数学竞赛典型题

八年级

主摇摇编摇龚冬保
本册主编摇徐一正摇赵心敬摇杨天旭
编摇摇者摇刘康宁摇刘崇理摇杨天旭
摇摇摇摇摇郑凤石摇胡家齐摇赵心敬
摇摇摇摇摇徐一正摇龚冬保摇焦和平
摇摇摇摇摇（以姓氏笔画为序）

陕 西 人 民 教 育 出 版 社

序

初中《数学竞赛典型题》是由陕西省数学竞赛委员会组织编写的一套品牌丛书。本丛书是在长期进行数学教学和数学竞赛辅导中积累的大量资料的基础上，经过精心地选择、加工、编写而成。本丛书是一套规范的初中数学竞赛培训教材。也是初中学生学习数学的一套好的课外读物，更是中学数学教师便于使用的一套教学参考资料。

本丛书的编写原则是："源于教材，高于教材。"

"源于教材"，系参照了最新的现行《数学课程标准》，选题内容覆盖了各年级相应的知识点，各年级分册成书，与教材进度同步，并注意不同层次内容的衔接，适应各年级学生的知识水平与思维特点，与中考难度系数紧密贴近。

"高于教材"，系紧扣初中《数学竞赛大纲》，详尽地涵盖了大纲的内容和题型。知识点的增加，知识面的扩大，内容的引申，新的数学原理和数学思想的介绍与渗透，数学方法的总结与运用，均通过精心编拟和选择的竞赛中常见的各种典型题来体现，题意新颖，内容丰富，题型多样，重视对数学技能与解题能力的循序渐近的训练与培养，能帮助数学特长生在数学竞赛中取得优异成绩。

本丛书的特点：以作者精心编拟和选择的竞赛中的各类典型题为主干，对其进行深入的剖析，尽可能用多种方法给出解答，既重视对"通法"的归纳和总结，以强化基础，也介绍特殊的方法与技巧，以培养提高思维的敏锐性，获得寻求解题途径的灵感和技巧。丛书还以旁注方式进行关键性的点拨，将题目涉及的知识点、重点、思路、方法、技巧、引申、推广等以更高的观点，揭示得清楚明白，以收到举一反三，触类旁通，高屋建瓴，以少胜多之功效。该丛书避免了将课本知识点的罗列，从而增加了典型题的容量。这些都是该丛书区别于众多数学竞赛读本的地方。

这套丛书由吕振琪、胡家齐二位先生策划，由陕西省主办全国数学联赛的命题组长、西安交通大学著名教授龚冬保先生执笔主编，其他创作人员均为我省特级、高级教师、数学竞赛高级教练，多为命题组成员。强大的组织和作者阵容为该书提供了可靠的质量保障。

愿广大数学爱好者通过阅读这套丛书，积累知识，启迪智慧，获得成功。

陕西省数学竞赛委员会
圆园园源年 缘月 摇摇

前摇摇言

您一定曾享受过解出数学难题的欢乐,但更多的是为做不出题而苦恼!是啊,数学就是这样令人又爱又怕,却又是极其重要的基础课程,学不好数学,很难成就高质量的、优秀的人才。于是许多人不约而同地陷入了“题海”,在茫茫题海里饱受痛苦的折磨。

有没有办法使我们得到解脱?这是我们从事数学教学多年的本书编者共同思考过的问题,积多年的经验教训,试写了“典型题”这部书以奉献给读者,力图以一定量的例题,展示解数学题的思路、技巧和方法,并以旁注揭示其要领。我们坚信,只要读者把我们的例题当习题,反复演练,必能起到举一反三,触类旁通的效果。

以下分别对使用本书的教师和学生提几点建议。

致教师

使用本书时,突出一个“练”字,建议用“精讲—导练—独立练—小结”的方式进行数学辅导。

精讲摇每一章精选书上几道题,讲如何从分析题目条件入手去寻找解题切入点,剖析解题的技巧与方法,如要用到学生较生疏或还没学到的知识,可以先介绍一下,必要时在讲完这些例题之后给学生讲一下。总之要把解题思路、方法讲深讲透,对解题过程可引导学生看书就行了。

导练摇在精讲基础上,把书上例题当课堂练习题,要求学生不看书上解答先自己作,不会时再看书,待多数学生完成这些题后,再让一些学生上台讲几道题的解法和体会,并展开讨论,最后由教师讲评援

独立练摇对书上每章后的独立练习题,可作为课后作业,要求学生尽量不看书上的参考解答独立完成,遇到不会的题,可以留在脑子里,有空便想一想,想出了再作,这样还有利于培养抽象思维能力。

小结摇每进行一章,要求学生写出对哪些题的解法最有体会及哪些题没搞懂。教师再针对学生情况作小结,并多介绍一些学生的有新意的解题方法。

致学生

员摇请把书中例题当习题,先自己解答,不会了才看书,觉得会了合上书再作,对每道题要反复作,直到领会了解题思路与方法。

圆摇一般教科书上没讲到的概念、定理、公式,会在本书中的例题中出现。对有些知识,如您还不太了解,可问问周围同学或老师。

猿摇本书有以下特点,请同学们注意:

创见性摇不少例题有多种解法,有的还是一般书上见不到的。同学们在搞懂了书中解法基础上,也要多想想还有无别的解法。

新颖性摇开卷讲题,还有旁注是本书特色之一援同学们一定不要放过这些旁注,而总要问这道题书上为什么要这样解,这种解法是怎样想到的,从中学到了哪些新的解题思路与方法援

开放性摇解数学题主要要从分析题目条件与结论入手，而不是生套“公式”援因此不要受知识约束，对个别题我们甚至介绍了用高中知识的方法，有些例题还引导出了高中的知识，比如明白地导出了 潺蚤灶(α 依β) 越 泽蚤灶α糟燥泽β 依糟燥泽α泽蚤灶β 的三角函数公式；不过一些题是隐含着高中知识，如有这道题这样解：杂$_{灶}$ 越 员 垣 $\frac{员}{圆}$ 垣 $\frac{员}{圆^圆}$ 垣… 垣 $\frac{员}{圆^{灶原员}}$

$\frac{员}{圆}$杂$_{灶}$ 越 $\frac{员}{圆}$ 垣 $\frac{员}{圆^圆}$ 垣… 垣 $\frac{员}{圆^{灶原员}}$ 垣 $\frac{员}{圆^灶}$

两式相减得摇 $\frac{员}{圆}$杂$_{灶}$ 越 员 原 $\frac{员}{圆^灶}$，杂$_{灶}$ 越 圆 原 $\frac{员}{圆^{灶原员}}$援就埋伏着等比数列求和公式的推导方法：

杂$_{灶}$ 越 员 垣 择 垣 择^圆 垣… 垣 择^{灶原员}

择杂$_{灶}$ 越 择 垣 择^圆 垣… 垣 择^{灶原员} 垣 择^{灶}援

故摇 (员原择)杂$_{灶}$ 越 员 原 择^{灶}援 员 垣 择 垣 择^圆 垣… 垣 择^{灶原员} 越 $\frac{员原择^灶}{员原择}$援

两边同乘 员原择 又得乘法公式：(员原择)(员 垣 择 垣 择^圆 垣… 垣 择^{灶原员}) 越 员 原 择^{灶}援

令 择 越 $\frac{遭}{葬}$，还可得到摇 葬^灶 原 遭^灶 越 (葬 原 遭)(葬^{灶原员} 垣 葬^{灶原圆}遭 垣… 垣 葬遭^{灶原圆} 垣 遭^{灶原员}) 的因式分解公式援当然，我们在书中并没走这么远。“天高任鸟飞”，同学们在用本书时，多想想一些例题及解题方法可不可以推广，怎样推广等等问题，您就会逐渐学会在数学的殿堂中自由翱翔。

主动性摇学习的一个重要方法是争取主动，即不受课本约束，有时还可受书上解题的启发，抓住知识间的联系，自己编题自己作。如自作乘法题：(曾 原 赠 垣 猿)(曾 垣 圆赠 原 员) 越 曾^圆 垣 曾赠 原 圆赠^圆 原 曾 垣 远赠 原 猿，再用种种方法反过来作因式分解，比如用待定系数法时，令 曾^圆 垣 曾赠 原 圆赠^圆 原 曾 垣 远赠 原 猿 越 (曾 原 赠 垣 葬)(曾 垣 圆赠 垣 $\frac{原猿}{葬}$)，只要求一个 葬，令 曾 越 赠 越 员，立即可得 葬 越 猿，而完成这道因式分解题援您不妨多试试，许多问题都可做到自己编题自己作援久之，您一定会越学越主动，越喜欢数学这门课程援

总之用此书一定要反复练习书中例题，并多想一些上面我们提到的问题，做到训练有素，就有望在数学竞赛中折桂，我们殷切期待着读者给我们带来好消息而与你们共享胜利的愉悦！

以上建议，供大家参考。我们更希望读者对本书提出宝贵的意见和建议，特别要指出其中的差错和漏洞。

感谢陕西省数学竞赛委员会及陕西人民教育出版社对本书的鼎力支持与关心。

编者摇

圆园园缘年源月摇于西安

目摇摇录

第 员章摇分式

员援员摇分式与分式的基本性质

摇摇 员原员摇已知分式 $\frac{曾^{圆}原原曾原猿}{曾^{圆}原原曾原猿}$ 的值为零,那么,曾^{源}的值为 (摇摇)

粤援 依员摇摇摇摇摇摇摇 月援员或 $\frac{员}{圆远}$

悦援 依 $\frac{员}{圆远}$ 阅援 原员或 原 $\frac{员}{圆远}$

解摇 $\frac{曾^{圆}原原曾原猿}{曾^{圆}原原曾原猿}$ 越 $\frac{(曾原员)(曾原猿)}{(曾原员)(曾原猿)}$

要使 (曾原员)(曾原猿) 越园,需要 曾越依员或 曾越依猿,但是当 曾越员或 曾越猿时,分式无意义援

因此只有 曾越原员或 曾越原猿援

当 曾越原员时,曾^{源} 越原员;当 曾越原猿时,曾^{源} 越原 $\frac{员}{圆远}$ 援 选 阅援

摇摇 灶曾常出现在竞赛题中,要立即反应当 曾≥ 园时,灶曾越曾故本题的正根应当舍去,所以一眼看出只能选 阅援

分式的值等于零的条件是分子的值等于零,且分母的值不等于零,千万别忘这一点!

摇摇 员原圆摇若 葬遭糟都不等于零,且 葬垣遭垣糟越园,则 $\frac{灶葬}{葬}$ 垣 $\frac{灶遭}{遭}$ 垣 $\frac{灶糟}{糟}$ 的值为 (摇摇)

粤援 园摇摇摇 月援员摇摇摇 悦援 原员摇摇摇 阅援员或 原员

解摇已知 葬遭糟都不等于零,且 葬垣遭垣糟越园援因而 葬遭糟中必有一个和另外两个异号援由原分式的对称性,不妨设想 糟与 葬遭异号,此时,$\frac{灶葬}{葬}$ 越员,$\frac{灶遭}{遭}$ 越原员,$\frac{灶糟}{糟}$ 越原员,则原分式 越原员援 选 悦援

摇摇 作为选择题,本题可令 葬越遭越员,糟越原圆立刻得出结论,选 悦援

摇摇 员原猿摇若 葬遭越员,且 葬≠ 原员,记 酝越 $\frac{葬}{员垣葬}$ 垣 $\frac{员}{员垣遭}$,晕越 $\frac{遭}{员垣遭}$ 垣 $\frac{员}{员垣遭}$,则 酝、晕的大小关系为 (摇摇) 援

粤援酝 跃晕摇摇 月援酝越晕摇摇 悦援酝约晕摇摇 阅援不确定

摇摇 利用 葬遭越员巧妙把 酝的分母 员垣葬转化为 晕的

解摇由于 葬遭越员,根据分式基本性质可得

摇摇摇酝越$\frac{\text{葬}}{\text{员垣葬}}$垣$\frac{\text{员}}{\text{员垣葬}}$越$\frac{\text{葬遭}}{\text{遭垣葬遭}}$垣$\frac{\text{遭}}{\text{遭垣葬遭}}$越$\frac{\text{员}}{\text{员垣遭}}$垣$\frac{\text{遭}}{\text{员垣遭}}$越晕　　选 月援

分母 员垣遭是解题的关键援

摇摇 员原原摇若摇$\frac{\text{濉查}}{\text{曾}}$原$\frac{\text{曾垣员}}{\text{濉曾垣员查}}$垣$\frac{\text{濉圆原曾查}}{\text{圆原曾}}$越原员,那么 曾的取值范围是(摇摇)

粤援曾约原员或 圆约曾约圆摇摇摇摇月援 原员约曾约圆或 曾跃圆

悦援曾约原员或 曾跃圆　　　阅援原员约曾约圆且 曾≠圆

解 员摇当 曾约原员时,$\frac{\text{濉曾查}}{\text{曾}}$原$\frac{\text{曾垣员}}{\text{濉曾垣员查}}$垣$\frac{\text{濉圆原曾查}}{\text{圆原曾}}$

摇摇　越$\frac{\text{原曾}}{\text{曾}}$原$\frac{\text{曾垣员}}{\text{原(曾垣员)}}$垣$\frac{\text{原(曾原圆)}}{\text{圆原曾}}$越员

当 原员约曾约圆时,$\frac{\text{濉曾查}}{\text{曾}}$原$\frac{\text{曾垣员}}{\text{濉曾垣员查}}$垣$\frac{\text{濉圆原曾查}}{\text{圆原曾}}$

摇摇　越$\frac{\text{原曾}}{\text{曾}}$原$\frac{\text{曾垣员}}{\text{曾垣员}}$垣$\frac{\text{原(曾原圆)}}{\text{圆原曾}}$越原员

当 圆约曾约圆时,$\frac{\text{濉曾查}}{\text{曾}}$原$\frac{\text{曾垣员}}{\text{濉曾垣员查}}$垣$\frac{\text{濉圆原曾查}}{\text{圆原曾}}$

摇摇　越$\frac{\text{曾}}{\text{曾}}$原$\frac{\text{曾垣员}}{\text{曾垣员}}$垣$\frac{\text{原(曾原圆)}}{\text{圆原曾}}$越员

当 曾跃圆时,$\frac{\text{濉曾查}}{\text{曾}}$原$\frac{\text{曾垣员}}{\text{濉曾垣员查}}$垣$\frac{\text{濉圆原曾查}}{\text{圆原曾}}$

摇摇　越$\frac{\text{曾}}{\text{曾}}$原$\frac{\text{曾垣员}}{\text{曾垣员}}$垣$\frac{\text{曾原圆}}{\text{圆原曾}}$越原员　　选 月援

摇摇这里关键是要注意$\frac{\text{濉曾查}}{\text{曾}}$越依员援(当 曾跃园为 垣员,曾约园为 原员)

用使式中每个绝对值分别等于零的各个 曾的值,把实数轴分段,分别进行讨论,这种方法称为“零点分段法”,它是解关于绝对值问题的常用方法援

摇摇解 圆摇取 曾越员,左边 越$\frac{\text{员}}{\text{员}}$原$\frac{\text{圆}}{\text{圆}}$垣$\frac{\text{员}}{\text{员}}$越员≠右边,因此,排除 粤和 阅援

取 曾越原圆,左边 越$\frac{\text{圆}}{\text{原圆}}$原$\frac{\text{原员}}{\text{员}}$垣$\frac{\text{源}}{\text{源}}$越员≠右边援因此,排除 悦援　　选 月援

摇摇解选择题,用“特殊值法”,往往快捷而有效援

摇摇 员原缘摇设 葬跃圆跃遭跃糟且 葬垣遭垣糟越园,若 酝越$\frac{\text{遭垣糟}}{\text{葬}}$,晕越$\frac{\text{糟垣葬}}{\text{遭}}$,孕越$\frac{\text{葬垣遭}}{\text{糟}}$,则 酝、晕、孕之间的大小关系是(摇摇)援

粤援酝跃孕跃晕摇摇摇摇月援酝跃晕跃孕

悦援孕跃酝跃晕　　　阅援晕跃孕跃酝

解摇由葬跃园跃遭跃糟,知$\frac{\text{员}}{\text{葬}}$跃$\frac{\text{员}}{\text{糟}}$跃$\frac{\text{员}}{\text{遭}}$,又 葬垣遭垣糟越园,故

摇摇　酝越$\frac{\text{遭垣糟}}{\text{葬}}$越$\frac{\text{员原葬}}{\text{葬}}$越$\frac{\text{员}}{\text{葬}}$原员

摇摇把假分式写成整式与真分式之和也是解决分式问题常用的方法之一援

读者试用令葬越原遭越原员,糟越原圆代入各式的“特殊值法”来解

摇摇　晕越$\frac{\text{糟匝葬}}{\text{遭}}$越$\frac{\text{员原遭}}{\text{遭}}$越$\frac{\text{员}}{\text{遭}}$原员

摇摇　孕越$\frac{\text{葬匝遭}}{\text{糟}}$越$\frac{\text{员原糟}}{\text{糟}}$越$\frac{\text{员}}{\text{糟}}$原员

因此,酝跃孕跃晕援　　选 粤援

本题援

摇摇 员原远摇已知分式 $\frac{\text{源曾原猿园}}{\text{曾原缘曾匝远}}$ 的值为正整数,求整数 曾的值援

解摇由于 $\frac{\text{源曾原猿园}}{\text{曾原缘曾匝远}}$越$\frac{\text{源(曾原猿)}}{\text{(曾原猿)(曾原圆)}}$越$\frac{\text{源}}{\text{曾原圆}}$援其值为正整数,故(曾原圆)能整除 源援

所以,曾原圆等于 员或 圆或 源即 曾等于 猿或 源或 远援

当 曾越猿时,原分式无意义援因此,曾越源或 曾越远援

摇摇先约分,使分式化简,再讨论,但要注意“约去的因式”不能取零值援

摇摇 员原苑摇已知使分式 $\frac{\text{圆葬曾匝猿缘}}{\text{遭曾匝缘}}$ 有意义的一切 曾的值,都使这个分式的值为一个定值,求 葬、遭应满足的条件援

摇摇

解 员摇把假分式化为整式加真分式

摇摇摇摇$\frac{\text{圆葬曾匝猿缘}}{\text{遭曾匝缘}}$越$\frac{\text{圆葬}}{\text{遭}}$$\left(\frac{\text{曾匝}\frac{\text{猿缘}}{\text{圆葬}}}{\text{曾匝}\frac{\text{缘}}{\text{遭}}}\right)$越$\frac{\text{圆葬}}{\text{遭}}$匝$\frac{\frac{\text{猿缘}}{\text{圆葬}}原\frac{\text{缘}}{\text{遭}}}{\text{曾匝}\frac{\text{缘}}{\text{遭}}}$

要原分式的值为定值(与 曾无关),只需要$\frac{\text{猿缘}}{\text{圆葬}}$原$\frac{\text{缘}}{\text{遭}}$越园,即 遭越$\frac{\text{圆葬}}{\text{苑}}$援

摇摇解 圆摇设 $\frac{\text{圆葬曾匝猿缘}}{\text{遭曾匝缘}}$越噪(定值)

亦 圆葬曾匝猿缘越噪遭曾匝缘噪

亦 (圆葬原噪遭)曾匝猿缘原缘噪越园

由于此式对任何 曾都成立,因此

摇摇摇摇$\begin{cases}\text{圆葬原噪遭越园} \\ \text{猿缘原缘噪越园}\end{cases}$摇摇摇摇①②

由②得 噪越$\frac{\text{猿缘}}{\text{缘}}$,代入①得 圆葬原$\frac{\text{猿缘遭}}{\text{缘}}$越园援

亦 葬越$\frac{\text{猿缘}}{\text{员园}}$遭

摇摇解法 圆是根据多项式恒等条件,用比较系数法确定待定的系数应满足的方程援

摇摇 员原愿摇把 葬原$\frac{\text{员}}{\text{葬}}$写成一个整式与一个分式的积,使这两个因式的和为 葬匝$\frac{\text{员}}{\text{葬}}$援

摇摇设 曾员是整式,曾圆是分式,则它们是方程 葬曾圆

实践·应用·提高

解摇葬原$\frac{员}{葬}$越$\frac{葬原员}{葬}$越$\frac{葬垣员}{葬}$·(葬原员)

由于摇$\frac{葬垣员}{葬}$垣(葬原员)越$\frac{葬垣员垣葬原葬}{葬}$越葬垣$\frac{员}{葬}$援因此所求因式为$\frac{葬垣员}{葬}$和葬原员援

原(葬垣员)曾垣(葬原员)越园(葬≠园)的两个根援对于已知二数和与二数积的问题，一般用一元二次方程解援

摇摇员原愿摇(全国初中联赛题)已知曾(曾≠园,依员)和员两个数，如果只许用加法、减法和员为被除数的除法这三种运算(可以用括号)，经过六步算出曾，试写出计算曾的表达式援

解摇由于曾越曾(曾垣员)原曾要把乘积曾(曾垣员)转化为允许的运算，考虑到其倒数

摇摇摇摇$\frac{员}{曾(曾垣员)}$越$\frac{员}{曾}$原$\frac{员}{曾垣员}$

亦摇曾越员衣$\left(\frac{员}{曾}原\frac{员}{曾垣员}\right)$原曾

摇摇答案也可以是曾越员衣$\left(\frac{员}{曾原员}原\frac{员}{曾}\right)$垣曾援

摇摇员原远摇计算

(员)$\frac{园园园员源垣猿愿猿愿}{园园园员源垣远园猿缘}$

(园)$\frac{(员怨怨源原园园园园)(员怨怨源垣猿怨缘)伊员怨怨缘}{员怨怨员·员怨怨猿·员怨怨远·员怨怨苑}$

(员)解摇设葬越园园园源,遭越远园猿缘,则

原式越$\frac{葬垣(葬原遭)}{葬垣遭}$

越$\frac{(园葬原遭)[葬原葬(葬原遭)垣(葬原遭)]}{(葬垣遭)(葬原葬遭垣遭)}$

越$\frac{(园葬原遭)(葬原葬遭垣遭)}{(葬垣遭)(葬原葬遭垣遭)}$

越$\frac{园葬原遭}{葬垣遭}$越$\frac{远园员}{远园缘}$

摇摇(园)解摇设葬越员怨怨源,则

原式越$\frac{(葬原园)(葬垣园)(葬原缘)(葬垣员)}{(葬原缘)(葬原员)(葬垣园)(葬垣缘)}$

越$\frac{(葬垣园)(葬原缘)(葬垣缘)(葬原员)(葬垣员)}{(葬原缘)(葬原员)(葬垣园)(葬垣缘)}$

越葬垣员

摇摇本题是园个典型用分式先约简再求值的题，值得读者留意援当然这种题解法很多，如(员)也可这样做：

原式越$\frac{愿·猿缘远垣猿缘猿}{愿·猿缘远垣猿缘缘}$

越$\frac{愿·猿缘远垣(猿缘原员)}{愿·猿缘远垣(猿缘垣员)}$

越$\frac{(猿)猿缘原员(猿)猿缘垣员}{(猿)猿缘原员(猿)猿缘垣员}$

越$\frac{远园员}{远园缘}$

所以像这样的题读者可以反复试用不同的方法做，以训练运算的基本功及解

越猿猿缘

注 解像本例子中这类关于复杂数字计算的问题,关键在于观察发现其中包含的数字之间的关系,并用字母代表其中起主要作用的数援进而把原式用字母的代数式表示出来,先约简再计算援

题的灵活性援

摇摇员原远摇已知 葬遭糟凿均为正数,设 泽越$\frac{葬}{葬垣遭垣凿}$垣$\frac{遭}{葬垣遭垣糟}$垣$\frac{糟}{遭垣糟垣凿}$垣$\frac{凿}{葬垣糟垣凿}$求证 员约泽约圆援

证摇由于 葬遭糟凿均为正数,故

摇摇杂越$\frac{葬}{葬垣遭垣凿}$垣$\frac{遭}{葬垣遭垣糟}$垣$\frac{糟}{遭垣糟垣凿}$垣$\frac{凿}{葬垣糟垣凿}$

跃$\frac{葬}{葬垣遭垣糟垣凿}$垣$\frac{遭}{葬垣遭垣糟垣凿}$垣$\frac{糟}{葬垣遭垣糟垣凿}$垣$\frac{凿}{葬垣遭垣糟垣凿}$

越$\frac{葬垣遭垣糟垣凿}{葬垣遭垣糟垣凿}$越员

又摇泽越$\frac{葬}{葬垣遭垣凿}$垣$\frac{遭}{葬垣遭垣糟}$垣$\frac{糟}{遭垣糟垣凿}$垣$\frac{凿}{葬垣糟垣凿}$

约$\frac{葬}{葬垣遭}$垣$\frac{遭}{葬垣遭}$垣$\frac{糟}{糟垣凿}$垣$\frac{凿}{糟垣凿}$

越$\frac{葬垣遭}{葬垣遭}$垣$\frac{糟垣凿}{糟垣凿}$越圆

亦 员约泽约圆

摇摇此证明根据的是正分数分母增大,分数值变小,分母减小,分数值变大这一性质援

所使用的证明不等式的方法称为“放缩法”援

摇摇员原苑摇若 葬曾赠扎为正整数,且 曾约赠约扎,$\frac{员}{曾}$垣$\frac{员}{赠}$垣$\frac{员}{扎}$越葬,求 曾赠扎援

解摇由于 曾赠扎为正整数,且 曾约赠约扎,故 曾≥员,赠≥圆,扎≥猿,因而 $\frac{员}{曾}$≤员,$\frac{员}{赠}$≤$\frac{员}{圆}$,$\frac{员}{扎}$≤$\frac{员}{猿}$援

亦摇园约葬越$\frac{员}{曾}$垣$\frac{员}{赠}$垣$\frac{员}{扎}$≤员垣$\frac{员}{圆}$垣$\frac{员}{猿}$越员$\frac{缘}{远}$

由于 葬是整数,故 葬越员,且 曾≠员援

当 曾≥猿时,$\frac{员}{猿}$≥$\frac{员}{曾}$跃$\frac{员}{赠}$跃$\frac{员}{扎}$,因而使

摇摇摇摇$\frac{员}{曾}$垣$\frac{员}{赠}$垣$\frac{员}{扎}$约$\frac{员}{猿}$垣$\frac{员}{猿}$垣$\frac{员}{猿}$越员

即 曾≥猿不能成立,故只能是 曾越圆援

当 曾越圆时,$\frac{员}{赠}$垣$\frac{员}{扎}$越员原$\frac{员}{曾}$越$\frac{员}{圆}$,而当 赠≥源时,$\frac{员}{源}$≥$\frac{员}{赠}$跃$\frac{员}{扎}$援

因而

摇摇本题从直觉上应一眼看出只有 葬越员一种情况,然后就给以证明援得到 葬越员后,曾越圆,赠越猿,扎越远也就一目了然了援

解题时一定要具备这种“洞察力”援

摇摇摇摇 员/赠 垣 员/扎 约 员/源 垣 员/源 越 员/圆

即 曾越圆时，赠≥源不能成立，只能是 赠越猿援

亦摇曾越圆，赠越猿，扎越远援

员猿援摇分式运算的方法和技巧

摇摇员原猿摇计算：（曾原愿/曾原怨 原 曾原苑/曾原愿 原 曾原缘/曾原远 垣 曾原源/曾原缘）衣（员/曾原愿 垣 员/曾原远）

解摇原式 越（员垣 员/曾原怨 原员原 员/曾原愿 原员原 员/曾原远 垣员垣 员/曾原缘）衣 圆曾原员源/（曾原愿）（曾原远）

摇摇 越［（员/曾原怨 原 员/曾原愿）原（员/曾原远 原 员/曾原缘）］·（曾原愿）（曾原远）/圆（曾原苑）

越［员/（曾原怨）（曾原愿） 原 员/（曾原远）（曾原缘）］·（曾原愿）（曾原远）/圆（曾原苑）

越（曾原远/曾原怨 原 曾原愿/曾原缘）·员/圆（曾原苑）

越 曾圆原员员曾垣猿园原曾圆垣员苑曾原苑圆/（曾原怨）（曾原缘）·员/圆（曾原苑）

越 远（曾原苑）/（曾原怨）（曾原缘）·员/圆（曾原苑）

越 猿/（曾原怨）（曾原缘）

摇摇员原源摇化简

摇摇 遭原糟/（葬原遭）（葬原糟） 垣 糟原葬/（遭原糟）（遭原葬） 垣 葬原遭/（糟原葬）（糟原遭） 原 圆/葬原遭 原 圆/糟原葬

解 员摇设 曾越葬原遭，赠越遭原糟，扎越糟原葬，则

摇原式 越原 赠/曾扎 原 扎/曾赠 原 曾/赠扎 原 圆/曾 原 圆/扎

越原 赠圆垣扎圆垣曾圆垣圆赠扎垣圆曾赠/曾赠扎

越原（赠垣扎）圆垣曾圆垣圆曾赠/曾赠扎

摇摇遇到分式加、减法，先将假分式化成真分式为好；而分式乘、除法，最主要是先分解因式，再约简援

摇摇换元使原式变得简明，便于进行运算援

实践·应用·提高

由于 曾亘赠亘扯越园，即有 赠亘扯越原曾及 曾亘赠越原扎

亦 原式 越原$\frac{曾\ 垣曾\ 垣园赠}{曾赠扎}$

越原$\frac{园曾(曾亘赠)}{曾赠扎}$

越$\frac{园}{赠}$越$\frac{园}{遭原糟}$

摇摇解 圆摇 原式 越$\frac{(葬原糟)原(葬原遭)}{(葬原遭)(葬原糟)}$垣$\frac{(遭原葬)原(遭原糟)}{(遭原葬)(遭原糟)}$垣$\frac{(糟原遭)原(糟原葬)}{(糟原遭)(糟原葬)}$

摇原$\frac{园}{葬原遭}$原$\frac{园}{糟原葬}$

越$\frac{员}{葬原遭}$原$\frac{员}{葬原糟}$垣$\frac{员}{遭原糟}$原$\frac{员}{遭原葬}$垣$\frac{员}{糟原葬}$原$\frac{员}{糟原遭}$原$\frac{园}{葬原遭}$原$\frac{园}{糟原葬}$

越$\frac{园}{遭原糟}$

摇摇此解法关键是能想到把 遭原糟 转化为(葬原糟)原(葬原遭)，把 糟原葬 转化为(遭原葬)原(遭原糟)，把 葬原遭 转化为(糟原葬)原(糟原遭)援

摇摇员原猿摇计算$\frac{(葬原遭)(葬原糟)}{(葬亘遭原园糟)(葬亘糟原园遭)}$垣$\frac{(遭原糟)(遭原葬)}{(遭亘糟原园葬)(遭亘葬原园糟)}$垣$\frac{(糟原葬)(糟原遭)}{(糟亘葬原园遭)(糟亘遭原园葬)}$

解摇设 曾越葬原遭，赠越遭原糟，扯越糟原葬，

则摇摇摇葬亘遭原园糟越(遭原糟)原(糟原葬)越赠原扎

同样，遭亘糟原园葬越扎原曾，糟亘葬原园遭越曾原赠

亦摇原式 越$\frac{原曾扎}{(赠原扎)(曾原赠)}$垣$\frac{原曾赠}{(扎原曾)(赠原扎)}$垣$\frac{原赠扎}{(曾原赠)(扎原曾)}$

越原$\frac{曾扎(扎原曾)垣曾赠(曾原赠)垣赠扎(赠原扎)}{(曾原赠)(赠原扎)(扎原曾)}$

越原$\frac{曾扎原曾扎亘曾赠原曾赠垣赠扎原赠扎}{(曾原赠)(赠原扎)(扎原曾)}$

越原$\frac{(曾原赠)扎原(曾原赠)扎亘曾赠(曾原赠)}{(曾原赠)(赠原扎)(扎原曾)}$

越原$\frac{(曾原赠)[扎原(曾亘赠)扎亘曾赠]}{(曾原赠)(赠原扎)(扎原曾)}$

越原$\frac{(曾原赠)(扎原赠)(扎原曾)}{(曾原赠)(赠原扎)(扎原曾)}$越员

摇摇这里由于 葬原遭，遭原糟，糟原葬 出现比较对称，而(葬亘遭原园糟)越[(葬原糟)垣(遭原糟)]，故令 曾越葬原遭，赠越遭原糟，扎越糟原葬，使分式变得简洁援

实践·应用·提高

摇摇员原远摇化简摇$(曾^{圆}原员)(曾垣\frac{员}{曾})(曾^{圆}垣\frac{员}{曾^{圆}})(曾^{源}垣\frac{员}{曾^{源}})\cdots(曾^{圆卄}垣\frac{员}{曾^{圆卄}})$

解摇原式 $越曾(曾原\frac{员}{曾})(曾垣\frac{员}{曾})(曾^{圆}垣\frac{员}{曾^{圆}})(曾^{源}垣\frac{员}{曾^{源}})\cdots(曾^{圆卄}垣\frac{员}{曾^{圆卄}})$

$越曾(曾^{圆}原\frac{员}{曾^{圆}})(曾^{圆}垣\frac{员}{曾^{圆}})(曾^{源}垣\frac{员}{曾^{源}})\cdots(曾^{圆卄}垣\frac{员}{曾^{圆卄}})$

$越曾(曾^{源}原\frac{员}{曾^{源}})(曾^{源}垣\frac{员}{曾^{源}})\cdots(曾^{圆卄}垣\frac{员}{曾^{圆卄}})$

越…

$越曾(曾^{圆卄员}原\frac{员}{曾^{圆卄员}})$

$越曾^{圆卄垣员}原\frac{员}{曾^{圆卄原员}}$

摇摇反复运用二数平方差公式，解法构思巧妙，化简到最后，应注意关于曾的幂的运算结果要表示正确援

摇摇员原苑摇化简摇泽越$\frac{员}{员垣曾}垣\frac{圆}{员垣曾^{圆}}垣\frac{源}{员垣曾^{源}}垣\cdots垣\frac{圆^{卄}}{员垣曾^{圆卄}}$

解摇原式 越$\frac{员}{员原曾}垣\frac{员}{员垣曾}垣\frac{圆}{员垣曾^{圆}}垣\frac{源}{员垣曾^{源}}垣\cdots垣\frac{圆^{卄}}{员垣曾^{圆卄}}原\frac{员}{员原曾}$

$越\frac{圆}{员原曾^{圆}}垣\frac{圆}{员垣曾^{圆}}垣\frac{源}{员垣曾^{源}}垣\cdots垣\frac{圆^{卄}}{员垣曾^{圆卄}}原\frac{员}{员原曾}$

越…

$越\frac{圆^{卄}}{员原曾^{圆卄}}垣\frac{圆^{卄}}{员垣曾^{圆卄}}原\frac{员}{员原曾}$

$越\frac{圆^{卄员}}{员原曾^{圆卄员}}原\frac{员}{员原曾}$

$越\frac{圆^{卄员}原员原圆^{卄员}曾垣曾^{圆卄员}}{(员原曾)(员原曾^{圆卄员})}$

摇摇此题与前一例题有异曲同工之妙，都是连续运用二数平方差公式，前一例是求连乘积，此例是逐步通分，连续求和援因此在和式之前加了 $\frac{员}{员原曾}$ 一项，而在最后减去此项援对 $\frac{员}{员原曾}垣\frac{员}{员垣曾}越\frac{圆}{员原曾^{圆}}$ 要十分熟悉援

摇摇员原愿摇化简 $曾原曾衣\left[\frac{曾^{圆}原赠^{圆}}{曾^{圆}垣赠^{圆}}\left(曾原\frac{曾^{圆}垣赠^{圆}}{赠}\right)衣\left(\frac{员}{曾}原\frac{员}{赠}\right)\right]$

解摇原式 $越曾原曾衣\left[\frac{(曾垣赠)(曾原赠)}{(曾垣赠)(曾^{圆}原曾赠垣赠^{圆})}\cdot\frac{曾赠原曾^{圆}原赠^{圆}}{赠}衣\frac{赠原曾}{曾赠}\right]$

$越曾原曾衣\left[\frac{赠原曾}{赠}\cdot\frac{曾赠}{赠原曾}\right]$

摇摇四则混合运算应特别注意运算顺序及符号援

实践·应用·提高

越曾原曾衣曾

越曾原员

摇摇员原凤摇已知葬遭糟均为正数,且葬遭糟越员,计算 葬/(葬遭垣葬垣员) 垣 遭/(遭糟垣遭垣员) 垣 糟/(糟葬垣糟垣员) 的值援

解员摇由于葬遭糟越员,故

摇 葬/(葬遭垣葬垣员) 垣 遭/(遭糟垣遭垣员) 垣 糟/(糟葬垣糟垣员)

越 葬/(葬遭垣葬垣员) 垣 葬遭/(葬遭糟垣葬遭垣葬) 垣 葬遭糟/(葬遭糟葬垣葬遭糟垣葬遭)

越 葬/(葬遭垣葬垣员) 垣 员/(员垣葬遭垣葬) 垣 葬/(葬垣员垣葬遭)

越 (葬遭垣葬垣员)/(葬遭垣葬垣员) 越员

摇摇解圆摇由于葬遭糟越员,故糟越 员/葬遭

亦摇 葬/(葬遭垣葬垣员) 垣 遭/(遭糟垣遭垣员) 垣 糟/(糟葬垣糟垣员)

越 葬/(葬遭垣葬垣员) 垣 (遭/葬遭)/((遭/葬遭)垣遭垣员) 垣 (葬/葬遭)/((葬/葬遭)垣(员/葬遭)垣员)

越 葬/(葬遭垣葬垣员) 垣 员/(员垣葬遭垣葬) 垣 葬/(葬垣员垣葬遭) 越 (葬遭垣葬垣员)/(葬遭垣葬垣员) 越员

摇摇直接通分太繁,根据分式的基本性质,巧妙利用已知条件,再把分母通分是这种解法的关键援

摇摇解法圆用的是“消元”的方法援

摇摇员原圆摇化简 [(曾/赠垣赠/曾垣圆)(员/曾原员/赠)^圆] / [曾^圆/赠^圆垣赠^圆/曾^圆原(赠/曾垣曾/赠)]

解摇原式越 [(曾^圆垣赠^圆垣圆曾赠)/曾赠 · (曾原赠)^圆/(曾^圆赠^圆)] / [(曾^源垣赠^源原曾赠(曾^圆垣赠^圆))/(曾^圆赠^圆)] 越 (曾原赠)^圆(曾^圆原赠^圆)/(曾赠(曾^源原曾^猿赠原曾赠^猿垣赠^源))

越 (曾原赠)^圆(曾^圆原赠^圆)/(曾赠(曾原赠)^圆(曾^圆原赠^圆))

越 员/曾赠

摇摇

实践·应用·提高

员援摇比例的性质

摇摇员原园摇已知 曾赠都是正数，葬约遭约园，$\frac{曾}{赠}$越$\frac{葬}{遭}$，且 曾垣赠越糟那么 曾赠中较小的一个为（摇摇）援

粤援$\frac{葬糟}{葬垣糟}$摇摇月援$\frac{葬糟}{遭垣糟}$摇摇悦援$\frac{葬糟}{葬垣遭}$摇摇阅援$\frac{遭糟}{葬垣遭}$

解摇已知 曾赠是正数，葬约遭约园

亦 $\frac{曾}{赠}$越$\frac{葬}{遭}$越$\frac{澡葬}{澡遭}$约员故 曾约赠由合比定理得$\frac{曾垣赠}{赠}$越$\frac{葬垣遭}{遭}$，由于 曾垣赠越糟因此有$\frac{糟}{赠}$越$\frac{葬垣遭}{遭}$，即 赠越$\frac{遭糟}{葬垣遭}$援　　选 阅援

摇摇员原园摇若$\frac{曾}{猿赠}$越$\frac{赠}{圆曾原缘赠}$越$\frac{远曾原员缘赠}{曾}$，则$\frac{源曾^圆原缘曾赠垣远赠^圆}{曾^圆原圆曾赠垣猿赠^圆}$的值是（摇摇）援

粤援$\frac{怨}{圆}$摇摇月援$\frac{怨}{源}$摇摇悦援缘摇摇阅援远

解 员摇设$\frac{曾}{猿赠}$越$\frac{赠}{圆曾原缘赠}$越$\frac{远曾原员缘赠}{曾}$越噪则

摇摇摇摇{ 曾越猿噪赠 ①；赠越噪（圆曾原缘赠）摇摇摇摇摇 ②；远曾原员缘赠越噪曾 ③ }

由①、②得，赠越远噪^圆赠原缘噪赠又由 赠≠园故

远噪^圆原缘噪原员越园

亦摇（噪原员）（远噪垣员）越园

因此摇噪越员或 噪越原$\frac{员}{远}$

将 噪越原$\frac{员}{远}$代入③得 远曾原员缘赠越原$\frac{员}{远}$曾即 猿苑曾越怨园赠

而 噪越原$\frac{员}{远}$代入①得 曾越原$\frac{员}{圆}$赠

摇摇由于 赠≠园所以 曾越原$\frac{员}{圆}$赠与 猿苑曾越怨园赠矛盾，故舍去 噪越原$\frac{员}{远}$援

经检验 噪越员满足①、②、③组成的方程组，此时 曾越猿赠援

亦 $\frac{源曾^圆原缘曾赠垣远赠^圆}{曾^圆原圆曾赠垣猿赠^圆}$越$\frac{源·（猿赠）^圆原缘·（猿赠）·赠垣远赠^圆}{（猿赠）^圆原圆·（猿赠）·赠垣猿赠^圆}$越$\frac{怨}{圆}$　　选 粤援

解 圆摇由$\frac{曾}{猿赠}$越$\frac{赠}{圆曾原缘赠}$得 圆曾^圆原缘曾赠原猿赠^圆越园即（圆曾垣赠）（曾原猿赠）越园因

摇摇关于比例的性质：若$\frac{葬}{遭}$越$\frac{糟}{凿}$，则下述结论成立：

（员）基本性质：

葬凿越遭糟

（圆）反比定理：

$\frac{遭}{葬}$越$\frac{凿}{糟}$

（猿）更比定理：

$\frac{葬}{糟}$越$\frac{遭}{凿}$

（源）合比定理：

$\frac{葬垣遭}{遭}$越$\frac{糟垣凿}{凿}$

（缘）分比定理：

$\frac{葬原遭}{遭}$越$\frac{糟原凿}{凿}$

（远）合分比定理：

$\frac{葬原遭}{葬垣遭}$越$\frac{糟原凿}{糟垣凿}$

（苑）等比定理：

若$\frac{葬}{遭}$越$\frac{糟}{凿}$越$\frac{藻}{枣}$

则$\frac{葬}{遭}$越$\frac{糟}{凿}$越$\frac{藻}{枣}$

越$\frac{葬垣糟垣藻}{遭垣凿垣枣}$

摇摇

实践·应用·提高

此 曾越原$\frac{员}{圆}$赠或 曾越猿赠援又由$\frac{曾}{猿赠}$越$\frac{远曾原猿赠}{曾}$得 曾原远曾赠垣怨赠越园 即(曾原猿赠)(曾原猿赠)越园,因此,曾越猿赠或 曾越猿赠援

所以,由已知的比例式只能得 曾越猿赠援

故$\frac{源曾原缘赠垣远赠}{曾原园赠垣猿赠}$越$\frac{怨}{圆}$援 选 粤援

摇摇员原园摇已知正整数 曾赠皂灶满足$\frac{曾}{赠}$越$\frac{赠}{皂}$越$\frac{皂}{灶}$越$\frac{缘}{愿}$则 曾垣赠垣皂垣灶的最小值是摇摇摇援

解摇由已知得 曾越$\frac{缘}{愿}$赠摇赠越$\frac{缘}{愿}$皂,摇皂越$\frac{缘}{愿}$灶,因此

摇摇摇摇曾越($\frac{缘}{愿}$)圆皂越($\frac{缘}{愿}$)猿灶越$\frac{缘猿}{愿猿}$灶

由于 曾灶都是正整数,而(缘愿)越员,故 愿猿能整除 灶因此 灶的最小值为 愿猿,进而 皂最小值为 缘伊愿圆,赠的最小值为 缘圆伊愿,曾的最小值为 缘猿援

亦 曾垣赠垣皂垣灶的最小值为 缘猿垣缘圆伊愿垣缘伊愿圆垣愿猿越员远苑

填员远苑

摇摇员原园摇如果$\frac{员}{曾垣园赠}$越$\frac{源}{赠原曾}$越$\frac{猿}{园曾垣员}$,则$\frac{园源}{猿}$(赠原曾)的值是摇摇摇援

解 员摇已知$\frac{员}{曾垣园赠}$越$\frac{源}{赠原曾}$越$\frac{猿}{园曾垣员}$,所以,源曾垣园赠越赠原曾且 猿曾垣园赠越园曾垣员原整理得

摇摇摇摇$\begin{cases}缘曾垣苑赠越园\\员曾原猿赠越原原\end{cases}$

解得摇曾越原$\frac{苑}{园源}$赠越$\frac{缘}{园源}$

亦$\frac{园源}{猿}$(赠原曾)越$\frac{园源}{猿}$·($\frac{缘}{园源}$垣$\frac{苑}{园源}$)越原 填源

摇摇解 园摇将原连比颠倒并令

摇摇摇摇$\frac{曾垣园赠}{员}$越$\frac{赠原曾}{源}$越$\frac{园曾垣员}{猿}$越噪

于是摇赠原曾越源噪摇摇摇摇摇摇摇摇摇①

曾垣园赠越噪摇摇摇摇摇摇 ②

园曾垣员越猿噪摇摇摇摇摇摇摇摇摇③

①②消去 赠得摇猿曾越原苑噪摇摇摇摇摇④

④与③消去 曾得摇噪越$\frac{猿}{园源}$

摇摇该题中的 曾赠皂灶称为等比数列援

摇摇解 员是用三式连比相等,相当于两个方程,求解两个未知数的方法援

摇摇解 园更巧妙,将连比式颠倒,只求 噪便得结果援

实践·应用·提高