹角,那么这两个三角形全等”,以及“直角三角形斜边的平方等于其它两边的平方和”,是原理的实例。这些原理自身都涉到几个概念及它们间的关系。为了理解三角形全等原理,人们必须知道概念——三角形、角、边及其关系——相等。学习原理,可以通过科学探究的过程、引导发现课、小组讨论等活动。学生掌握原理的标志,在于能区别原理中所包含的概念,并把概念纳入正确的关系中。以及应用原理到特殊的情形中。

把中学数学的对象划分为上述四类,可能并非精确。但一般地,对象总是以复杂程度为顺序的:从简单的事实,到复杂的原理。同时,许多(甚至是大多数)数学对象的分类与观察者的观点有关,这是每个数学教师都必须知道的。学生仅记住二次求根公式,他只是掌

握了一个事实;能把数字代入公式并得到两个答案的学生,算是学会了一种技能;学生能分清二次方程 $5x^2+3x+4=$ ○中 5、3、4 是常量,x 是变量,说明学生获得了概念;学生能推导(证明)二次求根公式,并能给别人解释其推导过程,说明学生掌握了一个原理。因而,作为原理的二次求根公式可被一些学生看成是事实、技能、或概念。

因此,作为一名数学教师,应该利用测验和观察来识别学生对所教概念和原理的观点。许多学生为了应付考试,常常只记住定理的证明,而没有理解证明中所涉及的概念和原理。在教学中,教师必须注意防止学生把原理仅作为事实、技能或概念来看待。

## 二、学习的类型

下面将加涅区别和研究的八种学习类型(信号学习、刺激—反应学习、连锁、言语联想、辨别学习、概念学习、规则学习和问题解决)做些说明和解释,并讨论一些适合于促进每种学习类型的条件。

1.信号学习

信号学习就是巴甫洛夫和华生的经典性条件反应,它是由能引起个体情感反应的单个事例或大量重复的刺激所导致的不自觉的学习。有一小孩,由于在一次唱歌中违背了规则,受到了音乐教师的指责和惩罚,她以后再也不敢在大众场合下唱歌,这是信号学习的例子。信号学习是情感的学习,其结果有高兴与不高兴之分,对后继学习起着积极或消极的作用。高中学生厌恶数学,可能就是因为他们在初中体验过与数学课有联系的不愉快的事件。

产生信号学习,必须要有神经信号刺激和学习者把神经刺激与所唤起的情感反应相联系的附加的、意外的刺激。因此,为使学生喜爱数学,作为数学教师,应该努力提供能激起学生愉快情感的无条件刺激,并且要求他们把这些愉快的感觉与数学课中产生的神经信号相联系。

2.刺激——反应学习

刺激——反应学习就是桑代克的工具性条件反射,它也是对信

号的反应。但是这种学习形式在两方面不同于信号学习。信号学习是不自觉的和情感的,而刺激——反应学习是自觉的和肉体的。刺激——反应学习需要能产生内部肌肉反应的外部刺激,而且在这种学习中,个体对刺激可以作出几种不同的反应。每当期望的正确反应发生时,个体得到了一次正强化。作为这种强化的一系列结果,个体学会了从一些不是期望的反应中辨别出合适的反应。

在个体的生活和学习中,可以发现许多刺激 ——反应学习的实例。例如学习说出人和无生物的名字,以适当的角发握住瓶子,等等。期望的反应的产生,学习者必须要具有执行适当的肌肉行动的能力。

3.连锁

连锁是以前多次学会的一系列非言语刺激——反应行为的联结。由于刺激——反应涉及到言语和非言语两方面,因而加涅把非言语刺激——反应序列称为连锁,把言语刺激——反应序列称为言语联想。开门、掷球、削铅笔等等都是连锁的实例。为发生连锁,个体必须会组织以前学会的刺激——反应技能以形成有序序列。如开门就包括着四个独立的刺激——反应肌肉行动 :握住门的捏手,转动捏手,在旋转的位置上抓住捏手以及把门拉开。

在数学学习中,大多数操作物质工具(如直尺、圆规)的活动都需要连锁。学习用直尺和圆规二等分角,就需要把以前学会的一些刺激——反应技能作适当的安排,这些技能中包括使用圆规画弧的能力和在两点间构造直线的能力。

在教授需要肌肉活动的数学技能时,应注意刺激——反应学习和连锁中的两个基本特征 :第一,没有形成各种刺激——反应技能,学生不能学会涉及到这些刺激——反应技能的连锁 ;第二、惩罚,能激起某种刺激——反应学习,但它干扰连锁,并消极地影响情感的发展,态度和动机的学习。

4. 言语联想

言语联想是言语刺激——反应的连锁。即以前学会的多种言语

刺激——反应活动的有序联结。例如形成语句、学习诗歌等。

言语联想中牵涉的智力过程比较复杂，目前尚未完全被认识。大多数研究者认为有效的言语联想需要有充当准则的（或是言语的、听觉的，或是视觉的，意象的）中间心理联结。这些准则通常存贮在学习者的头脑中，而且不同的人有所差异。例如，一些人可能把“y 被 x 确定”作为函数的准则，而有些人可能把函数译为符号“$y=f(x)$”，还有人可能把函数想象为两个元素集，其中包含有从一个集中的元素指向另一集中的元素的带有箭头的轨道。

学习的言语联想类型最重要的用途表现在言语对话上。好的演讲或写作依赖于演讲者或作者头脑中存贮记忆的言语联想。为表达数学中的概念和理性的论点，存贮大量有关数学言语联想是必要的。教师可以要求学生正确、精确地表达事实、定义、概念和原理以及数学思想来提高他们的言语联想，而且应鼓励（甚至是需要）学生不能把教师作为中间人或解释员，要让学生们互相讨论，互相交流。教师重复表达学生的答案和评述，这无意地阻碍了学生的言语联想。

5.辨别学习

我们可以注意到，已讨论过的后一种学习类型要比前一种类型复杂。学习的简单类型的特点都可在较复杂的类型中得已体现。辨别学习就是学习区分连锁。即根据物质的外表识别各种物质的和概念的对象、它需要类型 2、3 和 4 作为前提，辨别有两种：单一辨别和多重辨别。儿童识别数字“2”是单一辨别的例子。多重辨别的实例如：儿童学习认识数字 0、1、3、4、5、6、7、8 和 9，并且区别它们。

学生在进行辨别学习过程中，会出现下述现象：概括、消退和干扰。

概括是学习者把各种相似但有差异的连锁归结为单一的种类以及不能辨别或区分连锁的倾向。概括因素影响着数学学习。如当证明方法相似时，应用它来解决某问题过程中经常出现混淆。而且连锁中类似性越大，多重辨别就越困难。例如，1—1 映射和到上的映

射有很多共同的特征,以致于许多学生难以分辨它们。

如果一系列刺激和反应中缺少适当的强化,那么连锁中就会发生消退现象。消退的问题,明显表现在教师处理学生的作业的方法上。如果教师不告诉学生答案,不评价学生的作业,那么正确反应就会消退。因此,要求教师对学生的作业提供即时反馈,作出恰当评价。

遗忘以前学习的刺激——反应连锁,可能是由于学习新连锁时产生的干扰所致。所谓干扰,就是新旧刺激——反应间的消极作用。干扰因素也影响数学学习。例如在要求学生从以前学过的程序中选择出正确的程序解决 40 个不同问题的测验中,许多学生没有成功,就是因为已学过 10 种方法干扰着他们辨别不同问题的类型。

6.概念学习

概念学习是学习认识具体对象或事件的共同特征,以及把这些对象或事件作为一类来反应。在某种意义上,概念学习是辨别学习的反面。因为辨别学习常需要学习者根据事物的特征来区分它们,而概念学习牵涉到根据共同性质来给对象分类及对共同性质作出反应。

学习概念,必须先具备简单的学习类型。任何特殊概念的获得必须伴随着必要的刺激——反应连锁、适当的言语联想和可识别特征的多重辨别。例如获得‘圆’概念的第一步可能是学习说词‘圆”,作为自身产生的刺激——反应连锁;然后学生通过获得个体言语联想,学会区别作为‘圆’的几个不同对象;下一步,学生可以学习辨别圆与其它图形(如正方形、三角形)。让学生充分观察各种情形下的“圆’是很重要的,以便他们能识别复杂对象中的圆。当能自发地从不熟悉的内容中区分圆时,他们就获得了圆的概念。把概念推广应用到具体情形的能力是区分概念学习与其它形式的学习的标志。学生一旦掌握了概念,就能区分概念的新实例,对它们作出反应也不再需要特殊的和熟悉的刺激。因此检查学生是否掌握概念,就看他们能否在不熟悉的情形下推广应用概念。

在教授新数学概念时,做到下述几点是重要的:(1)提供大量不

同的概念实例以促进概括;(2)提供不同但又与概念相关的实例以帮助辨别;(3)提供概念的非实例以激发辨别和概括;(4)避免提供具有干扰概念实例分类特征的实例。这四方面可用三角形概念教学中易犯的错误来说明。首先,如果所有的三角形实例都是相同的种类,例如,所有例子都是锐角三角形,那么学生可能不会识别钝角及直角三角形。因而就不可能抽象概括出三角形概念;第二,如果学生不能举出其它几何图形的例子,如梯形、圆,那么他们辨别一些具有共同特征的不同对象可能就有困难;第三,提供非三角形的平面图形,并加以讨论,以帮助学生区分三角形的特征和与三角形有差异的其它对象的特征;第四,如果呈现的三角形实例碰巧是红色,那么一些学生可能把红色的性质与三角形的概念联系起来,从而不能识别非红色的三角形实例。

7.法则学习

上述讨论的六种学习类型是基本的学习类型。它必须先于学校教育中的主要的学习内容——法则学习和问题解决。法则学习就是学习概念的联结,是对附有一整套行为的整个情境(刺激)作出反应的能力。数学学习中有许多法则学习的例子。不少儿童知道 $5\times6=6\times5$ 及 $2\times8=8\times2$,但常不知道表示它们的法则:$b\times a=a\times b$,这说明他们不能超出这几个特殊的乘法范围而进行企图要做的概括。要学习这个法则,必须给出或是言语的表述(乘法进行的顺序不影响结果)或是符号公式(对任何数 a、b,有 $a\times b=b\times a$)。

法则可以有不同的类型和不同程度的复杂性。一些法则是定义,可被认为是定义概念。如定义概念 $n!=n\cdot(n-1)\cdots\cdots2\cdot1$ 就是怎样处理符号 $n!$ 的一个法则,另外一些法则是一系列概念的联结。如法则:在一般情形下,算术运算必须按先乘除后加减的顺序进行;还有一些法则是一些刺激所产生的反应。二次求根公式提供了无穷多个反应。每个特殊的二次方程是由一个概念连锁组成的刺激,每个解是由一串概念构成的反应。

我们通过观察会发现,在表述法则和正确地使用法则之间存在着质的差异。学生能陈述一个法则。这并不意味他们已经学握法则——具备使用法则的能力。如几乎每个学生都能记住一连串的符号 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,但如果没有额外的训练,很少学生能正确地应用它。相反,能正确地应用法则而不能陈述它,这是完全可能的。大多数人都使用法则:乘法交换律,但很少有人能陈述它为"乘法满足交换律"或"$a\times b=b\times a$"。

数学教师应该说明白能表述一个法则不是学生掌握法则的象征。只有当学生能在不同情形下适当地和正确地应用法则才可说明学生掌握了法则。为使学生牢固地掌握法则,加涅在《学习的条件》(1970)一书中提出了教授法则的五步教学程序。

8.问题解决

问题解决是一种比法则学习具有较高层次和较复杂的学习类型,它要求以独特的方式选择和联结一些法则,为新的问题情境获得解决办法。在问题解决过程中,学生获得一种把两个或更多的以前学得的法则组合成为一种具有高级法则形式的新能力。加涅认为,把数值常规地代入二次求根公式不是问题解决的实例,这仅仅只牵涉到使用以前学会的法则。若学生从未见过二次求根公式,靠自己独立地从 $ax^2+bx+c=0$ 推导出来,这才算是解决了新题。问题解决的标准是学生解决了以前自己没有解决过的特殊问题,即使早已被许多人所解决。

解决现实世界中的问题,通常包含五个步骤:(1)以一般的形式呈现问题;(2)把该问题转化为数学问题;(3)提出可供选择的解决问题的方法和过程的假设;(4)验证假设,实施过程,获得结果或一系列可选择的结果的程序;(5)确定最后的解。对大多数人来说,"确定每年有多少水流经密西西比河"这是一个新问题。试图解决它可按下列顺序进行:步骤1.问题的一般陈述;第二步就要改变这个问题的

说法，可重述为‘由密西西比河排出水的大片陆地的近似面积是多少？这片陆地上每年平均降雨量大约是多少”？还可说成‘密西西比河的横截面的近似面积是多少？水在该点的流动率大约是多少？’第三步要提出解题方法。问题解决者可以估计河的横截面为一英里宽，平均三十英尺深，平均流动率为每小时1.5英里；也可对河的流域面积及流域上方每年平均的降雨量作出估计；还可假设其它因素不影响问题的解决；第四步，利用以前学会的度量换算法则、求体积法则及几种不同的算术法则求出结果；第五步、分析，比较得到的两个结果。如果这两结果非常接近，那么就可断定这个解就非技术目的而言是可行的。

## 三、学习层次

加涅已应用他的理论为问题解决和法则学习构造了特殊的教学学习层次。这里仅讨论其中一部分。问题解决或法则学习的学习层次是一个包含着学生在学习较高水平的任务之前必须掌握的一系列从属和必要的能力的结构。根据加涅关于学习的观点，数学课题的学习适宜于层次分析。

加涅对许多数学课题的学习进行过研究为分析导出二次求根公式的学习层次，他首先提出了一个用来导出二次求根公式的顺序步骤表（如下表）：

**用来导出二次求根公式的步骤表**

要解决的问题

——导出二次求根公式

步骤1：写出二次方程的一般形式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

步骤2：方程两边加上 $-c$

$$ax^2 + bx = -c$$

步骤3：用 $a$ 除方程的两边