

数学奥林匹克小丛书·高中卷

# 数学竞赛中的组合问题

张摇垚编著

华东师范大学出版社

## 总 序



数学竞赛像其他竞赛活动一样,是青少年学生的一种智力竞赛。在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中,数学竞赛的历史最悠久、国际性强,影响也最大。我国于1956年开始举行数学竞赛,当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动,并组织出版了一系列青少年数学读物,激励了一大批青年学生立志从事科学事业。我国于1956年起参加国际数学奥林匹克,多次获得团体总分第一,并于1985年在北京成功地举办了第16届国际数学奥林匹克,这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位,为各国科学家与教育家所瞩目。

我国数学竞赛活动表明,凡是开展好的地区和单位,都能大大激发学生的学习数学的兴趣,有利于培养创造性思维,提高学生的学习效率。这项竞赛活动,将健康的竞争机制引进数学教学过程中,有利于选拔人才。由数学竞赛选拔的优胜者,既有踏实广泛的数学基础,又有刻苦钻研、科学的学习方法,其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者。在美国,数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(闵嗣庭译)、芒福德(闵嗣庭译)、奎伦(闵嗣庭译)等都是菲尔兹数学奖的获得者;在波兰,著名数论专家辛哲尔(岑嘉荛译)学生时代是一位数学竞赛优胜者;在匈牙利,著名数学家费叶尔(温宗瀚译)、里斯(甄霖译)、舍贵(甄霖译)、哈尔(甄霖译)、拉多(甄霖译)等都曾是数学竞赛获奖者。匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家,产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”,成为培养优秀人才的有力措施。

不过,应当注意在数学竞赛活动中,注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久。



# 前 言



组合数学历史悠久,早在几千年前,我国的《河图》、《洛书》中就已经涉及一些简单有趣的组合问题。近年来,由于计算机科学、编码理论、规划论、数字通讯、试验设计等学科的迅猛发展,提出了一系列需要离散数学解决的理论和实际问题,加上组合数学自身的逻辑要求提出的问题以及其他数学分支向组合数学提出的问题,使得组合数学的研究十分活跃而富有成果。解决问题的方法和技巧更是千变万化,使这一门古老的数学分支成为一门充满了活力的数学学科。

数学竞赛中出现的组合问题往往表达形式简单明了,而求解这些问题却需要敏锐的观察力、丰富的想像力和必要的技巧,通常没有一个固定的解题模式可循,而且各种难易程度的问题都非常丰富,所以各种程度的智力训练和数学竞赛中,大多离不开组合问题。

本书主要按照全国高中数学联赛对组合问题的要求而编写,全书由三部分组成,第一部分为知识篇,着重介绍了全国高中联赛中涉及到的组合数学的有关知识;第二部分为方法篇,主要介绍了全国高中联赛中解组合问题的一些常用的思想方法;第三部分为问题篇,主要对全国高中联赛中出现的得最多的几类问题,从解题思想方法上进行了初步的归纳和小结。

在例题和习题的选择方面,我们尽可能选编一些较新颖的、尤其是近几年国内外数学竞赛中相当于我国高中联赛水平的组合数学的试题,也包括了作者自己编拟的部分问题,还有个别中国数学奥林匹克(预赛)和国际中学生数学奥林匹克(预赛)中较易的问题。在本书中我们特别注意引导读者对解决问题的思想方法进行探索、分析和总结。希望通过这部分内容的学习,能使读者的数学修养以及解决有关数学竞赛中组合问题的能力有所提高。

编者

程海泉 愿月

# 目 录



## 知摇识摇篇

<b>员</b> 计数原理和计数公式	002
摇习题 员	015
<b>圆</b> 抽屉原理与平均值原理	017
摇习题 圆	025
<b>猿</b> 母函数	027
摇习题 猿	031
<b>源</b> 递推数列	032
摇习题 源	044

001

## 方摇法摇篇

<b>缘</b> 分类和分步	046
摇习题 缘	052
<b>远</b> 对应方法	053
摇习题 远	064
<b>苑</b> 算二次方法	066
摇习题 苑	072
<b>愿</b> 递推方法	073
摇习题 愿	079

怨	染色方法和赋值方法	081
摇习题 怨		086
员	反证法和利用极端原理	087
摇习题 员		092
员	局部调整方法	093
摇习题 员		099
员	构造方法	100
摇习题 员		106

### 问摇题摇篇

员	组合计数问题	108
摇习题 员		116
员	存在性问题及组合问题中的不等式的证明	117
摇习题 员		124
员	组合最值问题	126
摇习题 员		137
摇	习题解答	138

# 知识篇





## 一、加法原理和乘法原理

**加法原理** 如果做一件事,完成它有  $n$  类不同的方法,在第  $i$  类方法中有  $a_i$  种不同的方法,在第  $j$  类方法中有  $a_j$  种不同的方法,……,在第  $n$  类方法中有  $a_n$  种不同的方法,那么完成这件事共有  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  种不同的方法。

**乘法原理** 如果做一件事,完成它需要  $n$  个步骤,做第  $i$  步有  $a_i$  种不同的方法,做第  $j$  步有  $a_j$  种不同的方法,……,做第  $n$  步有  $a_n$  种不同的方法,那么完成这件事共有  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$  种不同的方法。

**例 1** 设  $S = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ , 从  $S$  中任取  $n$  个不同的数,按照从小到大的顺序排列成一个公比为正整数的等比数列,求这样的等比数列的个数。

**解** 设所求等比数列为  $a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1}$  ( $a, r \in \mathbb{N}^+, r \geq 2$ ), 则  $ar^{n-1} \leq 100, ar \leq \sqrt[n]{100} \leq \sqrt[n]{100}$ , 所以  $1 \leq r \leq 10$ , 且  $1 \leq a \leq \left\lfloor \frac{100}{r^{n-1}} \right\rfloor$ , 即公比为  $r$  的等比数列有  $\left\lfloor \frac{100}{r^{n-1}} \right\rfloor$  个。

由加法原理得满足条件的等比数列共有  $\sum_{r=2}^{10} \left\lfloor \frac{100}{r^{n-1}} \right\rfloor$  个 ( $n \geq 2$ )。

**例 2** 在各位数字都不相同的四位数中,奇数有多少个?

**解** 个位数字有 1, 3, 5, 7, 9 五种选取方式,千位数字只剩下 4 种选取方式,个位与千位数字选定后,百位数字有 4 种选取方式,十位数字则只有 3 种选取方式。于是,由乘法原理得各位数字都不相同的四位数中,奇数



摇摇解法 圆摇由 员,圆,猿,源,缘组成的没有重复数字的缘位数共有 粤<sup>缘</sup>个,其中只有万位数字为 员的数不大于 圆(猿,源),这样的缘位数有 粤<sup>缘</sup>个,故符合条件的正整数的个数是

$$\text{粤}^{\text{缘}} \text{原} \text{粤}^{\text{缘}} \text{越缘! 原原! 越怨援}$$

### 三、可重复的排列与组合

可重复的排列摇从 灶个不同元素中取 皂个元素(同一元素允许重复取出)按照一定的顺序排成一行,叫做从 灶个不同元素中取 皂个元素的可重复排列,这种排列的个数为 灶<sup>皂</sup>援

这个结论不难用乘法原理证明援

可重复的组合摇从 灶个不同元素中取 皂个元素(同一元素允许重复取出)并成一组,叫做从 灶个不同元素中取 皂个元素的可重复组合,这种组合的个数为 悦<sub>灶</sub><sup>皂</sup>援

证明摇用 员,圆, …, 灶表示 灶个不同元素,这时从这 灶个不同元素中取 皂个元素的可重复组合具有下列形式:

$$\{ \text{蚤}, \text{蚤}, \dots, \text{蚤} \} \text{ (员} \leq \text{蚤} \leq \text{蚤} \leq \dots \leq \text{蚤} \leq \text{灶) 援}$$

因为允许重复选取,其中等号可以成立援

将上述每个组合自左向右逐个分别加上 :园, 员, 圆, …, (皂原员), 得到 { 躁, 躁, …, 躁 } 其中 躁越蚤, 躁越蚤垣员, …, 躁越蚤垣(皂原员), 满足 员≤ 躁约躁约… 约躁≤ 灶垣皂原员, 而 { 躁, 躁, …, 躁 } 恰是从 灶垣皂原员个不同元素 员, 圆, 猿, …, 灶垣皂原员 中取 皂个不同元素的组合, 所以从 灶个不同元素中取 皂个元素的可重复的组合数为 悦<sub>灶垣皂原员</sub><sup>皂</sup>援

不全相异元素的全排列摇如果 灶个元素中, 分别有 灶<sub>1}, 灶<sub>2}, …, 灶<sub>灶} 个元素相同, 且 灶<sub>1}垣灶<sub>2}垣…垣灶<sub>灶}越灶, 则这 灶个元素的全排列称为不全相异元素的全排列,</sub></sub></sub></sub></sub></sub>

其不同的排列个数记为  $\binom{\text{摇摇摇灶}}{\text{灶摇灶摇…摇灶}}$  则  $\binom{\text{摇摇摇灶}}{\text{灶摇灶摇…摇灶}}$  越  $\frac{\text{灶!}}{\text{灶!} \cdot \text{灶!} \cdot \dots \cdot \text{灶!}}$  援

证明摇设符合条件的排列数为 枣, 因为每类相同元素交换排列顺序, 仍属于同一种排列, 如果每类元素都换成互不相同的元素, 则有 灶<sub>1}! · 灶<sub>2}! · … · 灶<sub>灶}! 种变化, 于是由乘法原理得 灶个不同元素的排列数为 枣 · 灶<sub>1}! · 灶<sub>2}! · … · 灶<sub>灶}! 而实际上 灶个不同元素的排列数应为 灶!, 于是得 枣 · 灶<sub>1}! · 灶<sub>2}! · … · 灶<sub>灶}! 越灶!, 故有</sub></sub></sub></sub></sub></sub></sub></sub></sub>

$$\text{枣越} \binom{\text{摇摇摇灶}}{\text{灶摇灶摇...摇灶}} \text{越} \frac{\text{灶!}}{\text{灶!灶!...灶!}} \text{援}$$

多组组合把灶个相异元素分为噪噪≤灶个不同的组,其中第蚤组有灶个元素(蚤越员,圆,...,噪,灶,垣灶,垣...垣灶,越灶),则不同的分组方法的种数为

$$\text{为} \binom{\text{摇摇摇灶}}{\text{灶摇灶摇...摇灶}} \text{越} \frac{\text{灶!}}{\text{灶!灶!...灶!}} \text{援}$$

证明摇从灶个元素中取出灶个元素有悦灶种方法,从剩下灶原灶个元素中取出灶个元素有悦灶原灶种方法,再依次选出灶, ..., 灶个元素,分别有悦灶原灶, ..., 悦灶原灶种方法,故由乘法原理得不同的分组方法的种数是

$$\begin{aligned} & \text{摇悦灶} \cdot \text{悦灶原灶} \cdot \dots \cdot \text{悦灶原灶} \\ & \text{越} \frac{\text{灶!}}{\text{灶!(灶原灶)!}} \cdot \frac{\text{(灶原灶)!}}{\text{灶!(灶原灶原灶)!}} \cdot \dots \\ & \frac{\text{(灶原灶原...原灶)!}}{\text{灶!(灶原灶原...原灶原灶)!}} \\ & \text{越} \frac{\text{灶!}}{\text{灶!灶!...灶!}} \end{aligned}$$

摇摇注意摇多组组合与不全相异元素的全排列的计数公式完全相同,但它们的组合意义是不相同的援我们也可用前面在证明不全相异元素的全排列公式的方法来证明多组组合公式,我们把这个证明留给读者自己去完成援

例源摇从银行中取出伍角、壹元、贰元、伍元、拾元、伍拾元、壹百元的纸币共员张,共有多少种不同的取法?

解摇本题为从苑种不同的纸币中取员种纸币可重复的组合数,依可重复的组合数公式得不同的取法数目为

$$\text{悦苑} \text{越悦苑越} \frac{\text{员伊员伊员伊员伊员伊员伊员}}{\text{员伊圆伊猿伊源伊缘伊远}} \text{越愿伊愿援}$$

摇摇例缘摇把灶个不同的球,分别装入皂个盒子中,使其中皂个盒子中都有毒个球,皂个盒子中都有毒个球, ..., 皂个盒子中都有毒个球援这里皂越皂,垣皂,垣...垣皂,灶越皂,毒垣皂,毒垣...垣皂,毒,求下列情况下各有多少种不同的放法援

- (员) 盒子均不相同(即可辨);
- (圆) 装有相同数目的球的盒子相同(即不可辨)援

解(员) 我们先考虑把 灶个球放入 皂个盒内都作直线排列,其排列数为 灶! 我们把这种排列的产生分为下列几步:

第 员步:将 灶个球放入 皂个盒内,符合题目要求,设有 枣种放入法;

第 圆步:将 皂<sub>员</sub>个盒子中的每个盒内均放有的 煮<sub>员</sub>个球作直线排列,有 (煮<sub>员</sub>!)<sup>皂<sub>员</sub></sup>种排法;

第 猿步:将 皂<sub>圆</sub>个盒子中的每个盒子内均装有的 煮<sub>圆</sub>个球都作直线排列,有 (煮<sub>圆</sub>!)<sup>皂<sub>圆</sub></sup>种排法;

……

第 噪垣员步:将 皂<sub>噪垣员</sub>个盒子中的每个盒子内均装有的 煮<sub>噪垣员</sub>个球都作直线排列,有 (煮<sub>噪垣员</sub>!)<sup>皂<sub>噪垣员</sub></sup>种排法.

由乘法原理得

$$\text{枣} = (煮_1!)^{皂_1} \cdot (煮_2!)^{皂_2} \cdot \dots \cdot (煮_{噪垣员})^{皂_{噪垣员}},$$

故符合条件的放法数目为

$$\text{枣} = \frac{\text{灶!}}{(煮_1!)^{皂_1} (煮_2!)^{皂_2} \dots (煮_{噪垣员})^{皂_{噪垣员}}}$$

解(圆) 因为装有相同个数球的盒子不可辨(它们之间交换顺序是同一种装球方法),故符合题意的方法数为

$$\frac{\text{灶!}}{(皂_1!) (皂_2!) \dots (皂_{噪垣员}!)}$$

例 将 猿面红旗、源面蓝旗、圆面黄旗依次悬挂在旗杆上,问可以组成多少种不同的标志?

解 由不全相异元素的全排列公式得所求标志数目为

$$\frac{(猿+源+圆)!}{猿!源!圆!} = \frac{10!}{猿!源!圆!}$$

例 从 灶(灶 ≥ 远)名乒乓球选手中选拔出 猿对选手准备参加双打比赛,问共有多少种不同的方法?

解 从 灶名选手中选出 远名选手有  $C_n^6$  种方法,将这 远名选手分成 猿个不同的组,每组 圆名有  $\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{3!}$  种方法,但 猿对选手是不计顺序的,故所求的方法数应为



之间至少有两男同学,那么共有多少种不同的围圈跳舞的方法?

解:首先让每位女同学选择两名男同学作为她的舞伴,一人排在她左侧,另一人排在她右侧.由于各女同学互不相同,故第1名女同学有  $C_4^2$  种选法,第2名有  $C_3^2$  种选法,……,一共有  $C_4^2 \cdot C_3^2 \cdot \dots \cdot C_2^2$  种“配对”方法.

将每名女同学和她的舞伴看成一组,剩下  $C_4^2 \cdot C_3^2 \cdot \dots \cdot C_2^2$  名男同学每人看成一组,一共有  $C_4^2 \cdot C_3^2 \cdot \dots \cdot C_2^2$  组.把这  $C_4^2 \cdot C_3^2 \cdot \dots \cdot C_2^2$  组排成一圈,共有  $(C_4^2 \cdot C_3^2 \cdot \dots \cdot C_2^2 - 1) \cdot C_4^2 \cdot C_3^2 \cdot \dots \cdot C_2^2$  种排法.由乘法原理得满足条件的排列数为

$$(C_4^2 \cdot C_3^2 \cdot \dots \cdot C_2^2 - 1) \cdot C_4^2 \cdot C_3^2 \cdot \dots \cdot C_2^2$$

## 五、一类不定方程的非负整数解的个数

不定方程  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$  ( $x_i \in \mathbb{N}$ ) 的非负整数解  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的个数为  $C_{m+n-1}^{n-1}$ .

证明:将方程  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$  的一组非负整数解  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 对应于一个由  $m$  个“○”和  $n-1$  条竖线“|”组成的排列

$$\underbrace{\text{○} \text{○} \dots \text{○}}_{x_1 \text{ 个}} \underbrace{| \text{○} \text{○} \dots \text{○}}_{x_2 \text{ 个}} \dots \underbrace{| \text{○} \text{○} \dots \text{○}}_{x_n \text{ 个}},$$

其中第一条竖线“|”左侧有  $x_1$  个圈“○”,第  $i$  条竖线“|”与第  $i+1$  条“|”之间有  $x_i$  个圈“○” ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ), 第  $n$  条竖线“|”右侧有  $x_n$  个圈“○”.这个对应是一个一一对应,故不定方程  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$  的非负整数解  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的个数等于  $m$  个圈“○”和  $n-1$  条竖线“|”共  $m+n-1$  个元素的直线排列的个数  $C_{m+n-1}^{n-1}$ .

注意:不定方程  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$  的非负整数解的个数与可重复组合的计数是相同的.

下面给出例 5 的另一种解法.

解法二:以女同学为组长,  $C_4^2$  位男同学分入  $C_4^2$  个组,每组至少要有两位男同学,且记各组内男同学数分别为  $x_1, x_2, \dots, x_{C_4^2}$ , 则分组的方法数等于不定方程

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{C_4^2} = m, \quad x_i \geq 2 \quad (i=1, 2, \dots, C_4^2) \quad (1)$$

的整数解的个数,令  $y_i = x_i - 2$  ( $i=1, 2, \dots, C_4^2$ ) 则

$$y_1 + y_2 + \dots + y_{C_4^2} = m - 2C_4^2, \quad y_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, C_4^2) \quad (2)$$

故①的整数解的个数等于②的非负整数解的个数,即男同学分入远个组,每组至少圆人的方法数为悦援个组排成一个圆圈有缘种方法(这时女同学排在每组的首位,她的位置已排定),又缘个男同学站入的方法数为粤,故满足条件的排列数为悦·缘!·粤

例 求各位数字之和等于 15 的猿位数的个数

解 设三位数的百位数字、十位数字、个位数字分别为 曾, 曾, 曾, 则

$$\text{曾垣曾垣曾} \leq 15, \text{曾} \geq 1, \text{曾} \geq 0, \text{曾} \geq 0 \quad ①$$

令 曾越曾原员, 曾越曾, 曾越曾, 则

$$\text{曾垣曾垣曾} \leq 12, \text{曾} \geq 0 \quad ②$$

于是①的整数解的个数等于②的非负整数解的个数,但①的下列缘个整数解(曾, 曾, 曾):(15, 0, 0), (10, 5, 0), (10, 0, 5), (5, 10, 0), (5, 0, 10)不组成猿位数,故符合条件的猿位数的个数为悦原缘越远个

## 六、容斥原理

容斥原理 设粤, 粤, ..., 粤为有限集合, 用渣表示集合粤中的元素个数, 那么

$$\text{渣}_{\text{粤} \cup \text{粤} \cup \dots \cup \text{粤}} = \text{渣}_{\text{粤}} + \text{渣}_{\text{粤}} + \dots + \text{渣}_{\text{粤}} - \sum_{\text{员} < \text{噪} < \text{灶}} \text{渣}_{\text{粤} \cap \text{粤}} + \sum_{\text{员} < \text{噪} < \text{灶}} \text{渣}_{\text{粤} \cap \text{粤} \cap \text{粤}} - \dots + (-1)^{\text{灶}+1} \text{渣}_{\text{粤} \cap \text{粤} \cap \dots \cap \text{粤}} \quad ①$$

证明 若葬属于粤, 粤, ..., 粤中一个集合, 不妨设葬属于粤, 粤, ..., 粤(员 ≤ 噪 ≤ 灶)而不属于其他集合, 是葬在①式左端计算了一次, 而在右端的第一个和中计算了悦次, 在第圆个和中计算了悦次, ..., 可见葬在右端算式中, 它被计算的总次数为

$$\begin{aligned} & \text{悦原悦垣悦原} \dots \text{垣(原员)} \\ & \text{越悦原(悦原悦垣} \dots \text{垣(原员)} \\ & \text{越员原(员原员)} \\ & \text{越员} \end{aligned}$$

若葬不属于粤, 粤, ..., 粤, 则显然葬在①式两端计算的次数都为园, 这表明①

式右端的确表示至少属于  $A_1, A_2, \dots, A_n$  中一个集合的元素的总数  $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$  从而①式成立

上述证明①式成立的方法叫做贡献法

逐步淘汰原理(筛法公式) 设  $S$  是有限集合,  $A \subset S$  ( $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ),  $A$  在  $S$  中的补集为  $\bar{A} = \{s \in S \mid s \notin A\}$  则

$$|A \cap \bar{A}| + |A \cap A| = |A| \quad (1)$$

$$|A \cap \bar{A}| + |A \cap A| = |A| \quad (2)$$

证明 因为  $A \cup \bar{A} = S$  且  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ , 由集合论中德·摩根律, 我们有

$$\bar{A} = (A \cup \bar{A}) \setminus A = S \setminus A$$

由上述两式及①式即得②式

公式①和②都源于同一思想, 即不断地使用包含与排除, 逐步筛去重复的计数, 因此, 这两个公式又统称为包含与排除原理, 今后我们统称为容斥原理

例 1 在小于 100 的正整数中, 既不被 3 整除又不被 5 整除的数有多少个? (第 29 届莫斯科数学奥林匹克试题)

解 记  $S = \{1, 2, \dots, 100\}$ ,  $A = \{x \in S \mid x \text{ 被 } 3 \text{ 整除}\}$ ,  $B = \{x \in S \mid x \text{ 被 } 5 \text{ 整除}\}$ , 于是, 我们要求的个数即是  $|S \setminus (A \cup B)|$ , 由筛法公式有

$$|S \setminus (A \cup B)| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

$$= 100 - \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{15} \right\rfloor$$

$$= 100 - 33 - 20 + 6 = 53$$

例 2 (伯努利装错信笺问题) 有  $n$  封不同的信和  $n$  个配套的写有收信人地址的信封, 现将  $n$  封信一对一地套入到  $n$  个信封中去, 结果发现没有一封信套对(即每封信都没有按地址套入其应套入的信封), 问有多少种不同的套法?

解 设  $S$  是所有套法组成的集合, 则显然有  $|S| = n!$ . 我们把每封信和对应的信封都分别用  $1, 2, \dots, n$  进行编号, 并记  $A_i = \{s \in S \mid s \text{ 为第 } i \text{ 封信恰套入第 } i \text{ 个信封}\}$  的所有套法构成的集合, 故所求的方法数即为  $|S \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)|$  而易知

$$|A_i| = (n-1)! \quad (1 \leq i \leq n),$$

