数学竞赛典型题

九年级

主摇摇编摇龚冬保
本册主编摇刘康宁摇焦和平
编摇摇者摇刘康宁摇刘崇理摇杨天旭
摇摇摇摇摇郑凤石摇胡家齐摇赵心敬
摇摇摇摇摇徐一正摇龚冬保摇焦和平
摇摇摇摇摇(以姓氏笔划为序)

陕西人民教育出版社

序

初中《数学竞赛典型题》是由陕西省数学竞赛委员会组织编写的一套品牌丛书。本丛书是在长期进行数学教学和数学竞赛辅导中积累的大量资料的基础上，经过精心地选择、加工编写而成。本丛书是一套规范的初中数学竞赛培训教材。也是初中学生学习数学的一套好的课外读物，更是中学数学教师便于使用的一套教学参考资料。

本丛书的编写原则是：“源于教材，高于教材。”

“源于教材”，系参照了最新的现行中学《数学课程标准》，选题内容覆盖了各年级相应的知识点，各年级分册成书，与教材进度同步，并注意不同层次内容的衔接，适应各年级学生的知识水平与思维特点，与中考难度系数紧密贴近。

“高于教材”，系紧扣《数学竞赛大纲》详尽地涵盖了数学的内容和题型。知识点的增加，知识面的扩大，内容的引申，新的数学原理和数学思想的介绍与渗透，教学方法的总结与运用，均通过精心编拟和选择的竞赛中常见的各种典型题来体现，题意新颖，内容丰富，题型多样，重视对数学技能与解题能力的循序渐进的训练与培养，能帮助数学特长生在数学竞赛中取得优异成绩。

本丛书的特点：以作者精心编拟和选择的竞赛中的各类典型题为主干，对其进行深入的剖析，尽可能用多种方法给出解答，既重视对“通法”的归纳和总结，以强化基础，也介绍特殊的方法与技巧，以培养提高思维的敏锐性，获得寻求解题途径的灵感和技巧。丛书还以旁注方式进行关键性的点拨，将题目涉及的知识点、重点、思路、方法、技巧、引申、推广等以更高的观点，揭示得清楚明白，以收到举一反三，触类旁通，高屋建瓴，以少胜多之功效。该丛书避免了将课本知识点的罗列，从而增加了典型题的容量。这些都是该丛书区别于众多数学竞赛读本的地方。

这套丛书由吕振琪、胡家齐二位先生策划，由陕西省主办全国数学联赛的命题组长、西安交通大学著名教授龚冬保先生执笔主编，其他创作人员均为我省特级、高级教师、数学竞赛高级教练，多为命题组成员。强大的组织和作者阵容为该书提供了可靠的质量保障。

愿广大数学爱好者通过阅读这套丛书，积累知识，启迪智慧，获得成功。

陕西省数学竞赛委员会
圆园园源年 缘月 摇摇

前摇摇言

你一定曾享受过解出数学难题的欢乐，但更多的是为做不出题而苦恼！是啊，数学就是这样令人又爱又怕，却又是极其重要的基础课程，学不好数学，很难成就高质量的、优秀的人才。于是许多人不约而同地陷入了“题海”，在茫茫题海里饱受痛苦的折磨。

有没有办法使我们得到解脱？是我们从事数学教学多年的本书编者共同思考过的问题，积多年的经验教训，试写了“典型题”这部书以奉献给读者，力图以一定量的例题，展示解数学题的思路、技巧和方法，并以旁注揭示其要领。我们坚信，只要读者把我们的例题当习题，反复演练，必能起到举一反三，触类旁通的效果。

以下分别对使用本书的教师和学生提几点建议。

致教师

使用本书时，突出一个“练”字，建议用“精讲—导练—独立练—小结”的方式进行教学辅导。

精讲摇每一章精选书上几道题，讲如何从分析题目条件入手去寻找解题切入点，剖析解题的技巧与方法，如要用到学生较生疏或还没学到的知识，可以先介绍一下，必要时在讲完这些例题之后给学生讲一下。总之要把解题思路、方法讲深讲透，对解题过程可引导学生看书就行了。

导练摇在精讲基础上，把书上例题当课堂练习题，要求学生不看书上解答先自己作，不会时再看书，待多数学生完成这些题后，再让一些学生上台讲几道题的解法和体会，并展开讨论，最后由教师讲评。

独立练摇对书上每章后的独立练习题，可作为课后作业，要求学生尽量不看书上的参考解答独立完成，遇到不会的题，可以留在脑子里，有空便想一想，想出了再做，这样还有利于培养抽象思维能力。

小结摇每进行一章，要求学生写出对哪些题的解法最有体会及哪些题没搞懂。教师再针对学生情况作小结，并多介绍一些学生的有新意的解题方法。

致学生

员摇请把书中例题当习题，先自己解答，不会了才看书，觉得会了合上书再做，对每道题要反复做，直到领会了解题思路与方法。

圆摇一般教科书上没讲到的概念、定理、公式，会在本书中的例题中出现。对有些知识，如您还不太了解，可问问周围同学或老师。

猿摇本书有以下特点，请同学们注意：

创见性摇不少例题有多种解法，有的还是一般书上见不到的。同学们在搞懂了书中解法基础上，也要多想想还有无别的解法。

新颖性摇开卷讲题，还有旁注是本书特色之一。同学们一定不要放过这些旁注，而总要问这道题书上为什么要这样解，这种解法是怎样想到的，从中学到了哪些新的解题思路与方法。

开放性摇解数学题主要要从分析题目条件与结论入手，而不是生套“公式”。因此不要受知识约束，对个别题我们甚至介绍了用高中知识的方法；有些例题还引导出了高中的知识，比如明白地导出了 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 的三角函数公式；不过大多数题是隐含着高中

知识，如有这道题这样解：杂灶越员垣员/圆垣员/圆圆垣…垣员/圆灶原员

员/圆杂灶越员/圆垣员/圆圆垣…垣员/圆灶原员垣员/圆灶

两式相减得：员/圆杂灶越员原员/圆灶，杂灶越圆原员/圆灶原员，就埋伏着等比数列求和的公式：

杂灶越员垣择垣择圆垣…垣择灶原员

择杂灶越择垣择圆垣…垣择灶原员垣择灶援

故摇（员原择）杂灶越员原择灶，员垣择垣择圆垣…垣择灶原员越员原择灶/员原择援

两边同乘员原择又得乘法公式：（员原择）（员垣择垣择圆垣…垣择灶原员）越员原择灶援

令择越遭/葬，还可得到摇葬灶原遭灶越（葬原遭）（葬灶原员垣葬灶原圆遭垣…垣葬遭灶原圆垣遭灶原员）的因式分解公式。当然，我们在书中并没走这么远，“天高任鸟飞”同学们在用本书时，多想想一些例题及解题方法可不可以推广，怎样推广等等问题，您就会逐渐学会在数学的殿堂中自由翱翔。

主动性摇学习的一个重要方法是争取主动，即不受课本约束，有时还可由书上解题的启发，抓住知识间的联系，自己编题自己作。如自作乘法题：（曾原赠垣责）（曾垣圆赠原责）越曾圆垣曾赠原圆赠圆原曾垣猿赠原责圆，再用种种方法反过来作因式分解，比如用待定系数法时，令曾圆垣曾赠原圆赠圆原曾垣猿赠原责圆越（曾原赠垣葬）（曾垣圆赠垣责圆/葬），只要求一个葬，令曾越赠越员，立即可得葬越责而完成这道因式分解题。您不妨多试试，许多问题都可做到自己编题自己作，久之，您一定会越学越主动，越喜欢数学这门课程。

总之用此书一定要反复练习书中例题，并多想一些上面我们提到的问题，做到训练有素，就有望在数学竞赛中摘桂，我们殷切期待着读者给我们带来好消息而与你们共享胜利的愉悦！

以上建议，供大家参考。我们更希望读者对本书提出宝贵的意见和建议，特别要指出其中的差错和漏洞。

感谢陕西省数学竞赛委员会及陕西人民教育出版社对本书的鼎力支持与关心。

编者摇

圆园园缘年摇于西安

目摇摇录

第 员章摇方摇程

员援摇一元二次方程

摇摇 员原员摇已知实数 遭糟是关于 曾的方程 曾 垣遭曾垣糟越园的两个根，且 遭≠糟≠园则 遭垣糟的值等于（摇摇）援

摇摇粤援原员摇摇摇摇摇月援园摇摇摇摇摇悦援员摇摇摇摇摇阅援园

解 员摇因为 遭糟是方程 曾 垣遭曾垣糟越园的两个实根，所以

摇摇摇摇 遭 原遭糟≠园 ①；遭 垣遭 垣糟越园 ②；糟 垣遭糟垣糟越园 ③

由③及 糟≠园得 糟越原遭原员代入②得

圆遭 原遭原员越园援

解得摇遭越原$\frac{员}{圆}$或 遭越员援

当摇遭越原$\frac{员}{圆}$时，糟越原遭原员越原$\frac{员}{圆}$，则 遭越糟这与题设不符；

当摇遭越员时，糟越原遭原员越原圆满足①援

故摇遭垣糟越原员援 选 粤援

摇摇解 圆摇由根与系数的关系，得

摇摇摇摇 遭垣糟越原遭 ④；遭糟越糟 ⑤

由⑤及 糟≠园得 遭越员，代入④，得

摇摇遭垣糟越原员援 选 粤援

摇摇解 员应用了方程根的定义，即“如果 曾 是方程 枣（曾）越园的根，那么就有 枣（曾）越园援反之亦然援”这是一种基本的解法援

摇摇解 圆应用根与系数关系，使问题解得简捷明快，读者要熟悉这种方法援

摇摇 员原圆摇若 曾、曾是方程 曾 垣曾原员越园的两个根，则 曾 原缘曾 垣猿越（摇摇）援

摇摇摇粤援远 月援原 悦援园 阅援园

解摇疫摇曾、曾是方 曾 垣曾原员越园的根，

亦摇曾 垣曾 原员越园，曾 垣曾 原员越园

摇摇本题并没有从求方程的根入手，而是综合应用了方程根的定义和根与系数的关系援其中，利用

升学·竞赛·强化

即摇曾越猿曾原曾，曾越猿原曾援

又摇曾垣曾越原员

亦摇摇曾原原曾垣远怨

越(猿曾原曾) 原原(猿原曾) 垣远怨

越原曾垣猿曾垣原曾垣苑

越原(曾垣曾原猿 垣原(曾垣曾) 垣原

越园垣原伊(原员 垣原越园援 选 阅援

曾越猿曾原曾、曾越猿原曾对所求式进行降次化简，是一个值得重视的解题技巧援

摇摇员原猿摇若方程 曾原圆曾原员越园的两根 α 和 β 也是方程 曾垣责曾垣择越园的根，则 责垣择越(摇摇) 援

摇摇摇粤援原员 月援原圆怨 悦援圆怨 阅援原员

解 员摇由根与系数的关系，得

α 垣β 越圆，$\alpha\beta$ 越原员援

亦摇$\alpha^{圆}$垣$\beta^{圆}$越(α 垣β)^{圆}原圆$\alpha\beta$ 越圆^{圆}原圆伊(原员) 越远援

从而摇$\alpha^{源}$垣$\beta^{源}$越($\alpha^{圆}$垣$\beta^{圆}$)^{圆}原圆$\alpha^{圆}\beta^{圆}$越远^{圆}原圆伊(原员) 越猿源援

又 α、β 是方程 曾垣责曾垣择越园的根，

亦摇$\alpha^{远}$垣责$\alpha^{圆}$垣择越园 ①

摇摇$\beta^{远}$垣责$\beta^{圆}$垣择越园援 ②

① 原② 得摇责越$\dfrac{\alpha^{远}原\beta^{远}}{\alpha^{圆}原\beta^{圆}}$越原($\alpha^{源}$垣$\alpha^{圆}\beta^{圆}$垣$\beta^{源}$) 越原猿缘援

将摇责越原($\alpha^{源}$垣$\alpha^{圆}\beta^{圆}$垣$\beta^{源}$) 代入①，得

摇摇择越$\alpha^{圆}$($\alpha^{源}$垣$\alpha^{圆}\beta^{圆}$垣$\beta^{源}$) 原$\alpha^{远}$越$\alpha^{圆}\beta^{圆}$($\alpha^{圆}$垣$\beta^{圆}$) 越远援

亦摇责垣择越原猿缘垣远越原圆怨援 选 月援

摇摇解 圆摇作这样题的思路是 设法建立 责、择的两个方程，解出 责、择援本题二次方程的根是 员依 圆已知，

即得摇(员垣 圆)^{远}垣(员垣 圆)^{圆}责垣择越园

或摇摇(员原 圆)^{远}垣(员原 圆)^{圆}责垣择越园援

两式相减得摇[(员垣 圆)^{圆}原(员原 圆)^{圆}]责

越原[(员垣 圆)^{远}原(员原 圆)^{远}] 援

故摇责越原[(员垣 圆)^{源}垣(员垣 圆)^{圆}(员原 圆)^{圆}垣(员原 圆)^{源}] 越原猿缘援

代入摇择越(员垣 圆)^{圆}[猿缘原(员垣 圆)^{源}]

越远(猿垣圆 圆)(猿原圆 圆) 越远援

于是摇责垣择越原圆怨援 选 月援

摇摇本题除了应用方程根的定义和一元二次方程根与系数的关系等基础知识外，关键是代数式的恒等变形，具有较强的综合性和灵活性，对学生的思维能力要求较高援

摇摇对本题而言解 圆更简单援但如有了复数知识，对这一类问题而言，解 圆也是一种普遍的好办法援

摇摇员原原摇方程 曾原猿曾原员猿曾原原越园的所有实根之和等于摇摇摇援

摇摇这是一个含

解摇当 圆曾原员≥园即 曾≥员/圆时,曾 原(圆曾原员) 原原越园即 曾 原圆曾原猿越园援解得 曾越原员(舍去),或 曾越猿;

当 圆曾原员约园即 曾约员/圆时,曾 垣(圆曾原员) 原原越园即 曾 垣圆曾原缘越园援解得 曾越原员垣√远(舍去),或 曾越原员原√远援

故原方程有两个实根 曾员越猿,曾圆越原员原√远,其和为 圆原√远援 填 圆原√远援

有绝对值的方程,从实数绝对值的定义入手,将其转化为两个一元二次方程来解,主要考查分类讨论的数学思想和方法援

摇摇 员原缘摇若 葬,遭是方程 曾 垣圆园园曾垣员越园的两个实根,糟,凿是方程 曾 垣圆园园曾垣员越园的两个实根,藻,枣是方程 曾 垣圆(责 原圆) 曾垣员越园的两个实根,则 (葬原糟)(遭原糟)(葬垣凿)(遭垣凿)/藻垣枣 的值为摇摇摇援

解 员摇由根与系数的关系,得

摇摇摇摇摇葬垣遭越原圆园园,葬遭越员;

糟垣凿越原圆园园,糟凿越员;

藻垣枣越原圆(责 原圆),藻枣越员援

故摇摇 (葬原糟)(遭原糟)(葬垣凿)(遭垣凿)/藻垣枣

越 [葬遭原(葬垣遭)糟垣糟圆][葬遭垣(葬垣遭)凿垣凿圆]/藻垣枣 ①

越 (糟圆垣圆园园糟垣员)(凿圆原圆园园凿垣员)/原圆(责 原圆)

越 糟凿(凿垣圆园园垣员)(糟原圆园园垣员)/原圆(责 原圆)

越 猿[(糟垣凿)圆原员园园]/原圆(责 原圆)

越 猿(源责 原员园园)/原圆(责 原圆) 越远 填 远援

摇摇对于①式分子中出现的 葬遭,我们并没有立即用常数 猿代换,而是换成了 糟凿,从而可继续化简下去援整个解题过程都体现了整体处理的思想援

摇摇解 圆摇我们依然用求解的公式,得

葬越原责垣√责 原猿,遭越原责原√责 原猿援

糟越原择垣√择 原猿,凿越原择原√择 原猿援

于是

(葬原糟)(遭原糟) 越 (择原责原√择 原猿垣√责 原猿)(择原责原√择 原猿原√责 原猿)

越 (择原责原√择 原猿)圆 原责 原猿越圆(择原责)(择原

摇摇从以上各题的解 圆使我们知道:二次方程的求根公式是十分重要的,如本题,用求根公式,加上分解因式的技巧,本题解起来

升学·竞赛·强化

√择原猿援

而摇 (葬垣蚤 (遭垣蚤 越(责垣择垣√择原猿 圆原责 原猿

越圆(择垣责 (择垣√择原猿,

于是摇 (葬原糟 (遭原糟 (葬垣蚤 (遭垣蚤 越圆(择 原责),

又摇藻垣枣越圆(择 原责),

摇摇所以摇 (葬原糟)(遭原糟)(葬垣蚤)(遭垣蚤) / 藻垣枣 越猿援 填 猿援

也很简捷,但要求基本功十分扎实援

摇摇 员原远摇 (圆园园圆全国初中联赛题) 已知实数 葬遭糟满足

葬垣遭越远,
葬遭原糟 垣原√圆糟越原愿援

试求方程 遭曾 垣糟曾原葬越园的根援

解 员摇由题设得摇葬垣遭越远,葬遭越糟 原愿原√圆糟垣原愿援

所以,葬遭是关于 贼的一元二次方程

贼 原远贼垣糟 原愿原√圆糟垣原愿越园

的两个实根援

由Δ越远原原(糟 原愿原√圆糟垣原愿) 越原原(糟原原√圆) 圆≥园得 糟越原√圆援

从而摇 葬垣遭越远, 葬遭越远援 摇摇解得摇 葬越原, 遭越原援

解方程 原曾 垣原√圆曾原原越园,得

曾员越 (原√圆垣√远)/圆, 曾圆越原 (√圆垣√远)/圆 援

摇摇解 圆摇由 遭越原原葬代入得

葬(原原葬) 越糟 原愿原√圆糟垣原愿

即摇 (葬原原) 圆 垣(糟原原√圆) 圆 越园援

葬越遭越原,糟越原√圆代入得方程

摇摇曾 垣√圆曾原原越园援

解得摇曾越 (原√圆依√远)/圆

摇摇为了确定实数 葬遭糟的值,我们由题设条件构造了一个以 葬遭为根的一元二次方程,并通过Δ≥园利用非负数的性质求得 糟的值,进而求出 葬遭的值援解题思路自然,一气呵成援

解 圆主要应用了非负实数的性质援

摇摇 员原苑摇已知 葬为实数,解关于 曾的方程 曾 曾垣员 垣遭越葬曾垣员援

解 员摇 (员 当 曾约原员时,原方程可化为

曾 垣曾原葬曾垣遭越园援摇摇摇摇摇摇 ①

由 曾约原员,得 葬越原曾 垣曾垣员 援

摇摇本题需要对 曾和 葬进行二重

从而 $\Delta_{员}$越员垣源葬跃园,方程①有两个不相等的实根 曾越$\frac{原员依\sqrt{员垣源葬}}{圆}$援

疫 葬跃园,摇摇亦 $\frac{原员垣\sqrt{员垣源葬}}{圆}$跃园援

亦 曾越$\frac{原员原\sqrt{员垣源葬}}{圆}$是原方程的根援

(圆)当 曾≥ 原员时,原方程可化为

摇摇摇摇摇摇曾^{圆}垣曾垣葬越园援　　　　②

当 $\Delta_{圆}$越员原源葬≥园即 葬≤$\frac{员}{源}$时,方程②有解

$$曾越\frac{原员依\sqrt{员原源葬}}{圆}$$

又由 曾^{圆}垣曾越原葬,故当 园约葬≤$\frac{员}{源}$时,原员≤ 曾越$\frac{原员依\sqrt{员原源葬}}{圆}$约园都是方程的根;当 葬约园时,方程只能有一正根:曾越$\frac{原员垣\sqrt{员原源葬}}{圆}$援

综上所述,当 葬约园时,方程有一个根 曾越$\frac{原员垣\sqrt{员原源葬}}{圆}$;当 葬越园时方程有二个根 曾越园或 曾越原员;当 园约葬≤$\frac{员}{源}$时,原方程有三个根 曾越$\frac{原员依\sqrt{员原源葬}}{圆}$,曾越$\frac{原员原\sqrt{员垣源葬}}{圆}$;当 葬跃$\frac{员}{源}$时,原方程有一个根 曾越$\frac{原员原\sqrt{员垣源葬}}{圆}$援

分类讨论,所以要注意理顺关系援

先按 曾约原员或 曾≥ 原员分,目的是去掉方程中的绝对值;后讨论 葬的取值号援归根结蒂问题还是讨论 葬的取值对方程解的作用援

摇摇解 圆摇(员)当 葬越园时,方程有两根 曾越园或 曾越原员援

(圆)当 葬跃园时,方程要有解必有 曾约园.当 曾约原员时,方程化为

摇摇摇摇摇摇原曾^{圆}原曾垣葬越园或 曾^{圆}垣曾原葬越园援

此时的负根为摇曾越$\frac{原员原\sqrt{员垣源葬}}{圆}$约原员,为所要的解援

而 原员约曾约园时,方程为 曾^{圆}垣曾垣葬越园,此方程要有实根,要求判别式 Δ越员原源葬≥园相应的解为

$$曾越\frac{原员依\sqrt{员原源葬}}{圆}摇摇\in(原员,园)援$$

两根均符合要求援

(猿)当 葬约园,则方程有解必有 曾跃园的解援此时方程为

摇摇摇摇曾^{圆}垣曾垣葬越园援

它的正根是摇摇摇曾越$\frac{原员垣\sqrt{员原源葬}}{圆}$援

摇摇解 圆是先着眼于 葬的取值情况来分类援这样也很清楚,因为 葬在方程中是作为已知数出现的援

升学·竞赛·强化

综上，当 葬约园时，方程有唯一的根 曾越$\frac{原员垣\sqrt{员原廉葬}}{圆}$；当 葬越园时，方程有两根 曾越园或 曾越原员；当 园约葬≤$\frac{员}{源}$方程有三个根 曾越$\frac{原员原\sqrt{员垣廉葬}}{圆}$或 曾越$\frac{原员依\sqrt{员原廉葬}}{圆}$；当 葬跃$\frac{员}{源}$时，方程有唯一的根 曾越$\frac{原员原\sqrt{员垣廉葬}}{圆}$援

升学·竞赛·强化

摇摇解 猿摇 (数形结合法) 援我们来作函数 赠越曾猿垣曾圆的图形援

在 曾约原员是抛物线 赠越原曾圆原曾,曾跃原员是 赠越曾圆垣曾,作出的图象为图 员原员所示,方程是 曾猿垣曾圆越原葬,因此,是 赠越曾猿垣曾圆与直线 赠越原葬交点的横坐标援可见,当 原葬跃园,即 葬约园只有一根 ;当 原$\frac{员}{源}$约原葬约园,即 园约葬<$\frac{员}{源}$有三个交点,其中 葬越$\frac{员}{源}$时,曾越原$\frac{员}{圆}$是方程的二重根 ;当 原葬约原$\frac{员}{源}$,即 葬约$\frac{员}{源}$时,方程只有一根援

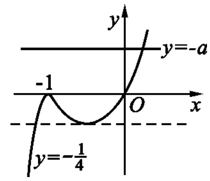

图 员原员

摇摇解 猿要用到高中知识,但作为数学竞赛,应当掌握二次函数及其图形,及它们的极大、极小值援

摇摇 员原愿摇 (怨愿全国初中竞赛题) 设实数 泽、贼分别满足 员怨泽圆垣怨怨泽垣员越园,贼圆垣怨怨贼垣员怨越园,且 泽贼≠员,求$\frac{泽贼垣源泽垣员}{贼}$的值援

解 员摇因为 泽≠园,所以第一个等式可化为

$$(\frac{员}{泽})^圆垣怨怨·\frac{员}{泽}垣员怨越园援$$

又摇贼圆垣怨怨贼垣员怨越园,且$\frac{员}{泽}$≠贼,

所以,$\frac{员}{泽}$和 贼是一元二次方程 曾圆垣怨怨曾垣员怨越园的两个不同的实根援

于是,由根与系数的关系,得

$$\frac{员}{泽}垣贼越原怨怨,\frac{员}{泽}·贼越员怨,$$

即摇泽贼垣员越原怨怨泽,贼越员怨泽援

故摇$\frac{泽贼垣源泽垣员}{贼}$越$\frac{原怨怨泽垣源泽}{员怨泽}$越原缘援

摇摇注意到两个已知等式中系数的关系,我们构造了一个以$\frac{员}{泽}$和贼为根的一元二次方程,应用根与系数的关系整体地解决了问题援

摇摇解 圆摇 (求根公式法) 援记摇Δ 越怨怨圆原源·员怨,则

$$泽越\frac{原怨怨依\sqrt{Δ}}{圆·员怨}越\frac{圆}{原怨怨\mp\sqrt{Δ}},贼越\frac{原怨怨依\sqrt{Δ}}{圆},由 泽贼≠员,$$

不妨设摇泽越$\frac{原怨怨垣\sqrt{Δ}}{圆·员怨}$,则 贼越$\frac{原怨怨垣\sqrt{Δ}}{圆}$援

于是摇$\frac{泽贼垣源泽垣员}{贼}$越泽垣源·$\frac{泽}{贼}$垣$\frac{员}{贼}$

摇摇越$\frac{原怨怨垣\sqrt{Δ}}{圆·员怨}$垣$\frac{源}{员怨}$垣$\frac{原怨怨原\sqrt{Δ}}{圆·员怨}$越$\frac{原怨缘}{圆·员怨}$越原缘援

可知若 泽越$\frac{原怨怨原\sqrt{Δ}}{圆·员怨}$,贼越$\frac{原怨怨原\sqrt{Δ}}{圆}$,仍有

摇摇读者不妨设 泽越$\frac{原怨怨原\sqrt{Δ}}{圆·员怨}$,贼越$\frac{原怨怨原\sqrt{Δ}}{圆}$来解本题援我们已不只一次用求根公式解一些难题,望读者好好总结一下,记住求根公式,根与系数关系,都是解与二次方程有关的题要熟练掌

升学·竞赛·强化

摇摇摇摇$\frac{\text{源缘原缘猿}}{\text{贼}}$越原缘援 握的内容援

摇摇员原远摇已知 葬遭糟均为正整数,且 葬跃遭跃糟跃葬

猿远原远(葬垣遭垣糟) 垣(葬遭垣遭糟垣糟葬) 越园

愿员原怨(葬垣遭垣糟) 垣(葬遭垣遭糟垣糟葬) 越园援

求 葬遭糟的值援

解摇由题设知,远怨是一元二次方程

曾原(葬垣遭垣糟)曾垣(葬遭垣遭糟垣糟葬) 越园

的两个根援由根与系数的关系,得

摇摇摇{ 葬垣遭垣糟越远垣怨越缘员援 ; 葬遭垣遭糟垣糟葬越远伊怨越缘源援 } ①

疫 葬跃遭跃糟摇摇亦 员缘越葬垣遭垣糟跃猿糟援

解得 糟约缘即 糟只可能取 员,圆,猿,源援

(员) 当 糟越员时,由①得

摇摇摇{ 葬垣遭越员源 ; 葬遭越源园援 }

得正整数解 葬越员园,遭越源,糟越员援

(圆) 当 糟越圆时,由①得

摇摇摇{ 葬垣遭越员猿 ; 葬遭越圆圆援 } 摇无正整数解援

(猿) 当 糟越猿时,由①得

摇摇摇{ 葬垣遭越员圆 ; 葬遭越远援 } 摇无正整数解援

(源) 当 糟越源时,由①得

摇摇摇{ 葬垣遭越员员, ; 葬遭越园援 }

解得 葬越员园,遭越员,与 遭跃糟矛盾援

综上所述,只有 葬越员园,遭越源,糟越员援

摇摇解答本题有两个难点,一是由题条件发掘以远和怨为根的一元二次方程援这需要有较强的观察能力;二是解不定方程组①援其中,确定最小正整数 糟的范围尤为重要援

其实已知两式相减即可得 葬垣遭垣糟越员缘,代入任一式即得 葬遭垣遭糟垣糟葬越缘源援

员援圆摇一元二次方程根的性质

摇摇员原员园摇已知 葬遭糟是不全为零的三个实数,那么关于 曾的方程 曾圆垣(葬垣遭垣糟)曾垣(葬圆垣遭圆垣糟圆) 越园的根的情况是 (摇摇) 援

摇摇本题入手较容易,关键是对判别式进行配方

升学·竞赛·强化

粤援有两个负根摇摇摇摇摇摇摇摇月援有两个正根

悦援有两个异号的实根　　　　　　阅援无实根

解摇因为 葬遭糟不全为零,所以

摇摇Δ 越(葬垣遭垣糟)^{圆}原原(葬^{圆}垣遭^{圆}垣糟^{圆})

越原圆(葬^{圆}垣遭^{圆}垣糟^{圆}) 垣圆(葬遭垣遭糟垣糟葬)

越原[(葬原遭)^{圆}原(遭原糟)^{圆}原(糟原葬)^{圆}]约园援

故已知方程无实根援　　　　　　　　　　　　　　　　选 阅援

变形,判断其符号援

摇摇员园援摇设三个关于 曾的方程 曾^{圆}垣源曾原源曾垣猿曾 垣猿越园,曾^{圆}垣(圆皂垣员)曾垣皂^{圆}越园,(皂原员)曾^{圆}垣圆皂曾垣皂原员越园中至少有一个方程有实根,则实数 皂的取值范围是 (摇摇) 援

粤援原$\frac{猿}{圆}$约皂约原$\frac{员}{源}$　　　　　　月援皂≤ 原$\frac{猿}{圆}$或 皂≥ 原$\frac{员}{源}$

悦援皂≤ 原$\frac{猿}{圆}$或 皂≥$\frac{员}{圆}$　　　　　　阅援原$\frac{员}{源}$≤ 皂≤$\frac{员}{圆}$

解 员摇若第一个方程有实根,则

摇摇Δ$_{员}$越员远皂^{圆}原原(原源皂垣猿)越员远皂^{圆}垣员远皂原员圆≥园援

解得摇皂≤ 原$\frac{猿}{圆}$援

若第二个方程有实根,则

摇摇Δ$_{圆}$越(圆皂垣员)^{圆}原源皂^{圆}越源皂垣员≥园得 皂≥ 原$\frac{员}{源}$援

若第三个方程有实根,则

摇摇Δ$_{猿}$越源皂^{圆}原源(皂原员)^{圆}越愿皂原源≥园援

解得摇皂≥$\frac{员}{圆}$(皂越员时,方程仍有实根) 援

要使三个方程中至少有一个方程有实根,则上面三个不等式至少有一个要成立援故 皂的取值范围为 皂≤ 原$\frac{猿}{圆}$或 皂≥ 原$\frac{员}{源}$援　　　　　选 月援

摇摇解 圆摇若三个方程都没有实根,则有

$$\begin{cases}Δ_{员}越员远皂原员远皂原员圆约园\\ Δ_{圆}越源皂垣员约园\\ Δ_{猿}越愿皂原源约园援\end{cases}$$

解得 原$\frac{猿}{圆}$约皂约原$\frac{员}{源}$援

所以,当 皂≤ 原$\frac{猿}{圆}$或 皂≥ 原$\frac{员}{源}$时,三个方程中至少有一个方程有实根援　　　　　　　　　　　　　　　　　　　选 月援

摇摇两种解法的思路恰好相反。解 员从正面入手,分别求出使三个方程有实根的 皂的取值范围,把它们合并在一起便得到所求 皂的范围援解 圆从反面思考,采用了“正难则反”的解题策略援先求三个方程都没有实根的 皂的取值范围,再从全体实数中将其去掉,剩余的部分可使三个方程中至少有一个方程有实根援显然,解 圆是一种最优化的解法援

升学·竞赛·强化

摇摇员原源摇设关于 曾的方程 葬曾圆垣(葬垣圆)曾垣怨葬越园有两个不相等的实根 曾$_{员}$、曾$_{圆}$,且 曾$_{员}$约员约曾$_{圆}$,那么实数 葬的取值范围是 (摇摇) 援

粤援原$\frac{圆}{苑}$约葬约$\frac{圆}{缘}$　　　　月援葬跃$\frac{圆}{缘}$

悦援葬约原$\frac{圆}{苑}$　　　　阅援原$\frac{圆}{员员}$约葬约园

解 员摇易知 葬≠园则原方程化为

$$曾^{圆}垣(员垣\frac{圆}{葬})曾垣怨越园援$$

记 赠越曾圆垣(员垣$\frac{圆}{葬}$)曾垣怨,则这个抛物线的开口向上援

因为摇曾$_{员}$约员约曾$_{圆}$,所以摇当 曾越员时,赠约园即

$$员垣(员垣\frac{圆}{葬})垣怨约园援$$

解得摇 原$\frac{圆}{员员}$约葬约园援　　　　选 阅援

摇摇解 圆摇记 枣(曾)越葬曾圆垣(葬垣圆)曾垣怨葬,则由 曾$_{员}$约员约曾$_{圆}$,得 葬枣(员)约园即葬(员员葬垣圆)约园援

解得摇 原$\frac{圆}{员员}$约葬约园援　　　　选 阅援

摇摇解 猿摇易知 葬≠园由根与系数的关系,得

$$曾_{员}垣曾_{圆}越原\frac{葬垣圆}{葬},\ 曾_{员}曾_{圆}越怨援$$

疫摇曾$_{员}$约员约曾$_{圆}$,

亦摇(曾$_{员}$原员)(曾$_{圆}$原员)约园 即摇曾$_{员}$曾$_{圆}$原(曾$_{员}$垣曾$_{圆}$)垣员约园

亦即摇怨垣$\frac{葬垣圆}{葬}$垣员约园援

解得摇 原$\frac{圆}{员员}$约葬约园援　　　　选 阅援

摇摇前两种解法都是借助于二次函数图象的性质来建立关于 葬的不等式,其中解 员是给原方程两边同除以 葬得到二次项系数为正数的二次函数,图象开口向上援

摇摇解 圆是通过试验,发现二次项系数 葬与 枣(员)异号援

解 猿应用了等价转化的思想,将 曾$_{员}$约员约曾$_{圆}$转化为(曾$_{员}$原员)·(曾$_{圆}$原员)约园 从而联想到根与系数的关系,是一种较优化的解法援

摇摇员原猿摇葬遭、遭葬表示两个两位数,则满足方程 (葬垣遭)曾圆原葬遭曾垣遭葬越园的两个根都是整数的葬遭有 (摇摇) 援

摇摇粤援园个摇摇摇月援圆个摇摇摇悦援源个摇摇摇阅援无数个

解摇设方程的两整数根为 曾$_{员}$、曾$_{圆}$,则

$$曾_{员}垣曾_{圆}越\frac{员园葬垣遭}{葬垣遭},\ 曾_{员}曾_{圆}越\frac{员园遭垣葬}{葬垣遭}援$$

所以摇曾$_{员}$垣曾$_{圆}$垣曾$_{员}$曾$_{圆}$越员员且 曾$_{员}$,曾$_{圆}$跃园援

即摇(曾$_{员}$垣员)(曾$_{圆}$垣员)越员圆越圆·远越猿·源

摇摇从根与系数的关系入手,是解答一元二次方程整数根问题的一种常用方法援

另外,由$\frac{员园葬垣遭}{葬垣遭}$与

当$\begin{cases}曾_员越圆\\曾_圆越猿\end{cases}$时,代入上式,得缘葬越源,故葬越源;

当$\begin{cases}曾_员越员\\曾_圆越缘\end{cases}$时,代入上式,得源葬越缘,故葬越缘援

故满足条件的葬有两个援　　　　选月援

葬园曾_员垣葬园曾_圆之和为定值,得(曾_员垣员)·(曾_圆垣员)越远是非常重要的援

摇摇员原远摇(圆园园缘全国初中联赛题)设皂是整数,且方程猿曾^{圆}垣皂曾原圆越园的两根都大于原$\frac{怨}{缘}$而小于$\frac{猿}{苑}$,则皂越摇摇摇摇援

解摇设枣(曾)越猿曾^{圆}垣皂曾原圆援由题设得

$$\begin{cases}枣\left(原\frac{怨}{缘}\right)越原\frac{怨}{缘}皂垣\frac{员远猿}{圆缘}跃园\\枣\left(\frac{猿}{苑}\right)越\frac{猿}{苑}皂原\frac{苑员}{源怨}跃园\\原\frac{怨}{缘}约原\frac{皂}{圆伊猿}约\frac{猿}{苑}援\end{cases}$$

解得摇猿$\frac{愿}{圆员}$约皂约$\frac{员远猿}{源缘}$援

因为摇皂是整数,所以摇皂越源援　　　　填源援

摇摇这个问题可从三个方面考虑:判别式定理、区间端点函数值的正负、对称轴与区间的位置关系援本题中葬越猿跃园,故Δ跃园,可肯定方程总有一正一负的根援

摇摇员原苑摇(圆园园远河北初中竞赛题)若关于曾的方程(员原皂^{圆})曾^{圆}垣圆皂曾原员越园的所有根都是比员小的正实数,则实数皂的取值范围是摇摇摇摇援

解摇(员)当员原皂^{圆}越园,即皂越依员时,原方程为一元一次方程援

若皂越员,方程为圆曾原员越园,其根为曾越$\frac{员}{圆}$,符合要求援

若皂越原员,方程为原圆曾原员越园,其根为曾越原$\frac{员}{圆}$约园,不符合要求援

(圆)当员原皂^{圆}≠园,即皂≠依员时,原方程为一元二次方程,可变形为

[(员原皂)曾垣员]·[(员垣皂)曾原员]越园援

解得摇曾越$\frac{员}{皂原员}$或曾越$\frac{员}{皂垣员}$援

由摇$\begin{cases}园约\frac{员}{皂原员}约员\\园约\frac{员}{皂垣员}约员\end{cases}$摇摇得皂跃圆援

综合(员)、(圆),得摇皂越员或皂跃圆援　　　　填皂越员或皂跃圆援

摇摇这也是一个区间根问题,首先需要对二次项系数员原皂^{圆}是否为零进行讨论,其次当员原皂^{圆}≠园时,我们先通过因式分解求出方程的两个根,再通过解不等式组求出皂的取值范围援这种解法要比应用区间根原理简单,但它是建立在观察的基础上的援

升学·竞赛·强化