非凡图书

龚冬保教授考研数学

2006版

数学考研

数学四

根据2006年考研大纲全新编写

模拟考试试卷

龚冬保 主编

10套题

赠答疑卡

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

龚冬保教授数学考研系列

数学考研

2006 版

模拟考试试卷

数学四

（共 10 套，附解答与评分参考）

主编　龚冬保

王寿生　褚维盘　魏战线（高等数学）

崔荣泉（线性代数）　周家良（概率统计）

西安交通大学出版社

· 西安 ·

图书在版编目(CIP)数据
数学考研模拟考试试卷(数学四)2006版/龚冬保主编.—西安:西安交通大学出版社,2005.10
ISBN 7-5605-1591-6

Ⅰ.数... Ⅱ.龚... Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-试题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第082616号

书　　名　数学考研模拟考试试卷(数学四)2006版
主　　编　龚冬保
出版发行　西安交通大学出版社
地　　址　西安市兴庆南路25号(邮编:710049)
电　　话　(029)82668357　82667874(发行部)
　　　　　(029)82668315　82669096(总编办)
印　　刷　西安市新城区兴庆印刷厂
字　　数　188千字
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　8
版　　次　2005年10月第4版　2005年10月第1次印刷
书　　号　ISBN 7-5605-1591-6/O·191
定　　价　48.00(本卷12.00元)

龚冬保教授重要提示

本模拟试卷是在分析历年考卷基础上，严格按《2006 年数学考试大纲》的要求，以及新的试卷模式来编制的。为更好地发挥它们的作用，特作以下提示：

1. 考前演习为实战　模拟试卷认真练

一定要按考试的要求，像考试那样去做每一套模拟试卷。比如控制时间，可用闹钟定时到 10:45，而于 8:00 打开试卷开始“考试”，闹铃响时便“交卷”。稍后对照着“解答与评分参考”为自己评分并作小结。

对自己所考的 10 套模拟卷，至少隔 3 天，最多隔一周做上一套，效果比连续做要好。

2. 数学一二三四卷　卷卷不漏为求全

比如考数学一的读者，除了像考试一样做相关的 10 套题之外，还应当练一练数学二、三、四各模拟试卷中与数学一考试内容相关的题。因为尽管我们编写的各模拟题力求全面覆盖各考点和解题方法，但 10 套试卷题量有限，难免还有遗漏，参考一下其余试卷，可以扩大覆盖面。

3. 做题做到巧准快　总结要求精细全

做每道题都要想巧妙的方法，在不出错的前提下快速完成，这是巧准快的意思。每做完一套试卷后，要认真总结分析，对于不会做的题检查存在哪些未复习到的知识空白；对于做错的题，检查错在哪里：概念？方法？还是运算？对于做对的题，总结一下还有没有更好的方法，更快的途径。为此，我们特为设计了总结记录表，希望认真分析并记录。这是精细全的方法。

4. 知己知彼信心增　沉着应试展才能

每做一套模拟题后，不仅要作解题方法方面的总结，还要从应试策略方面不断做调整。从 2004 年起试卷模式上的重大变化是客观题占 56 分。因此，加强基本运算能力，训练用最简洁的步骤做填空题；加强对基本概念的理解，用最灵活的方法做选择题，力争在 60 分钟内将这 56 分拿到手。作解答题时，要坚持先易后难的原则，即先做那些感到熟悉的、容易得分的题，后做甚至可以不做自己觉得难的个别题。也可以考虑先做概率统计的题，再作线性代数题，尤其是数学三、四的试卷中，这两部分解答题占 52 分，仅有 4 道题，一般说难度不大。熟悉这些内容的考生很容易获得这 52 分，加上客观题共有 108 分之多！我们模拟试卷估计会比正式考题难些，考前像正式考试一样去做这些题，正式考时，像平时作模拟题一样的心态去应试，方能胸有成竹。模拟题定能助你超水平发挥，充分展示你的才能，考出理想成绩。

最后，我们强调要反复做模拟题，从做第二遍起，要把练习基本功作为重点，对会做的题一定要一遍做对，不断总结不丢分和多得分的应试策略，这对模拟题做得“不太好”数学基础差的考生尤为重要，只要会做基本题，临场不慌不乱，也是能考出理想成绩的。

考研成功！

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 1	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　　分
存在问题总结：	
试卷 2	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 3	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	
试卷 4	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 5	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	
试卷 6	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 7	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　　分
存在问题总结：	
试卷 8	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 9	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　　分
存在问题总结：	
试卷 10	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试试卷 1

数 学 四

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) 已知$\int e^{-x} f(x)\,dx = \arctan e^{x} + C$,那么$\int f(x)\,dx =$ ________.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{\cos x})^{\mathrm{cse}^2 x} =$ ________.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1}+\frac{2^2}{n^3+2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n}\right) =$ ________.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,且 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}| = |2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}| = |3\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}| = 0$,则 $|3\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}^*| =$ ________.

(5) 设 $P(A)=1, P(B)=0.7$,则 $P(AB) =$ ________.

(6) 设随机变量 X 和 Y 相互独立,且都服从区间$[-1,1]$上的均匀分布则 $E|X-Y| =$ ________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0\\ ae^{x}+be^{-x}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 处处可导,则( ).

(A) $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$ (B) $a=\frac{1}{4}, b=\frac{3}{4}$

(C) $a=\frac{3}{4}, b=\frac{1}{4}$ (D) $a=1, b=0$

(8) 设 $f(x)$ 在$(a-1,a+1)$内可导,且 $f'(x)$ 在 $x=a$ 连续,及$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=2$,则( ).

(A) $f(a)$ 是 $f(x)$ 的极小值　　(B) $f(a)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C) $(a,f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点　　(D) $f(x)$ 在 $(a-1,a+1)$ 是单调函数

(9) 设 $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t$,其中 $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x<0\\ \sin x, & x\geqslant 0\end{cases}$,则(　).

(A) $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导　　(B) $F(x)$ 在 $x=0$ 不连续

(C) $x=1$ 是 $F(x)$ 的极值点　　(D) $F(\pi)=3\frac{2}{3}$

(10) 设 $(axy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1+by\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y=\mathrm{d}u(x,y)$,则(　).

(A) $a=-2,b=2$　　(B) $a=2,b=-2$

(C) $a=-3,b=3$　　(D) $a=3,b=-3$

(11) 已知某一阶线性微分方程有两个特解:$y=2\sin x+x\cos x$ 及 $y=x\cos x-\sin x$,则此方程是(　).

(A) $y'\sin x-y\cos x=x\sin x\cos x$　　(B) $y'-y\cos x=\cos x-x$

(C) $y'\sin x-y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x-x$　　(D) $y'-y\cos x=\sin x-x$

(12) 与矩阵 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ 相似的矩阵是(　).

(A) $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$　　(C) $\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&-1&1\end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&2\end{bmatrix}$

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,$r(\boldsymbol{A})=n-1$,则 $r[(\boldsymbol{A}^*)^*]=$(　).

(A) n　　(B) $n-1$　　(C) 1　　(D) 0

(14) 连续型随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)$,Y 的分布律为

Y	1	4	8
p	0.2	0.5	0.3

且 X、Y 相互独立,则随机变量 $Z=\frac{X}{Y}$ 的分布函数(　).

(A) 是连续函数　　(B) 是阶梯函数

(C) 恰有一个间断点　　(D) 恰有两个间断点

三、解答题(本题共 9 小题,总分 94 分)

(15)(本题满分 9 分) 计算 $\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}}\mathrm{d}x$.

（16）**（本题满分 8 分）** 某种商品的需求量 Q 是单价 P（单位元）的函数，$Q = 12000 - 8P$，商品的总成本 $C = 25000 + 50Q$；每件商品税费 2 元，求使销售利润最大的商品单价和最大利润额.

（17）**（本题满分 8 分）** 设 $f(x)$ 可微，且 $f\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$. 求 $x^2 z'_x + y^2 z'_y$.

（18）（本题满分 9 分） 设 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上可微，且 $f(1)=3\int_{1/3}^{2/3}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $\xi f'(\xi)=f(\xi)$.

（19）（本题满分 8 分） 计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant x\leqslant\pi\}$.

（**20**）（**本题满分 13 分**）求一正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，将对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$ 化为相似的对角矩阵：$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$.

（**21**）（**本题满分 13 分**）已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$a_1\neq 0$. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$

(i) 求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解；

(ii) 求 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值与对应的特征向量.

(22)(本题满分 13 分) 已知二维随机变量的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}Cx\mathrm{e}^{-x(1+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求(i)C 的值;

(ii) 关于 X、Y 的边缘概率密度,并判断 X、Y 是否独立;

(iii)$Z=\max(X,Y)$ 的概率密度.

（**23**）（**本题满分 13 分**）袋中装有 50 枚正品硬币，50 枚次品硬币（次品硬币的两面都印有国徽）

（1）从袋中任取一枚硬币，将它投掷三次，已知每次都出现国徽，问这枚硬币是正品的概率为多少？

（2）若在袋中任取一枚硬币，将它投掷 k 次（$k \geqslant 1$），问至少出现一次国徽的概率为多少？

试卷(一) 解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\dfrac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C}$. 由所给等式两边求导得 $e^{-x}f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$,故 $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$,$\int f(x)dx=\dfrac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C$.

(2) $\underline{e^{-\frac{1}{4}}}$. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{2\sin^2x}\ln(1+\cos x-1)}=e^{-\frac{1}{4}}$

(3) $\underline{\dfrac{1}{3}}$. 此极限 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{n^3}=\int_0^1x^2dx=\dfrac{1}{3}$.

(4) $\underline{-126}$. 由已知等式知 1、-2 和 $-\dfrac{3}{2}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值,故 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化:$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3/2\end{pmatrix}\boldsymbol{P}$. $|\boldsymbol{A}|=3$. 故由 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 知 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $3,-\dfrac{3}{2},-2$,

$$|3\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}^*|=\left|3\boldsymbol{E}-2\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-3/2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}-3&0&0\\0&6&0\\0&0&7\end{vmatrix}=-126.$$

(5) $\underline{0.7}$. $P(A)=1$,则 $P(\bar{A})=0$,及 $P(\bar{A}\bar{B})\leqslant P(\bar{A})=0$,$P(AB)=1-P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-(P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\bar{B}))=0.7$.

注 本题的特殊解法:设 A 是必然事件,则 $AB=B$,$P(AB)=P(B)=0.7$.

(6) $\underline{\dfrac{2}{3}}$. $E|X-Y|=\int_{-1}^1\int_{-1}^1\dfrac{1}{4}|x-y|dxdy=\dfrac{1}{2}\int_{-1}^1dx\int_x^1(x-y)dy=\dfrac{2}{3}$.

二、选择题

(7) (B). 由连续性知 $a+b=1$,再由可导性知 $a-b=-\dfrac{1}{2}$,解得 $a=\dfrac{1}{4}$,$b=\dfrac{3}{4}$.

(8) (A). 由 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=2$ 知,$\lim\limits_{x\to a}f'(x)=f'(a)=0$ 及 $f''(a)=2$. 故 $f(a)$ 是 $f(x)$ 的极小值. 选(A).

(9) (D). $F(\pi)=\int_{-1}^0(1-t^2)dt+\int_0^\pi\sin xdx=\dfrac{5}{3}+2=\dfrac{11}{3}$,选(D).

(10) (B). **解 1** 由已知 $du=(axy^3dx+3x^2y^2dy)-y^2\cos xdx+by\sin xdy+dy=(\dfrac{a}{2}y^3dx^2+x^2dy^3)-y^2d\sin x+\dfrac{b}{2}\sin xdy^2+dy$

因此 $a=2$,$b=-2$ 时 $du=d(x^2y^3-y^2\sin x+y)$ 成立. 选(B).

解 2 由已知得 $u'_x=axy^3-y^2\cos x$,$u'_y=1+by\sin x+3x^2y^2$,显然二阶导数连续,因此 $u''_{xy}=u''_{yx}$ 即

$3axy^2-2y\cos x=by\cos x+6xy^2$. 故 $a=2$,$b=-2$.

(11) (C). **解 1** 由两个特解可知方程通解为 $y=C\sin x+x\cos x$,$y'=C\cos x+\cos x-$