非凡图书

龚冬保教授考研数学

2006版

数学考研

数学二

根据2006年考研大纲全新编写

模拟考试试卷

龚冬保 主编

10套题

赠答题卡

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

龚冬保教授数学考研系列

数学 考研

2006 版

模拟考试试卷

数学二

（共 10 套，附解答与评分参考）

主编　龚冬保

王寿生　褚维盘　魏战线（高等数学）

崔荣泉（线性代数）

西安交通大学出版社

· 西安 ·

图书在版编目(CIP)数据
数学考研模拟考试试卷(数学二)2006版 / 龚冬保主编.—西安:西安交通大学出版社,2005.10
ISBN 7-5605-1591-6

Ⅰ.数...　Ⅱ.龚...　Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-试题　Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第082616号

书　　名	数学考研模拟考试试卷(数学二)2006版
主　　编	龚冬保
出版发行	西安交通大学出版社
地　　址	西安市兴庆南路25号(邮编:710049)
电　　话	(029)82668357　82667874(发行部)
	(029)82668315　82669096(总编办)
印　　刷	西安新视点印务有限责任公司
字　　数	188千字
开　　本	787mm×1092mm　1/16
印　　张	8
版　　次	2005年10月第4版　2005年10月第1次印刷
书　　号	ISBN 7-5605-1591-6 / O·191
定　　价	48.00(本卷12.00元)

龚冬保教授重要提示

本模拟试卷是在分析历年考卷基础上，严格按《2006 年数学考试大纲》的要求，以及新的试卷模式来编制的。为更好地发挥它们的作用，特作以下提示：

1. 考前演习为实战　模拟试卷认真练

一定要按考试的要求，像考试那样去做每一套模拟试卷。比如控制时间，可用闹钟定时到 10:45，而于 8:00 打开试卷开始“考试”，闹铃响时便“交卷”。稍后对照着“解答与评分参考”为自己评分并作小结。

对自己所考的 10 套模拟卷，至少隔 3 天，最多隔一周做上一套，效果比连续做要好。

2. 数学一二三四卷　卷卷不漏为求全

比如考数学一的读者，除了像考试一样做相关的 10 套题之外，还应当练一练数学二、三、四各模拟试卷中与数学一考试内容相关的题。因为尽管我们编写的各模拟题力求全面覆盖各考点和解题方法，但 10 套试卷题量有限，难免还有遗漏，参考一下其余试卷，可以扩大覆盖面。

3. 做题做到巧准快　总结要求精细全

做每道题都要想巧妙的方法，在不出错的前提下快速完成，这是巧准快的意思。每做完一套试卷后，要认真总结分析，对于不会做的题检查存在哪些未复习到的知识空白；对于做错的题，检查错在哪里：概念？方法？还是运算？对于做对的题，总结一下还有没有更好的方法，更快的途径。为此，我们特为设计了总结记录表，希望认真分析并记录。这是精细全的方法。

4. 知己知彼信心增　沉着应试展才能

每做一套模拟题后，不仅要作解题方法方面的总结，还要从应试策略方面不断做调整。从 2004 年起试卷模式上的重大变化是客观题占 56 分。因此，加强基本运算能力，训练用最简洁的步骤做填空题；加强对基本概念的理解，用最灵活的方法做选择题，力争在 60 分钟内将这 56 分拿到手。作解答题时，要坚持先易后难的原则，即先做那些感到熟悉的、容易得分的题，后做甚至可以不做自己觉得难的个别题。也可以考虑先做概率统计的题，再作线性代数题，尤其是数学三、四的试卷中，这两部分解答题占 52 分，仅有 4 道题，一般说难度不大。熟悉这些内容的考生很容易获得这 52 分，加上客观题共有 108 分之多！我们模拟试卷估计会比正式考题难些，考前像正式考试一样去做这些题，正式考时，像平时作模拟题一样的心态去应试，方能胸有成竹。模拟题定能助你超水平发挥，充分展示你的才能，考出理想成绩。

最后，我们强调要反复做模拟题，从做第二遍起，要把练习基本功作为重点，对会做的题一定要一遍做对，不断总结不丢分和多得分的应试策略，这对模拟题做得“不太好”数学基础差的考生尤为重要，只要会做基本题，临场不慌不乱，也是能考出理想成绩的。

考研成功！

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 1	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	
试卷 2	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 3	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	
试卷 4	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 5	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	
试卷 6	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 7	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	
试卷 8	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 9	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　　分
存在问题总结：	

试卷 10	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　　分
存在问题总结：	

数学
考研

数学考研模拟考试试卷 1

数 学 二

考生注意：(1) 本试卷共三大题，23 小题，满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

<table>
<tr><td rowspan="2">题号</td><td colspan="6">一</td><td colspan="8">二</td><td colspan="9">三</td><td rowspan="2">合计</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td></tr>
<tr><td>得分</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

一、填空题(本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^3+n^2+1}+\dfrac{2^2}{n^3+n^2+2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n^2+n}\right)=$ ________.

(2) 设 $f(0)=0$，$f'(\sin x)=\sin 3x$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$ ________.

(3) 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x>0\\ ax^2+bx+c, & x\leqslant 0\end{cases}$ 二阶可导，则 $a=$ ________.

(4) 若 $y=\mathrm{e}^x$，$y=2\mathrm{e}^x$ 及 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 均是某个二阶线性微分方程的解，则此微分方程为 ________.

(5) 设四元线性非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的所有解向量中，最多有三个解向量是线性无关的，则 $r(\boldsymbol{A})=$ ________.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶正交矩阵，$|\boldsymbol{A}|<0$，已知 $|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|=-4$，则 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}|=$ ________.

二、选择题(本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分)

(7) 设 $x\to 0$ 时，$\mathrm{e}^{x\cos x^2}-\mathrm{e}^x\sim kx^n$，则( ).

(A) $n=5$，$k=-2$ (B) $n=3$，$k=-2$

(C) $n=5$，$k=-\dfrac{1}{2}$ (D) $n=3$，$k=-\dfrac{1}{2}$

(8) 设 $f(x)$ 处处可导，则( ).

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$

(D) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

(**9**) 设 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的 3 个二阶偏导数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 都存在,则在 D 内必有( ).

(A) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$　　(B) $f(x,y)$ 在 D 内连续

(C) $f(x,y)$ 在 D 内可微　　(D) $f(x,y)$ 在 D 内可导

(**10**) 方程 $3^x=2x^2+1$ 的实根个数 $n=$( ).

(A) 3　　(B) 4　　(C) 5　　(D) 6

(**11**) 设(1,3)是曲线 $y=ax^4+bx^3$ 的拐点,则此曲线过(1,3)点的切线方程为( ).

(A) $y+6x-9=0$　　(B) $6y+x-17=0$

(C) $y-6x+3=0$　　(D) $6y-x-17=0$

(**12**) $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=$( ).

(A) $\frac{\pi}{4}$　　(B) $\frac{\pi-1}{4}$　　(C) $\frac{\pi+1}{4}$　　(D) $\frac{\pi}{2}$

(**13**) 设 $y(1)=1$,且 $xy'-y=0$,则 $y(918)=$( ).

(A) 918　　(B) 459　　(C) 1038　　(D) 2754

(**14**) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(\geqslant 3)$ 阶矩阵,但 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 0,$\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$,则 $r(\boldsymbol{A})=$( ).

(A) $n-1$　　(B) $n-2$　　(C) $n-3$　　(D) 1

三、解答题(本题共 9 小题,总分 94 分)

(**15**)(**本题满分 9 分**) 计算 $\int_0^{e}\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}\mathrm{d}x$.

（16）（**本题满分 9 分**）一质点的运动轨迹是极坐标下的曲线 $r=2\theta$，而角速度 $\omega=\dot{\theta}(t)=t$，出发点为极点. 求当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时质点的速度与加速度的大小.

（17）（**本题满分 9 分**）设 $f(x,y)=\int_0^{xy}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$. 求 $\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

（18）**（本题满分 10 分）** 求均匀薄板 $D=\{(x,y)\mid\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant 1\}$ 的质心.

（19）**（本题满分 12 分）**（Ⅰ）验证 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 是微分方程 $x^4y''+2x^2y'+(1-2x)y=0$ 的一个特解；（Ⅱ）令此方程的解为 $y=z(x)\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，求此方程的通解；（Ⅲ）求此方程满足条件 $y(1)=\mathrm{e}, y'(1)=2\mathrm{e}$ 的特解 $y=y(x)$ 所表示曲线的渐近线.

（20）（本题满分 12 分）（Ⅰ）设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$，证明存在一点 $\xi > 0$ 使 $f'(\xi) = 0$.

（Ⅱ）设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 可导，且对 $x > 0$ 皆有 $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x}{1 + x^2}$. 证明存在 $c > 0$，使 $f'(c) = \dfrac{1 - c^2}{(1 + c^2)^2}$.

（21）（本题满分 12 分）设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内连续，$F(1) = 3$，且对任意的 $x > 0, y > 0$，皆有

$$\int_1^{xy} f(t)\,\mathrm{d}t = x\int_1^{y} f(t)\,\mathrm{d}t + y\int_1^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

求函数 $xf(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 的最小值.

（**22**）**（本题满分 9 分）** 设 $\boldsymbol{P}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ 3 & a & -1\\ 4 & -2 & b\end{pmatrix}$ 的特征向量.

（i）求 a,b 的值及 $\boldsymbol{P}_1$ 对应的特征值；

（ii）问 $\boldsymbol{A}$ 能否相似于对角阵，说明理由.

(23)（本题满分 12 分） 已知向量组（Ⅰ）：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 与向量组（Ⅱ）：$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(2,3,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,3)^{\mathrm{T}}$ 等价.

(i) 求矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}$；

(ii) 设 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3$，求 $(k_1,k_2,k_3)^{\mathrm{T}}$.

试卷(一)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\dfrac{1}{3}}$. 由 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{k^2}{n^3+n^2+k}\sim\dfrac{n^2}{n^3}$ 得原极限 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{n^3}=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$.

(2) $\underline{\dfrac{3}{10}}$. 由 $f'(x)=3x-4x^3$ 得 $f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-x^4$

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$$

(3) $\underline{-\dfrac{1}{24}}$. 由泰勒公式知 $1-\cos x=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{4!}x^4+\cdots$. 故 $a=-\dfrac{1}{24}$.($2a=f''_{+}(0)=-\dfrac{1}{12}$).

(4) $\underline{y''-y=0}$. 由 e^x 和 $2\mathrm{e}^x$ 均是解知，此方程为线性齐次方程；而 $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$ 是方程的解，从而知 e^x 和 e^{-x} 是两个线性无关的解. 因此得方程是 $y''-y=0$.

(5) $\underline{2}$. 设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 是三个线性无关的解向量，因此 $\boldsymbol{\xi}_1+c_1(\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2)+c_2(\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_3)$ 是非齐次方程的通解，而 $\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_3$ 是齐次方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，故 $r(\boldsymbol{A})=4-2=2$.

(6) $\underline{-4}$. 由 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$ 得 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}|$

$=|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=(-1)^4|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|=-4$.

二、选择题

(7) (C). $\mathrm{e}^{x\cos x^2}-\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{x\cos x^2-x}-1)\sim x(\cos x^2-1)\sim-\dfrac{x^5}{2}$. 故 $n=5,k=-\dfrac{1}{2}$. 选(C).

(8) (B). 用举例的排除法：令 $f(x)=x$，可排除(A)、(C)两选项；令 $f(x)=x^2$ 可排除(D)，故选(B).

注 选项(B)这样证，对任意 $M>0$，存在 x_0，当 $x>x_0$ 皆有 $f'(x)>M+|f(x_0)|$. 这时 $f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$.

故 $f(x)\geqslant(M+|f(x_0)|(x-x_0)-|f(x_0)|>M$ (只要 $x-x_0>1$).

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

(9) (D). 本题概念强，请读者注意.

(10) (A). 由观察法知 $x=0,1$，和 2 均满足方程，因此 $n\geqslant3$；又设 $f(x)=3^x-2x^2-1$. 则 $f'''(x)=3^x(\ln3)^3\neq0$. 因此，$f(x)=0$ 不可能有 4 个实根(否则与罗尔定理矛盾)，故选(A).

(11) (C). 曲线过(1,3)点，故 $a+b=3$，$y''=12a+6b=0$，$a=-3,b=6$. 这时 $y'\Big|_{x=1}=-12+18=6$，切线斜率为 6，选(C).

(12) (B). $I=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\sin^3x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\cos^3t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(\cos^2x-\sin x\cos x+\cos^2x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi-1}{4}$，选(B).

(13) (A). 由 $\dfrac{xy'-y}{x^2}=0$ 得 $\dfrac{y}{x}=c$，$c=1$，$y=x$，$y(918)=918$.