目录

猿园载·数学解题的创造性思维品质培养(中)

第三部分

猿园载·数学解题中的发散求异思维与一题多解方法

第四部分

猿园载· 数学解题中的联想思维与联想方法

第三部分

猿匦截·数学解题中的发散求异思维与一题多解方法

摇摇□数学发散思维的教学培养与训练（一）

发散性思维是在研究同一问题时，从不同角度，不同结构形式去探索结果的思维方法。它表现为思路开阔，善于联想，长于变化，敢于创新，其实质上是一种创造性思维。如何训练和培养学生的发散性思维，杭州六中王云生老师认为应根据数学课的不同内容和要求，采用不同的方法来进行探索。并将教学实践中采用的一些方法作了如下介绍：

员援从课堂讨论中引导思维的多向性

在讲授新课时采用课堂讨论的方法，不仅能激发学生浓厚的学习兴趣，充分调动他们学习的积极性，而且有利于学生思维的发散。

关于有限制条件的排列组合问题，历来是学生学习上的难点。因为这类问题比较抽象，加上它的思维方法又与以前不同，而且有时解题的结果数字较大不易检验，因而学生在考虑这类问题地经常出现遗漏或重复的错误。对此，在教学中采用‘提出问题、设置悬念、引导讨论:启发思维’的方法，收到了较好的效果。例如‘用园到怨这十个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？”在解题前，设计了这样几组问题:第一组:(员组成这样的三位数，园能不能放在首位？(圆首位应该怎样确定？(猿确定了首位后，其它位上的数又如何确定？

第二组:(员组成这样的三位数，是否一定要包含园?(圆不包含的三位数怎样确定？(猿包含的三位数中，园应该放在哪些位置？这样的三位数又有多少？

第三组:(员如果从这员园个数字中任取猿个，是否都能组成三位数？(圆不能组成三位数的是哪种情况？

通过对这三组问题的逐个讨论，使学生对这个问题中特定的元素园有了较深刻的认识，并逐步明确可以从多方面考虑三位数的构成，从而能正确地列出三种

不同的算式。我在学生讨论列式的基础上再进行了归纳集中，指出这是考虑“从灶个不同元素中每次取出皂个元素的排列，其中某一元素不在某一位置上的排法有几种”？这类问题的三种基本思路，不妨称之为“定位法”，“分类法”和“排除法”，其基本计算公式为孕皂灶原员 孕皂原员灶原员，孕皂灶原员 垣（皂原员）孕皂原员灶原员和孕皂灶 原孕皂原员灶原员。这样的讨论能使教材化难为易，使学生较好地掌握解法，同时思维也得到了发散。

圆援从一题多解中培养思维的变通性

在习题课中围绕典型的例题进行一题多解，让学生有综合运用各种知识的机会，能对问题从不同角度、不同方向去探索和思考，开拓思路，训练思维的变通性和提高解题能力，无疑是十分必要的。

例：已知椭圆方程 曾圆/怨 垣 赠圆/源 越员，求过点 孕（圆，员），且被孕点所平分的弦 粤月的直线方程。

对于这道题，我首先向学生指出，因为要求的是直线方程，且直线过已知点孕，所以解题的关键在于直线的斜率 运，因此要求学生在求斜率这个问题上展开思路。有的学生以斜率为参数，从求直线与椭圆的交点这个方向着手得出。

解员：设粤月的直线方程为 赠原员越噪（曾原圆），代入椭圆方程，得（源垣怨噪圆）曾圆 垣猿愿（噪原圆噪圆）曾垣猿远噪圆原猿远噪原圆苑越园，然后利用韦达定理及中点坐标公式确定 噪越原 原愿/怨，可求得弦的方程。

这种解法思路直接，容易想到，学生也习惯运用，但不难看出计算过程较繁，于是我又启发学生，因为弦的斜率 运和中点 孕都与端点的坐标有关，能否以端点坐标为参数，利用端点坐标满足椭圆方程来求得两端点坐标间的关系，再结合斜率公式求 噪，于是又有

解圆：设弦的端点坐标为 粤（曾员，赠员），月（曾圆，赠圆），则有 源曾员圆 垣怨赠员圆 越猿远，源曾圆圆 垣怨赠圆圆 越猿远，两式相减，整理得，源（曾员 垣曾圆）（曾员 原曾圆）垣怨（赠员 垣赠圆）（赠员 原赠圆）越园，将 噪越 （赠员 原赠圆）/（曾员 原曾圆）及中点坐标公式代入即得 噪值。

在此基础上我又引导学生利用直线和椭圆的参数方程解题。

解猿：设弦粤月的参数方程为 { 曾越圆垣贼糟燥泽α ； 赠越员垣贼泽蚤灶α， 代入椭圆方程，得（源糟燥泽圆α 垣怨泽蚤灶圆α）贼圆 垣（员远糟燥泽α 垣员愿泽蚤灶α）贼原员苑越园，疫孕是中点，由贼的几何意义知 贼员垣贼圆越园，即员远糟燥泽α 垣员愿泽蚤灶α 越园，易得 噪越贼葬灶α 越原 愿/怨

解源：疫椭圆的参数方程为 { 曾越猿糟燥泽θ，赠越圆泽蚤灶θ，

亦可设 粤（猿糟燥泽θ员，圆泽蚤灶θ员），月（猿糟燥泽θ圆，圆泽蚤灶θ圆），由 （猿（糟燥泽θ员 垣糟燥泽θ圆））/圆 越圆

$\frac{圆(泽蚤灶_{员}垣泽蚤灶_{圆})}{圆}$越员,两式相除,并和差化积,得$\frac{糟燥泽\frac{\theta_{员}垣\theta_{圆}}{圆}}{泽蚤灶\frac{\theta_{员}垣\theta_{圆}}{圆}}$越$\frac{源}{猿}$,（＊）同样把斜率公式也和差化积,并将（＊）代入得 噪值。

以上四种解法都是以求直线斜率为目标,还可以直接以曲线与方程的对应关系为依据,另辟捷径,得一简便解法。

解 缘:设端点 粤(曾,赠),疫孕是中点,可得 月(源原曾,圆原赠),而 粤、月在椭圆上,

亦$\begin{cases}源曾^{圆}垣怨赠^{圆}越猿远\\源(源原曾)^{圆}垣怨(圆原赠)^{圆}越猿远\end{cases}$两式相减,消去二次项,即得弦的直线方程为

愿曾垣怨赠原圆缘越园

在解完每道题后,又和学生共同总结解题的关键和各种解法的思路,比较每种解法的特点和优劣,提醒学生哪些方面要防止失误等,这样的训练,能使学生的发散性思维得到充分发展,使他们掌握更多的解题方法和技巧。

猿援从一题多变中训练思维的深刻性

在复习课中经常采用一题多变的教学形式。可以引导学生积极思维,克服静止孤立地思考问题的习惯,逐步使思维向广处联想,向纵深发展,达到由此及彼,触类旁通。

例 :过抛物线 赠^{圆}越圆责曾的焦点 云的一条直线和抛物线相交于 粤(曾$_{员}$,赠$_{员}$),月(曾$_{圆}$,赠$_{圆}$)两点(曾$_{员}$≠曾$_{圆}$),求证 赠$_{员}$赠$_{圆}$越原责^{圆}。

对于本题的证明,一般学生不会感到困难。

在证完以后,教师可以通过逐步改变该题的条件和结论,和学生一起探讨得出新题:

首先,设直线斜率为 噪从改变结论出发,可将结论改为求:(员)曾$_{员}$曾$_{圆}$越?(圆)曾$_{员}$垣曾$_{圆}$越?(猿)赠$_{员}$垣赠$_{圆}$越?学生通过推导,不难得出(员)曾$_{员}$曾$_{圆}$越$\frac{责^{圆}}{源}$,(圆)曾$_{员}$垣曾$_{圆}$越$\frac{圆责垣责噪^{圆}}{噪^{圆}}$,(猿)赠$_{员}$垣赠$_{圆}$越$\frac{圆责}{噪}$。

其次,从改变条件出发,若将焦点 云($\frac{责}{圆}$,园)改为点 酝(曾$_{园}$,园),则 赠$_{员}$赠$_{圆}$越?

这时应设直线方程为 赠越噪(曾原曾$_{园}$),代入 赠^{圆}越圆责曾消去 曾应用韦达定理得到 赠$_{员}$赠$_{圆}$越原圆责曾$_{园}$。

再将点 酝$_{园}$(曾$_{园}$,园)改为 晕(曾$_{园}$,赠$_{园}$),结果又如何呢?类似地只要设直线方程为 赠原赠$_{园}$越噪(曾原曾$_{园}$),同样可能求得 赠$_{员}$赠$_{圆}$越$\frac{圆责垣(赠$_{园}$原噪曾$_{园}$)}{噪}$。通过这样的改变,就将结

论从特殊推向一般。

还可以同时改变题目的条件和结论,把焦点 云(责/圆 ,园 改为点 酝(曾圆,园 或 晕(曾圆,赠圆 来求得 曾责曾圆越? 曾责 垣曾圆越? 赠责 垣赠圆越? 等等。

在讨论过已知点 晕(曾圆,赠圆 引斜率为 噪的直线和抛物线 赠圆越园责曾相交于两点 粤(曾责,赠责 ,月(曾圆,赠圆 这类问题时,当我们已求得 曾责 垣曾圆,曾责·曾圆,赠责 垣赠圆,赠责·赠圆这些数据时,就容易引伸求得下面这些问题的结果 求弦 粤月的中点坐标或求弦的中点轨迹,求弦长,求△韵粤月的面积,求△韵粤月的重心坐标或重心的轨迹等。这样一来,问题的思考性更强,涉及的知识面更广,真正起到了解决一题,带动一批的作用。

可见,从一个题目入手,通过不断变换题目的条件和结论,这种由浅入深,循序渐进,举一反三,层层深化的做法,对学生开拓和发展思维的灵活性和深刻性方面发挥了积极的作用,进而也促进了学生思维的创造性。

总之,教学中学生的发散性思维的培养,需要进行长期的训练,必须对此引起足够的重视。只要我们在教学全过程的各个环节,根据大纲要求,深入钻研教材,精心设计教法,因势利导,注意培养学生良好的思维习惯和方法,定能收到较好的成效。

摇摇□数学发散思维的教学培养与训练(二)

思维的积极性、求异性、广阔性、联想性等是发散思维的特性,抓住这些特性进行训练,可使学生提高发散思维的能力。上海市闵行区鲁汇中学马爱芳老师总结的方法是:

员援训练思维的积极性

思维的惰性是影响发散思维的障碍,而思维的积极性是思维惰性的克星。所以培养思维的积极性是培养发散思维的基础。

例题一 :直线 蕴:曾原赠垣愿越园上取点 酝,以 云责(原源,园 、云圆(源,园 为焦点,过 酝作椭圆,问 酝在何处时,所作椭圆长轴最短,并求此椭圆方程。先让学生思考,一般都能设 酝(曾 赠 ,问题转化为当 曾原赠垣愿越园时,求 $\sqrt{(曾垣源)^圆垣赠^圆}$ 垣 $\sqrt{(曾原源)^圆垣赠^圆}$的最小值,具体求解时,就会陷入困境,顽强的惰性使他们不愿继续思考。此时教师可启发联系初二平面几何轴对称图形中的一个实例 :在铁路 葬的同侧有两个工厂 粤和 月要在路边建一个货场 悦使 粤月两厂到货场 悦的距离

和最小，在图上作出点 悦

新旧知识的联系，使学生顿悟例题一的本质，思维一下活跃起来，很快作出点云$_{员}$（原源园 关于直线 蕴：曾原赠垣愿越园的对称点 云，连结 云$_{圆}$云交直线 蕴于点 酝，即为所求。

圆援训练思维的求异性

学生的思维容易雷同化，缺乏探索精神是常有的事，这也是阻碍发散思维的原因之一。扫除这一障碍可从训练思维的求异性入手，即鼓励学生独立思考敢于发表不同见解。

例题二 若 葬遭糟为实数，且方程（葬^{圆}垣遭^{圆}）曾^{圆}原圆遭（葬垣糟）载垣遭^{圆}垣糟^{圆}越园的根相等，求证 葬遭糟成等比数列且公比等于 曾 学生一般都会根据方程有等根这一已知条件，从根的判别式等于零证之，步骤繁杂。这是一种雷同的解法，缺乏个性化。如果启发展开左边，并要求仔细观察特征，学生就会改换结组方式得到（葬载原遭^{圆}垣（遭载原糟^{圆}越园又据题意，载∈砸，故由实数平方的非负性，可得 葬载原遭越园且 遭载原糟越园故 载$_{员}$越$\frac{遭}{葬}$，载$_{圆}$越$\frac{糟}{遭}$，摇疫载$_{员}$越载$_{圆}$，亦$\frac{遭}{葬}$越$\frac{糟}{遭}$越载

欲证的两个结论一并得出，毕其功于一役，事半而功倍，大大提高了学习效率，这是求异思维的光彩和结果。转换角度思考问题，是训练求异思维的关键。抓住这一关键，就会收到理想的效果。

猿援训练思维的广阔性

思维的广阔性是发散思维的又一特征。思维的狭窄性表现在只知其一，不知其二 稍有变化，就不知所云。反复进行一题多解、一题多变的训练，是帮助学生克服思维狭窄性的有效办法。

例题三 求证 圆泽蚤灶^{圆}（源缘毅原$\frac{曾}{圆}$）越员垣泽蚤灶载 引导学生由求证式联想到三角公式，进行广阔思维，会发现，可用倍角公式、差角余弦公式、凑配法、降次法等四种方法证明恒等式成立（解题过程略），从而发现了解题的捷径，思维的广阔性得到了典型训练。只要反复训练，学生就会进入广阔思维的佳境。

联想思维是一种表现想象力的思维，是发散思维的显著标志。联想思维的过程是由此及彼，由表及里的思维过程。通过广阔思维的训练，学生的思维可达到一定广度，而通过联想思维的训练，学生的思维则可达到一定深度。

例题四 求函数 赠越$\frac{糟燥泽载原员}{泽蚤灶载垣圆}$的最大值与最小值。启发学生联想思维，进行发散思考。

联想一 :由函数式中含有 澡憎载与 糟燥蚤载这一特征,启发学生联想 澡憎载与 糟燥蚤载的关系式,发现可转化为利用弦函数的有理换元式(万能置换公式)令 澡憎载越 $\frac{圆贼}{员垣贼}$,糟燥蚤载越 $\frac{员原贼}{员垣贼}$(贼 砸),变三角函数成为有理分式函数,再对有理分式函数进行变形,用方程的观点求出最大值和最小值。

联想二,启发学生观察函数式右边的特征,相当于点 粤(澡憎载,糟燥蚤载)和点 月(原圆,员)的纵坐标之差与横坐标之差的比值,学生联想到解析几何中的斜率公式,而点 粤满足圆方程 曾垣赠越员,于是问题就转化为数形结合求解。

联想三,启发学生把原式化为 赠澡憎载原糟燥蚤载越原圆赠原员,再让学生思考如何根据这一等式成立的条件求 赠的范围,可激发学生浓厚的兴趣与强烈的求知欲,马上联想起形如 葬澡憎载垣遭糟燥蚤载越糟的三角方程有解的条件 渣 $\frac{糟}{\sqrt{葬垣遭}}$ 渣≤员,于是问题也就容易解决了。

摇摇□数学发散思维的教学培养与训练(三)

发散思维是创造性思维的中心,培养学生发散思维是发展学生创造能力的重要环节,所谓发散思维是指沿着各种不同的方向去思考问题,寻求多样性解答的思维方式。它从给定的信息中产生新的信息,获得多种可能的结果。

美国心理学家吉尔福特认为,发散思维主要有三个特征 :流畅性、变通性、独特性。

流畅性 :指心理活动畅通少阻,灵敏迅速,能在短时间内表达较多的概念。

变通性 :指思维活动能随机应变,触类旁通,不受某种思维模式的局限和消极定势的影响,能产生新观念和超常的构想。

独特性 :指用前所未有的新角度、新观点去认识、分析问题。思维方向新颖独特,能够产生独特的见解。

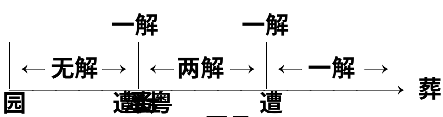
要提高学生的数学素养,就得在数学教学中注意培养学生的发散思维。湖北荆口罗昭旭、罗海祖老师介绍了在数学教学中培养学生的发散思维的作法：

员援打开学生思维,培养联想能力

在数学教学中,结合教材特点,打开学生思路,培养联想能力,有利

于学生发散思维的形成。如几何教学中‘执果索因’的逆推法，从一个结果可联想到尽可能多的原因，根据已知条件或命题（包括图形直观）凭直觉选取可能的因素。又由这些可能的原因倒推出更多的原因，直到已知条件或者命题。联想到尽可能多的原因，既要有丰富的基础知识，又要有发散思维的能力，思路越广泛，解题能力越强，而从众多的可能性中选取对于解题有用的成分的直觉思维越强，解题的速度就越快。与此相关，就可以得到一题多解，所以一题能否多解，正是发散思维流畅性的一种表现，因此在几何教学中，用‘逆推法’组织教学，是培养学生发散思维的好途径。

我们知道，数轴上的点与实数之间建立了一一对应的关系。如果我们仅仅想到可利用数轴上的点来表示实数，这就实在没有发挥数轴的作用。若联想到绝对值的几何意义，解某些含绝对值的方程和不等式，就不必‘找零点、分区间、去（绝对值）符号、求解集’这些步骤，而直接用数轴直观得到解集，简捷明快（例略）。若联想到数轴上的点与实数的有序性，还可以用来解决某些几何与解三角形的问题。如在△粤月悦中，已知 葬遭粤解三角形时的多种情形，很难准确记忆多种情况下的数量关系。但从这些数量关系中我们发现，它们都是有序连续的。因此就可以用数轴来帮助记忆和理解（如图 员为当 粤为锐角时的图示）。这时学生的思维就显得很灵活流畅。



图员

摇摇圆.改变思维角度，运用变式训练

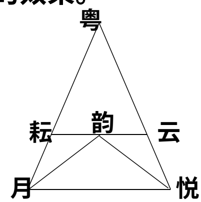
为了培养发散思维的变通性，在教学中要注意讲清知识的本质，使学生掌握精髓，克服思维定势的消极影响，使思维流畅而变通。欲比较 员远/员豫，员圆/员贡，怨远/怨贡，猿圆/圆恩 摇的大小，如果采用一般的思维方式，先把各分数化为同分母的，如此就会变得十分繁难。如果变换思维角度，运用逆向思维，联想到‘几个分数当分子相同时，分母越大，其值越小’这个性质，把各分数化成同分子的分数，再来比较分母的大小，就简单多了。

又如，义务教育初中几何第三章在介绍了三角形的一些概念之后安排了想一想 以三根火柴为边，可以组成一个三角形，用六根火柴可以组成 源个三角形吗？

我们认为这是培养学生思维变通性的好素材。若思维定势在一个平面内,用六根火柴是无论如何也不能组成 源个三角形的。若改变思维角度,在空间里摆一摆,试一试,问题就解决了。

所谓变式,就是在问题解决的过程中,对直观对象进行变换与改造,变更对象的非本质要素,突出对象的本质特征,在训练中开展一题多变,把一道题发散成一系列题,形成题组,这也是培养思维变通性的好方法。近年来,这种方法在教学中已经取得了较好的效果。

摇摇例如,在学习‘等腰三角形的判定’时,在学习了判定定理和例题之后,可以进行下列变式训练:



图圆

如图 圆在△粤月悦中 粤月越粤悦,韵月平分∠月,韵悦平分∠悦,由此可能得出什么结论?(得到等腰△韵月悦)

变式 员:(加强条件)过 韵作一直线 耘云∥月悦,可以得到几个等腰三角形?(得到 缘个等腰三角形)

变式 圆:(削弱条件)若∠月≠∠悦,其它条件不变,图中有没有等腰三角形?如有等腰三角形有几个?(得到 圆个等腰三角形)

经过结论发散,条件变化来进行变式训练,它要求学生能根据已知条件自行导出尽可能多的结论;通过图形变化、引伸,引导学生在条件发生变化时,观察结论的变化。

猿援培养学生个性,鼓励创新创优

发散思维的独特性与学生的个性特征密切相关,要培养发散思维必须调动学生的主动性和创造性。在教学中可以通过一道题的简捷解法,反常解法或独特解法来培养。虽然这里也是一题多解的形式,但主要是强调解法的质。我们可采用多种形式,让学生的思维在生动活泼的气氛中得到锻炼和发展,并培养他们的意志品质。对于有新意,有创见的学生予以鼓励,促使他们积极奋发,顽强学习。

例如:用多种方法证明:

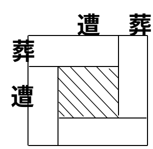
摇摇$\frac{葬亘遭}{圆}$跃$\sqrt{葬遭}$(葬≠遭)

摇摇证 员:(比较法)

$\frac{葬亘遭}{圆}$原$\sqrt{葬遭}$越$\frac{员}{圆}$($\sqrt{葬}$原$\sqrt{遭}$)圆跃园下略。

证 圆:(构造法)

由(葬原遭)圆跃园推得。(略)

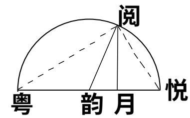


图源

证 猿利用图 猿大正方形面积大于 源个长方形的面积的和,即(葬亘遭)圆跃源葬遭

$\Rightarrow \frac{葬垣遭}{圆}$跃$\sqrt{葬遭}$

证源如图源在直线粤悦上取粤月越葬，月悦越遭以粤悦越葬垣遭为直径作半圆，圆心为韵，过月作月阅⊥粤悦交半圆于阅，连接韵阅。



图源

摇摇则摇韵阅越$\frac{员}{圆}$(粤月垣月悦)越$\frac{葬垣遭}{圆}$。

而摇月阅^{圆}越粤月·月悦越葬遭

亦摇月阅越$\sqrt{粤月·月悦}$越$\sqrt{葬遭}$

疫摇韵阅跃月阅

亦摇$\frac{葬垣遭}{圆}$跃$\sqrt{葬垣遭}$

证缘三角法，略。

证明不等式是代数问题，联想到几何、三角证法是比较困难的，需要较大的思维变通能力。而把几何、三角、代数知识结合起来解决问题，运用了数形结合的方法，应当说具有独特性。显然，上述方法上的发散思维，必须在几何、三角基础知识方面比较扎实，能从代数葬遭的乘积式联想到半圆中的等比中项式，首先通过知识上的发散才能进入方法上的发散。

在课堂教学中，还可以结合所学的知识，给出数量关系或几何图形，让学生进行编题练习，这也是一种培养发散思维的好方式，因为学生在设计题目的过程中需要广泛联想基础知识，充分发挥自己的想象力和创造力，才能巧妙地应用所学知识，寻求较好的编题方案，这样还可以提高学生兴趣。

如结合配方法解一元二次方程要学生编题，一位学生编拟题目如下：

若曾^{圆}垣园曾垣葬越园有解，求葬的取值范围。

此题跳出了对于常系数的限制，升华到变系数的问题，不能不说明只要我们鼓励学生积极思考就能够有效地发展他们的思维独特性。

摇摇□数学发散思维的教学培养与训练（四）

发散思维被看做是创造思维的核心，培养学生发散性思维是培养创造能力的重要一环。安奋老师总结在数学教学中，培养学生的发散性思维可从以下方面着手：

员援一题多解

在教学过程中，对于一些题，教师要引导学生尽可能用多种方法，

从各条途径寻求答案,并给以恰当评价,找出最优方法,培养学生思维的变通性。

例 1 解方程 $\sin x+\cos x=0$

解法(1) 因 $\cos x\neq 0$ 将方程两边都除以 $\cos x$ 得 $\tan x+1=0$,即 $\tan x=-1$,

亦其解集为 $\{x|x=k\pi-\frac{\pi}{4},k\in Z\}$

解法(2) 因 $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,将方程两边都乘以$\frac{\sqrt{2}}{2}$得:

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=0$

即 $\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}=0$

$\sin(x+\frac{\pi}{4})=0$

亦其解集为 $\{x|x=k\pi-\frac{\pi}{4},k\in Z\}$。

解法(3) 将原方程变为

$\sin x+\sin(\frac{\pi}{2}-x)=0$和差化积得:

$2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos(x-\frac{\pi}{4})=0$

即 $\cos(x-\frac{\pi}{4})=0$

亦其解集为 $\{x|x=k\pi-\frac{\pi}{4},k\in Z\}$。

解法(4) 将原方程变形为

$\sin x=-\cos x=\sin(x-\frac{\pi}{2})$,

根据同名三角函数值若相等则有

$x=2k\pi+x-\frac{\pi}{2}$(无解),

或 $x=2k\pi+\pi-x+\frac{\pi}{2}$,

即 $x=k\pi+\frac{3\pi}{4}$,

亦其解集为 $\{x|x=k\pi+\frac{3\pi}{4},k\in Z\}$。

解法(5) 将方程两边平方得:

员垣圆曾越园摇泽曾越原员

亦其解集为｛曾渊越噪凿源，噪∈在｝。

另外还有解法（远）将原方程移项再两边平方；（苑）将原方程变形为 曾越员；（愿）用万能公式等。

找出以上愿种解法后，教师要引导学生进行评价。指出前四种解法不仅简便而且不至于产生增根、遗根，因此是重要的常用的方法。

圆援由特殊到一般

在教学中，对一些题可以进行由简到繁、由特殊到一般的推广。让学生大胆联想和猜想，培养学生思维的广阔性。

例圆求证：糟燥泽圆园毅·糟燥泽源园毅·糟燥泽愿园毅越 员/愿

证明：糟燥泽圆园毅·糟燥泽源园毅·糟燥泽愿园毅

摇越 泽蚤灶圆园毅·糟燥泽圆园毅·糟燥泽源园毅·糟燥泽愿园毅 / 圆泽蚤灶圆园毅

摇越 泽蚤灶源园毅·糟燥泽源园毅·糟燥泽愿园毅 / 圆圆泽蚤灶圆园毅 越 泽蚤灶愿园毅·糟燥泽愿园毅 / 圆猿泽蚤灶圆园毅

摇越 泽蚤灶员远园毅 / 圆源泽蚤灶圆园毅 越 员/愿。

其证明思路可以推广到下例

例猿求证：

糟燥泽（曾/圆）·糟燥泽（曾/圆圆）…糟燥泽（曾/圆灶）越 泽蚤灶曾 / 圆灶泽蚤灶（曾/圆灶）（灶∈晕）

证明：左边越 糟燥泽（曾/圆）·糟燥泽（曾/圆圆）…糟燥泽（曾/圆灶原员）·泽蚤灶（曾/圆灶原员） / 圆泽蚤灶（曾/圆灶）

越 糟燥泽（曾/圆）·糟燥泽（曾/圆圆）…糟燥泽（曾/圆灶原圆）·泽蚤灶（曾/圆灶原圆） / 圆圆泽蚤灶（曾/圆灶）

越 泽蚤灶曾 / 圆灶泽蚤灶（曾/圆灶）摇摇亦原等式成立。

猿援由一般到特殊

在数学教学中，，对一些题教师要引导学生分析其特殊性。要敢于

打破常规,克服习惯性思维的束缚,从异向思考问题,培养学生思维的灵活性。

例 源摇在△粤月悦中,求证:

贼粤垣贼月垣贼悦越贼粤·贼月·贼悦

说明:本题一般习惯思路是变正弦、余弦,然后和差化积或积化和差去证。显然这样证法比较麻烦。如果根据此题特点:粤垣月垣悦越员愿园毅,三个角正切之和等于三个角正切之积,利用正切和角公式去证就比较简捷。

证明:疫粤垣月越员愿园毅原悦,

亦贼(粤垣月)越贼(员愿园毅原悦)越原贼悦,

即摇$\frac{贼粤垣贼月}{员原贼粤·贼月}$越原贼悦,

亦贼粤垣贼月垣贼悦越贼粤·贼月·贼悦

例 缘摇已知 葬,遭,皂∈砸垣,并且 葬约遭,

求证:$\frac{葬垣皂}{遭垣皂}$跃$\frac{葬}{遭}$。

说明:证明此不等式,可以从这个不等式出发,分析使这个不等式成立的条件,把证明这个不等式转化为判定这些条件是否具备的问题。如果能肯定这些条件已具备,就可断定这个不等式成立。

证明:因为 葬,遭,皂∈砸垣,为了要证明

$\frac{葬垣皂}{遭垣皂}$跃$\frac{葬}{遭}$,只需证明

(葬垣皂)遭跃葬(遭垣皂),即 遭皂跃葬皂,

因此,只需证明摇遭跃葬

因为 遭跃葬成立(已知),

亦$\frac{葬垣皂}{遭垣皂}$跃$\frac{葬}{遭}$成立。

源援系统综合

在教学中,对一些条件较多的题,教师要引导学生进行全面分析、系统综合各个条件得出正确结论,培养学生横向思维。

例 源摇若 曾,赠,扎为实数,且

(曾原园)圆垣渊赠垣员冤圆垣$\sqrt{曾垣赠垣扎}$越园,求 曾,赠,扎的值。

解:疫(曾原园)圆≥园,渊赠垣员冤圆≥园

$\sqrt{曾垣赠垣扎}$≥园,摇要使上式成立,只有

(曾原园)圆越园,渊赠垣员冤圆越园

$\sqrt{曾垣赠垣扎}$越园

即 { 曾原圆越园
赠亘员越园 曾越圆,赠越原员,扎越原员
曾亘赠亘扎越园

缘援一题多变

在教学中,对于一些需要讨论的题,教师要引导学生根据条件的变化逐一讨论得出正确结果,培养学生思维的组织性。

例 缘援化简

杂越 员/葬遭 √猿葬遭 垣 员/葬遭 √员园葬遭。(葬 遭≠园)

解 :设 √葬 越遭,√遭 越遭

亦杂越 员/葬遭 葬遭... 垣 员/葬遭 圆... ·√猿

越√猿 (... /遭 垣 ... /葬)

{ 猿√猿(当 葬跃园,遭跃园时)
原猿√猿(当 葬约园,遭约园时)
√猿(当 葬跃园,遭约园时)
原√猿 (当 葬约园,遭跃园时)

在教学中培养学生的发散思维,但不能把发散思维与集中思维对立起来。当学生思维发散后,仍要发挥教师的主导作用,帮助学生认识多种方法的长短,找出最优方法。最后选优是非常重要的,它是思维从发散到集中的转化,是创造思维的关键。

摇摇 □数学发用思维的教学培养与训练(五)

员援运用变式教学

运用变式,就是在提供给学生具体对象时,从认知的空间里不断变换其形式,而让其具有的本质属性始终保持不变。

学生在理解数学概念和掌握数学规律时,往往会扩大或缩小概念的内涵和外延,混淆命题的充要性,造成概念模糊不清,逻辑混乱错误,教学过程中适时运用变式语言进行变式训练,既可防止产生上述错误,又训练了学生的发散性思维。

例如,理解‘ 绝对值 ’概念时,可向学生提出以下问题:

①什么数的绝对值是它本身?
②什么数的绝对值比它本身大?有没有绝对值比它本身小的数?
再如,理解特殊四边形的概念时,可给学生训练以下“变式题组”。
①对角线具有什么性质的平行四边形是矩形;
②对角线具有什么性质的四边形是矩形;
③对角线具有什么性质的平行四边形是菱形;
④对角线具有什么性质的四边形是菱形;
⑤对角线具有什么性质的平行四边形是正方形;
⑥对角线具有什么性质的菱形是正方形;
⑦对角线具有什么性质的矩形是正方形;
⑧对角线具有什么性质的四边形是正方形。

圆援强化一题多解

一题多解是指用不同的方法去解决同一问题,它主要包括善于想象问题的不同状态,善于设想各数学元素扮演的不同“角色”等内容。

摇摇例 员摇已知△粤月悦中,∠粤、∠月、∠悦的对边分别为 葬、遭、糟且∠月越圆∠悦

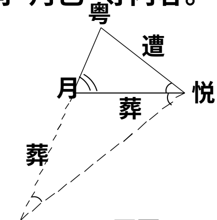
求证 :遭越糟葬垣糟。

方法一 :等积式 遭越糟葬垣糟转变为等比式 遭/糟 越 葬垣糟/遭,

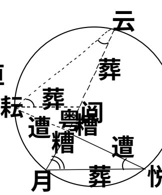
则可把 遭、糟(葬垣糟变成以 遭为公共边的两相似三角形的对应边(如图 圆,从而通过“相似三角形的对应边成比例”证得。方法二 :等积式 遭越糟葬垣糟即为 遭·遭越糟葬垣糟,可将 遭、遭、糟、葬垣糟扮演成圆内相交两弦分成的四线段的角色(如图 猿,则可通过“相交弦定理”证得。方法三 :可将 遭越糟葬垣糟中的 遭设想为从点 阅引出的圆的切线长,(葬垣糟为从同一点引出的圆割线(其圆外部分为 糟(如图 源,

故可通过“切割线定理”证得。

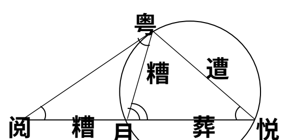
方法四 :等积式 遭越糟葬垣糟即为 遭·遭越葬·糟垣糟·糟则可将 葬、糟视为等腰梯形的两底(其腰为 糟两对角线为 遭(如图缘,又可通过“托勒密定理”证得。



图圆



图猿



图源