

硕士专业学位研究生入学资格考试

数学考前辅导教程

全国工程硕士专业学位教育指导委员会 组编

刘庆华 主编

编者(以姓氏笔画排序)

王飞燕 关 治 刘庆华 扈志明

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书是根据《硕士专业学位研究生入学资格考试指南》(2005年版)编写的数学辅导教材,以方便考生备考.

全书安排算术、初等代数、几何与三角、一元微积分以及线性代数5部分内容,共18章.在每章中,汇总了考试指南中所涉及的重要知识点,并通过例题加以讲解,同时,按试卷中的试题方式组织了一些典型题目.书后配备了两套模拟试题,供读者使用.

版权所有,翻印必究.举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售.

本书防伪标签采用特殊防伪技术,用户可通过在图案表面涂抹清水,图案消失,水干后图案复现;或将表面膜揭下,放在白纸上用彩笔涂抹,图案在白纸上再现的方法识别真伪.

图书在版编目(CIP)数据

数学考前辅导教程/刘庆华主编.—北京:清华大学出版社,2005.6

ISBN 7-302-11085-9

.硕... .刘... .高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 自学参考资料 .O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第050834号

出版者:清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

社总机:010-62770175

地址:北京清华大学学研大厦

邮编:100084

客户服务:010-62776969

责任编辑:刘颖

印装者:

发行者:新华书店总店北京发行所

开本:185×230 印张:22.5 字数:460千字

版次:2005年6月第1版 2005年6月第1次印刷

书号:ISBN 7-302-11085-9/O·464

印数:1~20000

定价:元

内容简介

硕士专业学位研究生入学资格考试(Graduate Candidate Test, GCT)起始于2003年,当时名为工程硕士专业学位研究生入学资格考试(简称GCT-ME)。2004年,国务院学位委员会办公室对考试大纲进行了修订,考试适用范围除原来的报考工程硕士的考生外,增加了报考农业推广和兽医专业硕士的考生,考试名称也去掉了“工程”二字。

清华大学出版社于2003年出版了由全国工程硕士专业学位教育指导委员会组织编写的《全国工程硕士专业学位研究生入学资格考试考前辅导教程》丛书,包括语文、数学、英语、逻辑共4册。2004年,除根据新大纲对考前辅导教程系列进行修订改版,并对丛书名进行相应修改外,我们又特别邀请教程系列的作者编写了《硕士专业学位研究生入学资格考试模拟试题与解析》系列,作为考前辅导教程的配套资料,供考生考前模拟训练之用。清华版GCT考前辅导用书以其权威性、针对性、严谨性和实用性,给广大考生复习和备考提供了方便,赢得了广大考生的欢迎。

2005年,GCT考试适用范围又增加了报考风景园林硕士、高等学校教师以及中等职业学校教师在职攻读硕士学位的考生。我们根据《硕士学位研究生入学资格考试指南(2005年版)》的要求,结合考生此前使用本套图书的反馈意见,对考前辅导教程系列和模拟试题与解析系列进行了修订,同时还增加了英语词汇分册,推出了这套2005年版的GCT考前辅导用书。

欢迎广大读者选用本系列图书,祝大家考试成功!

清华大学出版社

2005年5月

出版说明

我国的工程硕士专业学位是与工程师职业背景密切相关的硕士学位,该专业学位的设置主要在于培养高层次的工程技术和工程管理人才。自1997年国务院学位委员会正式通过设置工程硕士专业学位以来,已批准180个培养单位,涉及到38个工程领域,共招收工程硕士研究生12万余人,累计授予工程硕士学位人数上万人。随着工程硕士研究生教育的发展,按照党的“十六”大对教育工作提出的“坚持教育创新,深化教育改革”的总体要求,借鉴国外先进的考试办法,结合我国的实际情况,建立相适应的工程硕士研究生入学考试制度,不仅是创新人才培养的需要,是我国研究生教育规模发展的需要,是我国高等教育参与国际竞争的需要,而且还是坚持教育创新的一项重要举措,是一项具有重要意义的改革实践。因此,国务院学位委员会办公室决定,自2003年起报考在职攻读工程硕士专业学位研究生的考生,需参加全国统一组织的入学资格考试,接受综合素质的测试。

硕士专业学位研究生入学资格考试,英文名称为 Graduate Candidate Test,简称“GCT”。试卷由四部分构成:语言表达能力测试、数学基础能力测试、逻辑推理能力测试和外语运用能力测试。“GCT”试题知识面覆盖哲学、经济学、法学、教育学、文学、历史学、理学、工学、农学、医学、军事学、管理学等门类。试题重点考核考生综合能力水平和反应速度。

为配合入学考试办法的改革,全国工程硕士专业学位教育指导委员会特委托清华大学根据国务院学位委员会办公室组织制定的《硕士专业学位研究生入学资格考试指南》(2005年版)的要求和精神,组织编写了这套《硕士专业学位研究生入学资格考试(GCT)考前辅导教程》,以帮助考生在短时间内了解考试内容,提高应试水平。这套丛书考虑了应试人员的专业背景,侧重应试人员逻辑思维能力,阅读、表达及运用能力,抽象概括能力与基本运算能力等方面的提高。本丛书包含了大量的例题和习题,并附有模拟题和题解,帮助应试人员自我训练和自我检验。

清华大学继续教育学院为本丛书的出版做了大量的组织工作,清华大学出版社为本丛书的出版给予了大力的支持,各位编委付出了辛勤的劳动。在此,向所有为本书的编写、修改和出版做出过贡献的人士表示诚挚的感谢。

作为考试辅导教材,本丛书内容力求简明扼要,准确反映考试指南的要求。但由于组织者的经验和水平有限,本书难免有疏漏和不足之处,欢迎大家提出宝贵意见,以便今后

硕士专业学位研究生入学资格考试

数
学
考
前
辅
导
教
程

改进工作 .

全国工程硕士专业学位教育指导委员会

2005 年 5 月

前 言

本书是根据《硕士专业学位研究生入学资格考试指南》(2005年版)编写的数学辅导教材,以方便考生备考。

考试指南中数学部分主要测试:考生所具有的数学方面的基础知识和基本思想方法,逻辑思维能力、数学运算能力、空间想像能力以及运用所掌握的数学知识和方法分析问题和解决问题的能力。指南中数学部分具有如下的特点:

1. 内容多,战线长:包括算术、初等代数、几何与三角、一元微积分以及线性代数的基础知识,其中既有小学、中学的数学知识,也有大学的数学知识。

2. 题量大,覆盖广:数学共 25 道题,包含算术题、初等代数题、几何与三角题、一元微积分题和线性代数题共 5 部分,其中算术、初等代数、几何与三角部分的题目占 60% (即 15 道题),而一元微积分、线性代数部分的题目占 40% (即 10 道题)。

3. 时间短,题型易:这部分的考试时间为 45 分钟,平均每题用时 1 分 48 秒,因此,所有题型都设计为 4 选 1 的单项选择题。

尽管题型均为单项选择题,但要在很短的时间内选出正确的答案,就要求考生不仅要扎实地掌握所考的基础知识,而且还要灵活地运用这些基础知识来尽快地分析问题和解决问题。

在内容的组织上,我们力求简明扼要,准确地反映考试指南的要求,尽可能地适合读者备考的需要。在具体编写过程中,通过下面 3 个方面来体现上述的指导思想:

1. 汇总考试指南中所涉及的重要知识点,其中包括基本概念、基本理论以及基本方法,并结合例题加强对重要知识点的讲解和分析,以便为考生提供备考的基本理论基础。

2. 通过典型问题的分析,细化所汇总的基本概念、基本理论和基本方法,以帮助读者突破难点,提高分析问题和解决问题的能力,并熟习考试题型。

3. 为了便于读者全面地检验复习的情况,最后配备了两套模拟试题,供全面复习后的读者使用。同时,与此教程配套出版了《硕士专业学位研究生入学资格考试数学模拟试题与解析》,供考生们选用。

本教材采用互动式的教学方式,读者可参照由本教材编写老师为主主讲的工程硕士“新大纲辅导网络课程”以及查询最新考试消息,详情请登录:“清华在线(www.qinghua-

硕士专业学位研究生入学资格考试

数
学
考
前
辅
导
教
程

online.com;www.tsinghuaonline.com)”。

由于编者的经验和水平所限,书中难免有疏漏和不足之处.欢迎广大读者、辅导教师及各方面的专家批评指正。

编 者

2005年5月

目 录

第 1 部分 算 术

第 1 章 算术	1
1.1 数的概念、性质和运算	1
1 数的概念	1
2 数的整除	1
3 数的四则运算	2
4 比和比例	2
1.2 应用问题举例	3
1 整数和小数四则运算应用题	3
2 分数与百分数应用题	7
3 简单方程应用题	9
4 比和比例应用题	10
1.3 典型例题	12

第 2 部分 初 等 代 数

第 2 章 数和代数式	25
2.1 实数和复数	25
1 实数、数轴	25
2 实数的运算	26
3 复数	26
2.2 代数式及其运算	28
1 整式及其加法与乘法	28
2 因式分解	28
3 整式的除法	29
4 分式	31
5 根式	32
2.3 典型例题	32
第 3 章 集合、映射和函数	35
3.1 集合	35

1	集合的概念	35
2	集合的包含关系	36
3	集合的基本运算	36
3.2	映射和函数	37
1	映射的概念	37
2	函数	37
3	反函数	39
4	函数的单调性、奇偶性和周期性	39
5	幂函数、指数函数和对数函数	40
3.3	典型例题	43
第4章	代数方程和简单的超越方程	46
4.1	概念	46
4.2	一元一次方程	46
4.3	二元一次方程组	46
4.4	一元二次方程的性质	48
1	判别式	48
2	根和系数的关系	48
3	二次函数的图像和一元二次方程的根	48
4.5	解一元代数方程	50
1	配方法	50
2	公式法	50
3	分解因式法	50
4.6	根的范围、方程的变换	51
1	确定根所属的区间	51
2	方程的变换	52
4.7	典型例题	53
第5章	不等式	56
5.1	不等式的概念和性质	56
1	不等式的概念	56
2	不等式的基本性质	56
3	基本的不等式	56
4	解不等式	57
5.2	解含绝对值的不等式	57
5.3	解一元二次不等式	58

5.4	解分式不等式	60	目 录
5.5	解简单的无理不等式	61	
5.6	利用函数的性质和图像解不等式	62	
5.7	典型例题	63	
第 6 章	数列、数学归纳法	67	
6.1	数列的基本概念	67	
6.2	等差数列	69	
6.3	等比数列	71	
6.4	数学归纳法	73	
6.5	典型例题	74	
第 7 章	排列、组合、二项式定理和古典概率	79	
7.1	排列和组合	79	
1	基本概念	79	
2	排列数和组合数公式	79	
3	例题	80	
7.2	二项式定理	82	
7.3	古典概率问题	83	
1	基本概念	83	
2	等可能事件的概率	85	
3	互斥事件有一个发生的概率	86	
4	相互独立事件同时发生的概率	87	
5	独立重复试验	88	
7.4	典型例题	88	

第 3 部分 几何与三角

第 8 章	常见几何图形	92
8.1	常见平面几何图形	92
1	三角形	92
2	四边形	93
3	圆和扇形	94
4	平面图形的全等和相似关系	94
8.2	常见空间几何图形	96
1	长方体	96
2	圆柱体	96

	3 正圆锥体	96
	4 球	96
8.3	典型例题	98
第9章	三角学的基本知识	105
9.1	三角函数	105
	1 角和三角函数	105
	2 同角三角函数的关系	106
	3 诱导公式	106
	4 三角函数的图像和性质	107
	5 例题	108
9.2	两角和与差的三角函数	109
	1 两角和与差公式	109
	2 倍角与半角公式	109
	3 例题	109
9.3	解斜三角形	110
9.4	反三角函数	111
9.5	解简单的三角方程	113
9.6	典型例题	114
第10章	平面解析几何	117
10.1	平面向量	117
	1 基本概念	117
	2 向量的加法与数乘	117
	3 向量的内积	118
	4 有向线段的定比分点	119
10.2	直线	120
	1 直线的方向向量、倾斜角和斜率	120
	2 直线的方程	120
	3 两条直线的位置关系	121
10.3	圆	124
10.4	椭圆	125
10.5	双曲线	126
10.6	抛物线	127
10.7	例题	128
10.8	典型例题	129

第 4 部分 一元函数微积分

目

录

第 11 章	极限与连续	134
11.1	函数及其特性	134
1	函数的定义	134
2	函数的特性	135
3	复合函数与初等函数	136
11.2	数列的极限	137
1	数列的极限	137
2	数列极限的性质	138
3	数列极限的四则运算	138
4	数列极限存在的准则	138
11.3	函数的极限	139
1	函数极限的定义	139
2	函数极限的性质	140
3	函数极限的运算法则	140
4	两个重要极限	141
11.4	无穷小量与无穷大量	143
1	无穷小量与无穷大量的定义	143
2	无穷小量与无穷大量的关系	144
3	无穷小量与函数极限的关系	144
4	无穷小量的性质	144
5	无穷小量的比较	144
6	等价无穷小量替换定理	145
11.5	函数的连续性	146
1	连续的定义	146
2	函数间断点及分类	147
3	连续函数的运算法则	147
4	连续函数在闭区间上的性质	149
11.6	典型例题	149
第 12 章	一元函数微分学	158
12.1	导数的概念	158
1	导数的定义	158
2	导数的几何意义	160

	3 可导性与连续性的关系	160
12.2	导数公式与求导法则	161
	1 导数公式	161
	2 四则运算的求导法则	162
	3 复合函数的求导法则	164
12.3	高阶导数	167
12.4	微分	170
	1 微分的定义	170
	2 微分与导数的关系	170
	3 微分的几何意义	170
	4 微分基本公式和四则运算法则	171
	5 一阶微分形式不变性	171
12.5	中值定理	172
	1 罗尔定理	172
	2 拉格朗日中值定理	173
12.6	洛必达法则	174
12.7	函数的单调性与极值	178
	1 函数单调性的判定法	178
	2 函数的极值及判断	178
12.8	函数的最大值、最小值问题	181
12.9	曲线的凹凸、拐点及渐近线	183
	1 曲线的凹凸、拐点	183
	2 曲线的渐近线	184
12.10	典型例题	185
第 13 章	一元函数积分学	198
13.1	不定积分的概念和简单的计算	198
	1 原函数、不定积分的概念	198
	2 不定积分基本计算公式	198
	3 不定积分的性质	199
13.2	不定积分的计算方法	200
	1 第一类换元法(凑微分法)	200
	2 第二类换元法	203
	3 分部积分法	206
13.3	定积分的概念及性质	209

	1 定积分的概念	209	目 录
	2 定积分的几何意义	210	
	3 定积分的性质	210	
13.4	微积分基本公式、定积分的计算	212	
	1 牛顿-莱布尼茨公式	212	
	2 变量替换法	213	
	3 分部积分法	213	
13.5	定积分的应用	218	
	1 平面图形的面积	218	
	2 旋转体体积	218	
	3 平行截面面积为已知的立体的体积	219	
	4 平面曲线的弧长	219	
13.6	典型例题	221	

第 5 部分 线性代数

第 14 章	行列式	235
14.1	行列式的概念与性质	235
	1 行列式的定义	235
	2 行列式的性质	236
	3 几个特殊的行列式	238
14.2	行列式的计算	239
14.3	典型例题	243

第 15 章	矩阵	249
15.1	矩阵及其运算	249
1	矩阵的概念	249
2	矩阵的运算	250
3	方阵的行列式	254
4	特殊矩阵	254
15.2	可逆矩阵	256
1	可逆矩阵与逆矩阵的概念	256
2	矩阵可逆的充要条件	256
3	可逆矩阵的性质	258
15.3	矩阵的初等变换	260
1	初等变换	260
2	用初等变换求可逆矩阵的逆矩阵	262
15.4	矩阵的秩	263
1	矩阵的秩的概念	263
2	矩阵的秩的计算	263
3	矩阵运算后秩的变化	264
15.5	典型例题	265
第 16 章	向量	274
16.1	n 维向量	274
1	n 维向量的定义	274
2	n 维向量的线性运算	274
16.2	向量组的线性相关性	276
1	向量的线性组合与线性表出	276
2	向量组的线性相关与线性无关	277
3	其他几个有关的结论	279
16.3	向量组的秩	280
1	向量组的等价	280
2	向量组的秩和最大线性无关组	280
3	向量组的秩和矩阵的秩的关系	282
16.4	典型例题	284
第 17 章	线性方程组	292
17.1	线性方程组的基本概念	292

			目 录
1	非齐次线性方程组	292	
2	齐次线性方程组	293	
17.2	求解齐次线性方程组	293	
1	齐次线性方程组有非零解的条件	293	
2	齐次线性方程组解的性质	293	
3	齐次线性方程组解的结构、基础解系	294	
4	消元法解齐次线性方程组	294	
17.3	求解非齐次线性方程组	298	
1	非齐次线性方程组有解的条件	298	
2	非齐次线性方程组解的性质和结构	298	
3	消元法解非齐次线性方程组	299	
17.4	典型例题	302	
第 18 章	矩阵的特征值和特征向量	309	
18.1	特征值和特征向量的基本概念	309	
1	特征值和特征向量的定义	309	
2	特征值和特征向量的计算	309	
3	特征值和特征向量的性质	312	
18.2	矩阵的相似对角化问题	313	
1	相似矩阵的定义	313	
2	相似矩阵的性质	314	
3	矩阵对角化的条件和方法	315	
18.3	典型例题	319	
	模拟试题(1)	326	
	模拟试题(2)	330	
	模拟试题答案	334	
附录 1	初等数学中的一些重要公式	335	
附录 2	微积分中的一些常用公式	338	

第 1 部分

算 术

Part 1

第 1 章 算 术

1.1 数的概念、性质和运算

1 数的概念

我们在数物体的时候,用来表示物体个数的 $1, 2, 3, \dots$ 叫做自然数.一个物体也没有,用 0 表示 0 也是自然数.自然数都是整数.

将单位“ 1 ”平均分成若干份,表示这样的一份或几份的数叫做分数.表示其中一份的数是这个分数的分数单位.分数有真分数、假分数、带分数等.

将整数“ 1 ”平均分成 10 份, 100 份, 1000 份……这样的一份或几份是十分之几,百分之几,千分之几……它们可以用小数表示.小数分有限小数、无限小数、循环小数等.

整数和小数都是按照十进制计数法写出的数,其中个,十,百……以及十分之一,百分之一……都是计数单位.各个计数单位所占的位置,叫做数位.表示一个数是另一个数的百分之几的数叫做百分数,也叫做百分率或百分比.百分数通常用“ $\%$ ”来表示.

2 数的整除

当整数 a 除以整数 $b(b \neq 0)$, 除得的商正好是整数而无余数时,则称 a 能被 b 整除或称 b 能整除 a . 当 a 能被 b 整除时,也称 a 是 b 的倍数, b 是 a 的约数. 一个数的约数的个数是有限的, 其中最小的约数是 1 , 最大的约数是它本身; 一个数的倍数的个数是无限的, 其