

数学奥林匹克小丛书·初中卷

数学竞赛中的应用题

叶声扬 胡 军 李建华 编著

华东师范大学出版社

总 序



数学竞赛像其他竞赛活动一样,是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中,数学竞赛的历史最悠久、国际性强,影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛,当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动,并组织出版了一系列青少年数学读物,激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克,多次获得团体总分第一,并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克,这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位,为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明,凡是开展好的地区和单位,都能大大激发学生的学习数学的兴趣,有利于培养创造性思维,提高学生的学习效率.这项竞赛活动,将健康的竞争机制引进数学教学过程中,有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者,既有踏实广泛的数学基础,又有刻苦钻研、科学的学习方法,其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国,数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者;在波兰,著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者;在匈牙利,著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家,产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”,成为培养优秀人才的有力措施.

不过,应当注意在数学竞赛活动中,注意普及与提高相结合,而且要以普

及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然,现在有些人过于关注数学竞赛的成绩,组织和参与都具有很强的功利目的,过分扩大数学竞赛的作用,这些都是不正确的,违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因,需要逐步加以克服,不必因为有某些缺点,就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书,规模大、专题细.据我所知,这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述,而且对竞赛题作了精到的分析解答,不少出自作者自己的研究所得,是一套很好的数学竞赛专题教程,也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员,不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献,为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上,策划组织了这套丛书,花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作,并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

002

王元,著名数学家,中国科学院院士,曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

◎ 总 序

目 录



1 解答应用题的一般思路	001
1.1 数学模型与数学建模	001
1.2 解答应用题的思维方法	005
习题 1	008
2 解应用题中“建模”的思维策略	011
2.1 捕捉关键 联想转化	011
2.2 设而不求 搭桥铺路	012
2.3 直观再现 以形助数	014
2.4 借助表格 整合信息	016
2.5 提炼规律 合情推理	018
2.6 化零为整 整体突破	020
2.7 假设探路 柳暗花明	021
2.8 依托常识 顺势而上	023
习题 2	024
3 数学应用题的常见代数模型类型	027
3.1 数的应用	027
习题 3.1	031
3.2 代数式的应用	033
习题 3.2	037
3.3 一元一次方程的应用	039
习题 3.3	042
3.4 一元二次方程的应用	044
习题 3.4	048

001

3.5 分式方程的应用	050
习题 3.5	054
3.6 不定方程的应用	056
习题 3.6	060
3.7 方程组的应用	061
习题 3.7	067
3.8 不等式(组)的应用	068
习题 3.8	072
3.9 函数的应用	073
习题 3.9	080
4 数学应用题的统计、三角、几何等模型类型	084
4.1 统计与概率的应用	084
习题 4.1	089
4.2 解直角三角形的应用	091
习题 4.2	096
4.3 几何的应用	098
习题 4.3	102
4.4 计数原理的应用	104
习题 4.4	108
4.5 推理的应用	110
习题 4.5	114
习题解答	117



数学是在实际应用的需求中产生的.应用题通常是指具有实际背景的或是有实际意义的数学问题.在各类初中数学竞赛中,应用题已成为常考的一种重要题型,它是考查学生阅读理解能力、信息迁移能力和数学思想方法的实际应用能力的重要形式,也是数学教育向大众化和应用化发展的一种必然趋势.而如何将一个用文字语言叙述的应用题根据其实际意义概括抽象为一个纯粹的数学问题,同时抓住题目中所蕴含的数学信息,恰当准确地转化为一个数学模型(即建模),则成为学生解应用题的一个“瓶颈”.

001

1.1 数学模型与数学建模

应用题的一个明显特征是:文字叙述多、生活科技术语多、相关制约因素多.正是应用题本身的复杂性和数学建模的抽象性,使学生一旦遇到背景生疏、条件隐蔽的应用题,便束手无策、望题兴叹.探究其原因,主要是对数学模型建立的实践不够,未能从根本上形成解应用题的能力.解应用题的关键是建立相关的数学模型.而什么是相关的数学模型呢?

简单地说,数学模型就是用数学语言来模拟空间形式和数量关系的模型.具体地说,数学模型就是对于一个特定的对象为了一个特定目标,根据特有的内在规律,做出一些必要的简化假设,运用适当的数学工具,得到的一个数学结构.一切数学概念、公式、理论体系、算法系统、表格、图形等都可以称为数学模型.著名的“哥尼斯堡七桥问题”是众多游客始终未能解决的难题,大数学家欧拉不是到桥上去试走,而是巧妙地运用数学知识把小岛、河岸抽象成“点”,把桥抽象为“线”,成功地构建出平面几何模型,成为数学史上用数学解决实际问题的经典,为了易于理解“数学模型”的概念,请看下面几个例题.

例 1 有一种足球是由 32 块黑白相间的牛皮缝制而成,黑皮为正五边形,白皮为正六边形,且边长都相等如图 1-1,则白皮的块数是().

(2004 年太原市初中数学竞赛试题)

- (A) 22 (B) 20
(C) 18 (D) 16



图 1-1

解 设白皮有 x 块,则黑皮有 $32 - x$ 块.

因为黑皮为正五边形,所以,黑皮共有边数为 $5(32 - x)$ 条.

又因为每块白皮有 3 条边和黑皮连在一起,故黑皮共有边数还可以表示为 $3x$ 条,由此得方程

$$5(32 - x) = 3x.$$

解得 $x = 20$.

所以,选(B).

例 2 10 个人围成一圈,每人心中想一个数,并把这个数告诉左右相邻的两个人,然后每个人把左右两个相邻人告诉自己的数的平均数亮出来,结果如图 1-2 所示.问:亮 5 的人心中想的数是多少?(第八届“华罗庚杯”少年数学邀请赛初一复赛试题)

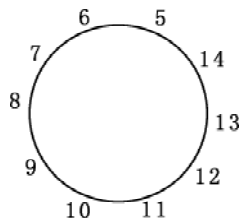


图 1-2

解 设亮 5 的人心中想的数是 x ,则亮 7 的人心中想的数是 $(6 \times 2 - x)$,亮 13 的人心中想的数是 $(14 \times 2 - x)$.亮 9 的人心中想的数是 $8 \times 2 - (12 - x) = 4 + x$.亮 11 的人心中想的数是 $12 \times 2 - (28 - x) = x - 4$.

依题意,得 $10 = \frac{(4 + x) + (x - 4)}{2}$.

解得 $x = 10$.

答:亮 5 的人心中想的数是 10.

这里,例 1 是生活应用问题,例 2 是数学游戏活动.两题的背景素材完全不同,属于不同领域的实际问题,但抛开实际意义抽象出的数学问题都是一元一次方程,两题都可归结为用一元一次方程的知识求解.

这种舍去实际问题的实际意义,从中抽象出数量之间的关系,转化为所学过的数学知识的过程,一般称为“建立数学模型”,简称“数学建模”.根据抽象出来的不同数学形式或结构,可建立相应的数学模型.一般来说转化成什么数学问题,便可称为建立了这种类型的数学模型.例 1、例 2 就属于同一类数学模型——一元一次方程模型.

对实际问题建立适当的数学模型后就可以用相应的数学知识去解答,建立的数学模型不同,解答的方法也随之而异,因此,恰当地建立数学模型对应用题的求解是十分重要的.

例 3 在某沙漠地带,汽车每天能行驶 200 千米,每辆汽车载运可行驶 24 天的汽油,现有甲、乙两辆汽车同时从 A 地出发,并在完成任务后沿原路返回.为了让甲车尽可能开出更远距离,乙在行驶一段路程后,仅留足自己返回 A 地的汽油,将其他的汽油给甲车,问甲车能开的最远距离为多少千米?(1990 年南昌市初中数学竞赛试题)

模型 1 建立方程模型

分析 1 事实上,限制甲行驶距离的条件是汽车的最大载油量,可通过分析乙车返回时,甲车的油量入手(包括乙车给甲车的油量),来考虑甲车行驶的最远距离.

甲车行驶到最远距离时,必然是这样一种情况:乙车给甲车倒油后,甲车油箱是满箱油,并且乙车开回去也正好把油耗尽.否则,会出现如下两种与题设不合的情况:①若分手时,甲车是一满箱油,而乙车开回去油箱内还剩有汽油,那么这剩下的汽油还能使甲车开得更远,这与题设不符;②若分手时,乙车刚好能返回 A 地,但甲车不是满箱油(乙车给甲车倒油后),那么,这样就说明,若乙少行一段路程,就能多给甲车一部分油,于是甲车就可以开得更远,这与题设也不符.

于是,要使甲车开得更远,必须同时满足两个条件:①甲车与乙车分手时,甲车油箱是满箱油;②乙车刚好能回到 A 地.

解法 1 设要使甲车开得最远,分手时,乙行驶了 x 天,由上述分析,得

$$(24 - 2x) + (24 - x) = 24,$$

解得, $x = 8$.

所以,甲能开的最远距离是:

$$(x + 24) \times 200 \times \frac{1}{2} = (8 + 24) \times 200 \times \frac{1}{2} = 3\,200(\text{千米}).$$

答:甲能开的最远距离为 3 200 千米.

模型 2 建立不等式模型

分析 2 由于每辆汽车最多只能载运行驶 24 天的汽油,因此当乙将返回时,乙给甲的汽油加上甲自身的汽油量不能超过 24 天的汽油.同时,乙车又必须满足返回 A 地的汽油.

解法 2 设乙行驶 x 天后返回,在乙车留足自己返回的汽油后,将其余的汽油供给甲,从甲车的最大载油容量考虑,可得

$$24 \times 2 - (2 + 1)x \leq 24. \quad ①$$

为了保证甲车尽可能行进最远,甲、乙两车不仅应尽可能行驶得远(即 x 尽可能大),而且乙车又必须留足返回 A 地的汽油,则可得

$$24 - x \geq 2x, \quad ②$$

解①②,得 $x \geq 8$ 且 $x \leq 8$.

所以 $x=8$.

所以,甲能开的最远距离是 $(x+24) \times 200 \times \frac{1}{2} = 3\,200$ (千米).

答:甲能开的最远距离为 3 200 千米.

模型 3 建立一次函数模型

解法 3 设乙车行驶 x 天后返回,甲车能开的最远距离为 y 千米.则甲、乙分手后,甲带了可行驶 $(24-x)+(24-2x)=(48-3x)$ 天的汽油.依题意,得 $48-3x \leq 24$.

所以 $x \geq 8$.

所以甲的行程 $y = (x+48-3x) \cdot 200 \times \frac{1}{2} = 4\,800 - 200x$.

因为 $y > 0$, $x \geq 8$.

所以 $x=8$ 时, y 有最大值为 3 200 千米.

答:甲车能开的最远距离是 3 200 千米.

由例 3 可知,解应用题时,可建立的数学模型并非惟一,本例中的三种模型效果相同.但函数模型不如不等式模型简便,而不等式模型又不如方程模型简明,一般地,应选择容易理解、过程简便或者自己比较熟悉的模型为宜.

从以上三例看出,数学模型实质是针对应用题的特征或数量依存关系,采用形式化的数学语言,抽象或近似地表述出来的一种数学结构.它作为一种数学结构,体现出了数学概念、符号、运算法则、公式及方法,而作为应用题的模型,又反映出了应用题的特征、数量关系及规律.因此,解答应用题只要建立起合适的数学模型,就可以运用相应的数学知识和方法,求出或证明应用题的答案或结论.由此可见,合理地建立数学模型是解答应用题的关键.

在解答应用题时,所分析问题的特性和数量之间的依存关系一旦与已学过的某种类型的数学知识的特征或数量关系相吻合,那么该应用题的数学

模型也就建立起来了.但有一点要注意,就是在解答应用题之初,我们是很难判断它属于哪种数学模型的,只有列出了数学式子,在解这个数学问题时才能明确.因此,分析、确定应用题中的数量关系是解应用题时数学建模的前提.

1.2 解答应用题的思维方法

解答应用题就是在阅读材料、理解题意的基础上,把实际问题抽象转化成数学问题,建立相应的数学模型,再利用数学知识对数学模型进行分析、研究,得到数学答案,然后再把数学答案返回到实际问题中去,获取具有实际意义的结论.其具体步骤如下:

一、审题

审题是解答应用题的起点,只有有效地审题,才能准确理解题意,弄清题目所反映的实际背景,弄清每一个名词、概念,分析已知条件,明确所求的结论,把实际问题转化为数学问题.有些学生一见应用题的文字比较长,题目中的情景比较陌生,连题目都没有看完就放弃了.实际上,这类问题往往也是对学生心理素质的严峻考验,只要你能树立信心,保持冷静,认真对待,等你认真阅读完了,就会知道大部分的应用题并不难.审题的手段有下面三个:

(一) 读题

可用加点划线的方法强调关键性的语句,再连贯读出,形成完整的基本问题;也可以用划分层次,归纳大意的方法从背景材料中提炼需要解决的实际问题;或对多个数量进行汇集、归类,借助图表显现出已知量和未知量,体现出需要解决的数学问题;或者用改写的方法对应用题去掉枝叶,抓住主干,保留题中的数量关系和空间形式,将实际问题等价转化为数学问题.

(二) 翻译

应用题建模的关键在于语言的理解和转换,即翻译,它包括:对陌生名词、概念的领悟;把通俗的文字语言、专业术语及图形语言等转化为数学符号语言.

(三) 挖掘

有的应用题中的因果关系和内在规律具有一定的隐蔽性,而它正是建模的必备条件.因此,能否挖掘出题目中蕴涵的数学信息是正确建模的重要环节,这是解题的难点.

二、建模

在审题的基础上,将已知条件与所求问题联系起来,联想数学知识和数学方法,恰当地引入参数变量或适当的坐标系,利用数学知识把问题的主要特征及关系抽象出来,建立相应的数学模型.建立数学模型是解答应用题的关键步骤,是一项具有创造性的工作.

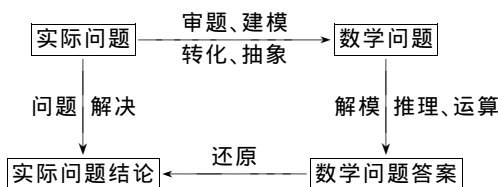
三、解模

在建立数学模型之后,运用相关的数学概念、知识及方法,或计算、或推理,得到数学模型的结果或结论.即用所学过的数学知识和方法来解答纯数学问题.

四、还原

在解模后,把用数学方法得到的结果或结论,返回到原实际问题中,确定实际问题的准确答案.

解数学应用题的一般步骤也可用如下框图表示:



例 4 中国第三届京剧艺术节在南京举行,某场京剧演出的票价有多种,某团体需购买其中票价为 6 元和 10 元的票共 140 张,并且票价为 10 元的票数不少于票价为 6 元的票数的 2 倍.问这两种票各购买多少张所需的钱最少?最少需多少钱?(2001 年江苏省初中数学竞赛 B 卷试题)

解答步骤如下:

一、审题 通过阅读题目,可知这是一个生活中的购票方案设计问题,题目中涉及的因素较多,相互制约,但通过归类,可知主要有“票价为 10 元的票数不少于票价为 6 元票数的 2 倍”限制,据此可建立一个不等关系.

二、建模 经过以上分析,可设购买 6 元的票为 x 张,则购买 10 元的票为 $(140 - x)$ 张.

根据题意,得 $140 - x \geq 2x$.

三、解模 解不等式,得 $x \leq 46 \frac{2}{3}$.

四、还原 因为 $x \leq 46 \frac{2}{3}$,且 $x \in \mathbf{N}$,所以

$$x_{\max} = 46.$$

即 6 元的票要尽可能买得多,但最多只能买 46 张 6 元票,所以 $x = 46$.

所需的钱数 $= 46 \times 6 + 94 \times 10 = 1\,216$ (元).

答:购买 46 张 6 元票,94 张 10 元票时所花钱最少,最少需要 1 216 元.

说明 本例中 $x \leq 46 \frac{2}{3}$,不能用常规要求四舍五入到 $x \leq 47$,而应是 $x \leq 46$,也就是说,在解应用题时,必须兼顾到每个量的实际意义,不能只看数学的结果,即回答问题要周全且符合实际.

从以上解题过程可以看出,对数学应用题而言,一般地,解应用题的四个步骤做为思维流程是一个也不可缺的.但在书写上,一、四两步可以舍去,甚至二、三两步也可以合并起来,以使解题简捷而流畅.我们可以通过下面的例 5 来体会.

例 5 一盒录影带可录制 2 集电视剧加 1 个小品,或者录制 2 个小品加 3 首流行歌曲,某同学准备录制 7 集电视剧,11 个小品和 20 首流行歌曲,他最少需要多少盒录影带才可能录制完所有节目?(注:每集电视剧的时间相等,每集小品的时间相等,每首歌曲的时间也相等,且每集小品的时间大于每首歌曲的时间)(2001 年重庆市初三数学竞赛试题)

解 设每盒录影带的长度为 s ,每个电视剧、小品、歌曲所占录影带的长度分别为 a 、 b 、 c . 且 $b > c$. 所需录制长度为 w .

因为 $s = 2a + b = 2b + 3c$,所以 $a = \frac{1}{2}b + \frac{3}{2}c$.

所以

$$\begin{aligned} w &= 7a + 11b + 20c \\ &= 7 \cdot \frac{b+3c}{2} + 11b + 20c \\ &= 7(2b+3c) + \frac{1}{2}b + \frac{19}{2}c \\ &= 7s + \frac{1}{2}b + \frac{19}{2}c. \end{aligned}$$

(1) 若 $\frac{1}{2}b + \frac{19}{2}c \leq 2b + 3c = s$, 即 $b \geq \frac{13}{3}c$ 时, $7s < w \leq 7s + s = 8s$, 此时需 8 盒.

(2) 若 $s = 2b + 3c < \frac{1}{2}b + \frac{19}{2}c \leq 2(2b + 3c) = 2s$, 即 $c \leq b < \frac{13}{3}c$ 时, $7s + s < w \leq 7s + 2s$, 即 $8s < w \leq 9s$, 此时需 9 盒.

(3) 若 $2(2b + 3c) < \frac{1}{2}b + \frac{19}{2}c$, 则 $b < c$, 与已知条件矛盾. 所以得以下结论:

当 $b \geq \frac{13}{3}c$ 时, 需要 8 盒; 当 $b < \frac{13}{3}c$ 时, 需要 9 盒.



习 题 1

1 红、黄、蓝三个小精灵, 在同一时间、同一地点按顺时针方向沿一条圆形跑道匀速行进. 当绕行一周时, 红精灵用 12 s, 黄精灵用 8 s, 蓝精灵用 9 s, 那么在 1 h 内, 红、黄、蓝三个小精灵共相遇 _____ 次. (起始的状态也记为 1 次) (第 13 届“希望杯”全国数学邀请赛初一第一试试题)

2 欧阳教授的存书依次用 3 个英文字母按字典排列法编号, 即 AAA、AAB、AAC、...、AAZ、ABA、ABB、...、ABZ、...、AZZ、BAA、... 已知欧阳教授的数学书籍从 HZP 编号直到 LAC 截止, 则他的数学书共有 _____ 本. (1998 年“五羊杯”数学竞赛初一试题)

3 某商场对顾客实行优惠, 规定:

- ① 若一次购物不超过 200 元, 则不予折扣;
- ② 若一次购物超过 200 元但不超过 500 元, 则按标价给予九折优惠;
- ③ 若一次购物超过 500 元, 则其中 500 元按第②条给予优惠, 超过 500 元的部分给予八折优惠.

某人两次去购物, 分别付款 168 元与 423 元, 如果他只去一次购买同样的商品, 则应付款是(). (2001 年全国初中数学联赛试题)

(A) 522.8 元 (B) 510.4 元 (C) 560.4 元 (D) 472.8 元

4 与铁路平行的一条公路上有一位行人与一位骑车人同时向南行进, 行人的速度是每小时 3.6 km, 骑车人的速度是每小时 10.8 km. 如果一列火车从他们背后开来, 且通过行人的时间是 22 秒, 通过骑车人的时间

是 26 秒,则这列火车的车身长是 _____ m. (2002 年湖北省初中数学竞赛试题)

5 在下面时间段内,时钟的时针与分针会出现重合的是(). (1998 年北京市初二数学竞赛试题)

- (A) 5 : 25 ~ 5 : 26 (B) 5 : 26 ~ 5 : 27
(C) 5 : 27 ~ 5 : 28 (D) 5 : 28 ~ 5 : 29

6 有三种物品,每件的价格分别是 2 元、4 元和 6 元,现在用 60 元买这三种物品,总共买 16 件,而钱要恰好用完,则价格为 6 元的物品最多买几件?价格为 2 元的物品最少买几件? (2002 年河南省初二数学竞赛试题)

7 象棋比赛共有奇数个选手参加,每位选手都要同其他选手比赛一盘,记分办法是胜一盘得 1 分,和一盘各得 0.5 分,负一盘得 0 分.已知其中某两名选手共得 8 分,此外,其他人的平均分为整数.求参加此次比赛的选手共有多少人? (1997 年天津市初中数学竞赛试题)

8 A 市、B 市和 C 市分别有某种机器 10 台、10 台和 8 台.现在决定把这些机器支援给 D 市 18 台、E 市 10 台.已知:从 A 市调运一台机器到 D 市、E 市的运费分别为 200 元和 800 元;从 B 市调运一台机器到 D 市、E 市的运费分别为 300 元和 700 元;从 C 市调运一台机器到 D 市、E 市的运费分别为 400 元和 500 元.

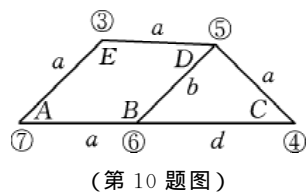
(1) 设从 A 市、B 市各调运 x 台到 D 市,当 28 台机器全部调运完毕后,求总运费 W (元)关于 x (台)的函数关系式,并求 W 的最小值和最大值;

(2) 设从 A 市调运 x 台到 D 市,B 市调运 y 台到 D 市,当 28 台机器全部调运完毕后,用 x 、 y 表示总运费 W (元),并求 W 的最小值和最大值. (1998 年广西初中数学竞赛试题)

9 某市举行的一次乒乓球邀请赛上,有三名专业选手与三名业余选手参加,比赛采用单循环方式举行,就是说每两名选手都要比赛一场,为公平起见,用以下方法记分:开赛前每位选手各有 10 分为底分,每赛一场,胜者加分,负者扣分,每胜专业选手一场的加 2 分,每胜业余选手一场的加 1 分;专业选手每负一场扣 2 分,业余选手每负一场扣 1 分.问:一位业余选手至少要胜几场,才能确保他的得分比某位专业选手的得分高?试说明理由. (第六届“华罗庚杯”少年数学邀请赛初一组决赛试题)

10 有麦田 5 块,如图中的 A、B、C、D、E.它们的产量(单位:吨)、交通状况和每相邻两块麦田的距离如图所示,要建立一座永久性打麦场,这 5 块

麦田生产的麦子都在此打场. 问建在哪块麦田上(不允许建在麦田以外的其他地方)才能使总运输量最小? 图中圆圈内的数字为产量, 直线段上的字母 a 、 b 、 d 表示距离, $b < a < d$. (2001 年湖北省黄冈市初中数学竞赛试题)





俗语道“工欲善其事,必先利其器”,那么解应用题的“器”是什么呢?解应用题建模的正确思维策略就是“器”。

解应用题不仅是经验性知识的应用,更重要的是策略性思维的提升。策略得当,事半功倍;策略不当,事倍功半。恰当的策略,可使解题绝处逢生。现介绍解答应用题的基本策略。

2.1 捕捉关键 联想转化

应用题一个明显的特征是:文字叙述长,生产、生活常识多,科技术语多,变量符号多,相关制约因素多。正因为如此,解答时要认真读题,准确理解题意,梳理信息,并筛选出题目中的“关键语句”、“关键词”,用“主题词”浓缩题意,突出问题的实质,以求问题的解决。

例 1 老王和老张各有 5 角和 8 角的邮票若干张,没有其他面值的邮票,但是他们邮票的总张数一样多,老王的 5 角邮票的张数与 8 角邮票的张数相同,老张的 5 角邮票的金额等于 8 角邮票的金额。用他们的邮票共同支付 110 元的邮资有余,但不够支付 160 元的邮资,问他们各有 8 角邮票多少张?

(2004 年第九届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛总决赛初一组一试试题)

分析 本题的关键句是:“用他们的邮票共同支付 110 元的邮资有余,但不够支付 160 元的邮资”,据此可建立不等式求解。

解 设老张有 x 张 8 角邮票,则他有 $1.6x$ 张 5 角邮票,共 $2.6x$ 张邮票,从而老王有 8 角和 5 角邮票各 $1.3x$ 张,于是可设 $x = 10y$,其中 y 为正整数。依题意,列不等式,得

$$110 < 8y \times 2 + 13y \times 1.3 < 160, \text{ 即}$$

$$110 < 32.9y < 160.$$

所以 $3 < \frac{110}{32.9} < y < \frac{160}{32.9} < 5$.

所以 $y = 4, x = 40$.

所以老张有 40 张 8 角邮票,老王有 52 张 8 角邮票.

从这个例子可以看出,抓住关键性的语句,对解题的成功起重要作用.

例 2 某同学买某种铅笔,当他买了 x 支,付了 y 元(x, y 都是整数),营业员说:“你要再多买 10 支,我就总共收你 2 元钱.这样相当于每买 30 支,你可节省 2 元钱.”求 x, y . (1999 年天津市初二数学竞赛试题)

分析 本题的关键语句是“你要再多买 10 支,我就总共收你 2 元钱”,这句话的意思是说该同学支付的 y 元只能是 1 元.然后根据题意,找出相等关系求解.

解 由题设知, y 只能是 1,原来每支铅笔的价格为 $\frac{1}{x}$ 元,多买 10 支后,每支可节省 $\frac{2}{30} = \frac{1}{15}$ 元,即每支单价为 $(\frac{1}{x} - \frac{1}{15})$ 元,此时购买了 $(x+10)$ 支笔.

由 $(\frac{1}{x} - \frac{1}{15})(x+10) = 2$,得 $\frac{10}{x} - \frac{x}{15} + \frac{1}{3} = 2$,即 $(x+30)(x-5) = 0$,

所以 $x = 5, y = 1$.

2.2 设而不求 搭桥铺路

先将文字叙述的语言翻译成数学语言.在翻译的过程中,应将相应的量用字母来表示,再集中精力研究量与量之间的关系,这是建立实际问题的数学模型的基本策略.

有些较为复杂的应用题,如果仅直接设元,很难翻译出数量关系式.此时可设出辅助元,就可以依据题意翻译出含辅助元的数量关系式,建立方程(组)或不等式(组)等等.这时辅助元起着桥梁作用.而辅助元往往在求解过程,或写出结果时可被消去.若没有引进这个辅助元,则问题解决受阻,引进后,问题就易解决了.

例 3 江堤边一洼地发生了管涌,江水不断涌出,假定每分钟涌出的水量相等,如果用两台抽水机抽水,40 分钟可抽完;如果用 4 台抽水机抽水,16 分钟可抽完,如果要在 10 分钟内抽完水,那么至少需要抽水机 _____ 台? (1999 年全国初中数学竞赛试题)