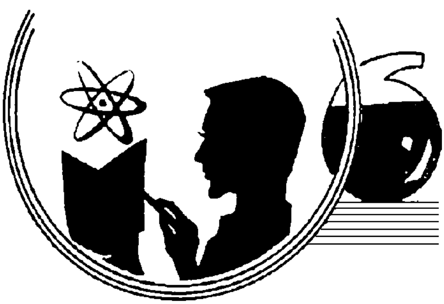
●世界课程改革与教学创新文库(第三辑)

## 学科课程改革与教学创新

# 数学解题与竞赛教学及评价

北京师联教育科学研究所　编



学苑音像出版社

责任编辑：冯克诚　王　军
封面设计：师联平面工作室

世界课程改革与教学创新文库

（第三辑）

学科课程改革与教学创新

# 数学解题与竞赛教学及评价

北京师联教育科学研究所　编

★

学苑音像出版社出版发行
2004 年 12 月印刷
开本：850×1168　1/32　印张：228　字数：5925 千字
ISBN 7-88050-122-3
全 38 册配碟发行 638.40 元（册均 16.80 元　不含碟）

# 目　录

# 问题解决数学课程设置的社会历史背景

二次世界大战后，数学及其教育进入了现代时期。现代数学教育存在着数学教育如何适应现代社会需要这样一个基本矛盾，为了解决这一矛盾，实现数学教育的价值与功能，人们对进行数学教育改革做了不懈的努力。

这一矛盾在英、美、日等国的表现形态是：进入信息化的“后工业社会”时期，以电子计算机技术为先导的高度发达的科学技术主导着社会生产以及社会生活的各个层面，而数学教育尤其是中小学的数学教育与其形成了尖锐的对立。50—60 年代的“新数学运动”，数学课程内容结构化由于脱离了学生的认识实际，不仅没有达到预期的目的，而且将数学教育推向了失败的边缘。70 年代“回归基础运动”重又回到传统数学教育那种重视知识传授、基本技能训练，忽视数学思维能力的培养和数学观念的树立，基本矛盾不但没有解决，反而更加尖锐。进入 80 年代以来，人们不仅认识到数学教育的技术功能，而且重视了它的文化功能；不仅重视数学的科学价值，而且也注意了其多方面的价值。于是提出以创造性地解决问题为途径，以培养学生的数学思维能力和树立数学观念为宗旨的“问题解决”，将其作为解决上述基本矛盾的有效途径。

“问题解决”本是心理学学习理论中的一个重要部分，长期以来行为派心理学家和认知派心理学家对问题解决的见解存在着分歧，前者倾向于用尝试错误来解释，后者倾向于用顿悟来解释。本世纪 50 年代以来，信息加工的认知心理学观点发展迅速。目前已成为西方心理学的一个主要方向。

在数学教育中,问题解决的原始意义是指解决数学问题。最早的有代表性的著作是美国数学教育家波利亚(Polya,G.)的《怎样解题》。波利亚将解题的过程描述为如下四个阶段:1.理解问题;2.设立解题计划;3.执行计划;4.回顾。波利亚把传统的单纯解题过程发展为通过解题获得新知识和新技能的学习过程,这种观点已得到数学教育界的公认。

受波利亚的问题解决思想的启示.1980年,全美数学教师协会(NCTM)在充分调查的基础上提出了对80年代中小学数学的建议(文件标题为《行动日程对80年代数学教育的劝告书》),提出了"必须把问题解决作为80年代中小学数学教育的核心",并且主张'在解决问题方面的成绩如何,将是衡量数学教育成效的有效标准。'同时对问题解决的意义等作了如下阐述。

关于问题解决的意义:

"数学上问题解决这一定义和语汇应当发展和扩充到包括各方面数学应用的广泛策略、过程和描述模型。问题解决包括把数学应用于现实世界,为现在和将来的理论和实践科学服务,并解决延伸到数学科学本身前沿中的问题。"

关于问题解决能力:

"问题解决能力需要广泛的知识积累,不仅是专门的技巧和概念,而且包括它们之间的相互联系和统一它们的基本原理。发展问题解决能力的基本因素是开阔的头脑,好奇和探险的态度,探索、尝试、理智地猜测的意愿。数学教师应该创造使问题解决繁荣开展的课堂环境。应该鼓励学生提问、实验、探索和解释。问题解决本质上是一种创造活动,不能建立在常规、解题术和公式上。"

关于数学课程:

"大部分现行教材主要强调学习数学的法则或方法,因此不适合于充分开展问题解决的方法。现行教材中的问题带有易于分类定型的倾向,与现实生活中丰富的多种问题很少有相同之处,它们排斥了

现实问题所需要的广泛策略和能力，数学课程应该围绕问题解决来组织，应该开发适合于各个年级的问题解决数学的课程教材。学生在解决个人的、专业的和日常生活中的问题时所需要的是以预见和计划外的场合下技能的选择和应用为重点的课程。”

1982 年，英国在《Cockcroft 报告》中亦要求将‘问题解决作为课程论的主要组成部分”，强调‘数学只有在解决各种实际问题的情况下才是有用的。’日本在 1983 年开始研究，1987 年课程审议会在方案中指出，制定数学课程时要‘提高问题解决的能力。’其后，许多国家开展了问题解决的研究、实践，90 年代以来问题解决更成为世界数学教育的热点，许多国家已将‘问题解决’的成果与模式融汇于数学课程之中，纷纷制定了具体的课程目标、课程内容等。

# 问题解决数学课程设置的目的

制定问题解决课程的意义在于,使学生受到开展问题解决的基本训练,并促进实现问题解决学习目标与产生学习兴趣及提高数学能力之间的协调。在美国,问题解决数学课程以实用为目的,以基本技能的培养为中心,强调数学课程应该围绕问题解决来组织;应该发展数学解题的定义和语言,并且扩展到广泛的策略、过程以及包含全部数学应用展现的模式;数学教师应创造使问题解决活跃起来的学习环境;应该发展各年级数学问题解决的课程教材等等。在日本,问题解决数学课程则偏重于生动活泼的学习活动。虽然问题解决至今还没有被纳入正规的教学计划,也没有正式的教材,一般都是由教师根据自己的意向组织内容,以专题形式插入教学计划,但是问题解决数学课程的基本目标(提高学生的资质和能力)和基本手段(发现法)已在日常教学中得到充分重视。英国则有较大的举措,根据问题解决教学自身体系独特的一面,专门设置了 A 水平(高中)问题解决数学课程,提出课程的目的在于认识数学的意义(价值),培养学生创造自己的数学知识的能力,并树立起自身数学能力的信心。具体使学生能够:1.增强对数学本质的理解,包括证明过程以及作为创造性活动的数学;2.了解在广泛的领域里,无论是对数学问题本身还是实际问题,数学都是解决问题的工具;3.提高数学论辩的严密性;4.理解数学发展的动力之一是问题处于进退维谷境地时;5.培养数学探索的意识,在探究过程中自信地灵活地使用数学,准确地表达自己的思想且能给以证实;6.产生读数学的动机和兴趣,能有理有据地写数学报告;7.培养数学探究的自信心和追求问题时的耐心,并积极尝试新方法。

# 问题解决数学课程的主要内容

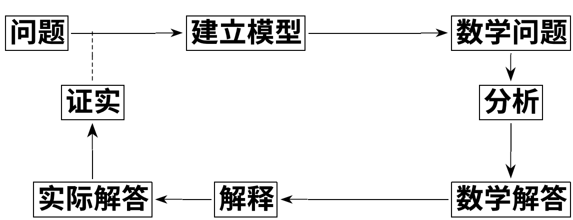
美国全美数学教师协会(NCTM)在1989年3月发表了《中小学数学课程评估标准》,标准提出五项条件,作为"有数学素养"的标记,其中第三条要求"成为具有解决数学问题能力的人",同时在中小学数学课程的分阶段标准中均提出问题解决方面的要求。问题解决是一切数学活动的组成部分,它应该成为数学课程的核心。具体要求对数学内容的学习用问题解决的方式进行,以及问题解决是学习解题策略的有效途径等。例如可以通过尝试与改正错误的途径去寻找答案,也可以通过创造表格、或者画出图像、或者建立模型等途径,这些都是常用的方法。而且随着年级的递增,对问题解决的要求亦逐渐加深。它要求学生能够有把握地用问题解决的步骤去学习新的数学内容;能将合适的解题策略用于解决来自数学内部或外部的问题;特别是要求学生通过问题求解的活动去掌握诸如数学模型、数学模式、数学模拟等一般的数学方法。这里值得指出的是,与问题解决相关的一个内容:数学建模——通过应用学习数学在美国数学课程中已得到充分体现。例如,UCSMP(美国芝加哥大学学校数学方案)教材就颇具特色。首先,面向现实,"应用与模型化"成为教材的一条主线,从而明确了学习目标,极大地激发了学生学习数学的兴趣和积极性。现实世界是数学的丰富源泉,也是数学应用的归宿,任何数学概念都可以在现实中找到它的原型,只要细心地观察周围的世界,我们就能发现,到处都是数学。UCSMP教材将在现实世界的许多方面寻找到数学概念的"影子",呈现在学生的面前,让学生惊奇地发现数学原来是那么贴近生活,从而激发他们通过在现实世界中的应用来理

解概念进而解决现实世界中发现的问题，概念源于现实，又必须用于现实。在这中间作为桥梁的一条重要途径则是"模型化"，UCSMP 创造性地将模型化思想渗透于中学数学课程之中，更进一步加强了问题解决数学课程的内容。其次，教材强调对学生阅读数学能力，自我评价能力和问题解决能力的培养，使学生的数学能力得到全面的发展，终身受用不尽。例如 UCSMP 教材课文的引入都是以阅读材料的方式进行，这些材料内容广泛，形式各异，有绚丽多彩的图片，有生动具体的现实问题，有让人着迷的数学史，有发人深省的悬念，也有有待解决的形形色色的实际问题，还有数学学科及其应用的最新发展等；课题的关键概念、有关词汇以及定义、定理、有意义的例题等穿插其中，这使得学生在娓娓动人的叙述和问题解决中学到数学知识、懂得数学的来源与背景以及数学的应用与价值。

英国则专门明确设置了 A 水平（高中）问题解决课程，主要内容有：1.如何开展数学探究；2.如何组织数学问题；3.数学模型化；4.数学交流；5.个案研究；6.数学问题。

开展数学探究包括：探究的态度、信心和一般程序、一般程序是从直觉和经验产生解决问题的构想和猜想入手，通过分析问题中的特殊情况，寻找问题的一般形式，最后证实结果。

问题的数学组织包括数学抽象与符号化。主要学习注记、符号、分类、图表等。数学模型化即数学模型的建构，是按以下程序进行的：




其中建立模型是指定义问题并给出数学公式，包括假设和选取主要变量，确定变量间的关系，数学组织。分析是指利用数学知识得

到模型的解。解释是指把数学解答摆在现实问题中去考虑。证实是指通过现实问题衡量解的可靠性，必要时修改模型。模型化过程可再一次循环。

数学交流作为问题解决的表现形式，主要涉及‘用数学方法表现问题解决的过程和结果。’这里主要针对证实模型公式时的推理与逻辑分析，强调数学严密性的意识，数学批判精神和数学论辨能力。

个案研究赋予学生问题解决的范例，同时这些学习情景还反映了其数学思维方法和数学品质（批判精神，积极尝试新方法等）。

数学问题是交给学生问题解决的课题报告题目。课题中所设计的问题多为开放性的实际问题，有些需要实地调查获取数据。同时鼓励学生自己提出和设计问题。

# 波利亚的解题方案与有序思维

本世纪五十年代，美国心理学家和人工智能专家西蒙与纽厄尔等人为了用计算机来模拟人的思维，作了大量的心理学实验。他们发现，人在解题过程中的思维活动，大体可分为三个阶段：第一、想出大致的"解题计划"；第二、根据记忆中的理论和推理法则"组织解题"；第三、进行方法和目标分析。西蒙与纽厄尔把人类解决问题时的心理活动总结成了一些规则，然后用计算机模拟，使计算机表现出了人类的很多智能，如解方程和方程组、微分和积分，甚至于证明数学定理和下棋等等。

西蒙与纽厄尔的发明，与美国数学家和数学教育家波利亚长期研究的结果基本相同。早在西蒙与纽厄尔之前，波利亚就已经指出，即使是探索性思维也仍然遵循着某些程序和规则、掌握了这些程序和规则，就可以有效地避免盲目性，在探索的过程中少走弯路。为了帮助学生比较顺利地解答问题，不至于在问题面前束手无策，波利亚在其名著《怎样解题》中曾给出了一个关于"怎样解题"的总方案，其主要步骤是：

第一、你必须弄清问题（包括弄清未知数是什么？已知数据和条件是什么？画张图，引入适当的符号，等等）。

第二、找出已知数与未知数之间的联系。如果找不出直接的联系，就可能需要考虑某个辅助问题（与此有关的更普遍或更特殊，但也更简单更容易的问题），也可能需要改变某些条件，无论如何，应该得出一个大致的解题计划。

第三、实施你的计划（可能在实施过程中还要不断修改原来的计

划,要确保每一步骤的正确)。

第四、解题的回顾。检验所得的答案,并考虑能否用其它方法得出同一结果。

晨光老师按照波利亚的解题方案来解答一个问题,以说明了波利亚解题方案的理解:

金光仪器厂发放本月奖金时,发现由于统计疏误,获一等奖人数比原来预计的多了5人。这样,如果保持一等奖总金额不变,获一等奖的每个人就要少得奖金100元。于是厂长决定增加一等奖总金额,以保证每个一等奖获得者仍然拿到原预定的300元奖金。问实际有几人获一等奖。

第一步、弄清问题。

原问题的叙述比较啰嗦,其中有很多与解题无关的内容,把无关的内容统统省略,就得到如下比较简洁的叙述:

发放一定数目的奖金,原来预定每人300元,由于实际获奖人数比原来预计的多了5人,结果每人所获奖金少了100元。实际有几人获奖?

已知是:(1)原预定每人奖金300元;

(2)实际人数比预计多5人;

(3)结果每人少得奖金100元。

未知是:(1)原奖金总金额:

(2)原预计获奖人数:

(3)实际获奖人数。

要求的是:实际获奖人数。

设实际获奖人数为x。

第二步、找出已知数与未知数之间的联系。

对于本题来说,也就是要找到联系已知与未知的等量关系。我们看到:获奖人数以及每人所获奖金数都发生了变化,但一定数目的奖金总额却未改变。因此,等量关系是:

预定发放的奖金总额＝实际发放的奖金总额

由此等量关系可以列出关于 $x$ 的方程，解方程即得实际获奖人数。这就是我们的解题计划。

第三步、实施计划。

实际获奖人数为 $x$，则原预计获奖人数就是 $x-5$，预定发放的奖金总额就是 $300(x-5)$元；而实际每人只得奖金 200 元，故实际发放奖金总额是 $200x$ 元；于是由上述等量关系得方程：

$300(x-5)=200x$ 解此方程（具体过程从略）得：$x=15$（人）

所以，实际有 15 人获（一等）奖；

第四步、解题的回顾检验所得答案（从略）。

本题也可以用纯算术方法解答，这样想：由于实际获奖人数比预计的多出 5 人，为保证每个人仍拿到原预定的 300 元奖金，就必须使奖金总额加。

$300\times5=1500$（元）

增加 1500 元奖金的结果，每个人实际所拿奖金都增加了 100 元（由 200 元恢复为 300 元）；每人增加 100 元，一共增加了 1500 元，说明有：$1500\div100=15$（人）

所以，实际有 15 人获（一等）奖。

波利亚的解题方案是一种通用程序。适用于解答任何问题，以上用它解决了一个列方程解应用题的问题。只要稍加概括，就可以得到列方程解应用题的一般程序：

理解题意

↓

选择适当的未知数，并用字母表示

↓

找出联系已知与未知的等量关系

↓

根据等量关系列方程

↓

解所得方程

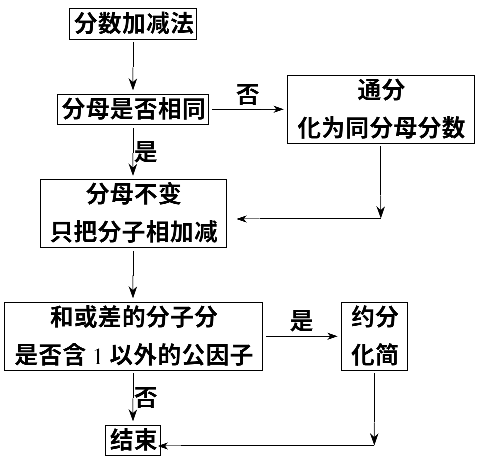
↓

检验

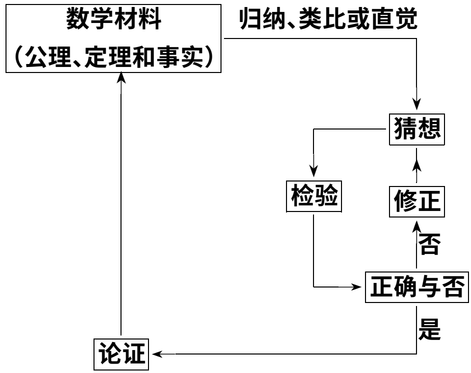
这一程序实际上告诉了我们在列方程解应用题时应该如何思考与行动。

波利亚指出 :许多问题的关键在于某一程序,某种行动次序,某个正确衔接的操作方案,或者是某种模式。

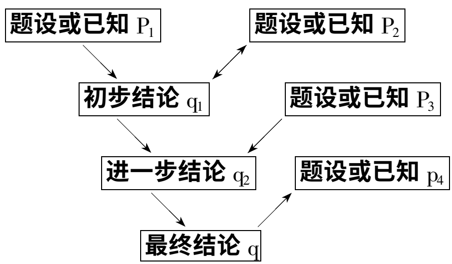
以分数加减法为例,其过程就可以用如下的程序框图表示,无论人或机器(计算机),只要执行这一程序便可顺利地进行分数加减法的运算:



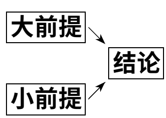

又如,通过猜想而获得数学发现的过程也可以用如下的程序框图表示,无论是数学家还是普通学生,通过猜想而获得数学发现都要经历类似的过程:




至于数学证明，其程序性就更强。综合法证明的程序框图如下：




其每一步都严格遵循逻辑演绎推理模式：




如果我们对与某一问题有关的知识和方法掌握得不够，那么我们在解答这一问题时就有可能不得不进行一些尝试。可即使是尝试，为了减少盲目性，以便尽快找到问题的关键或答案，最好也能按某种次序和规则去进行。请看下例：

有 5 元币与 2 元币共 10 张，总额 32 元，问两种币各有几张？

这一问题与前面我们已经讨论过的‘鸡兔同笼’问题是同构的，用‘假设——比较’法不难得出其解答，而‘假设——比较’法有着相