目录

猿圆载· 数学解题的创造性思维品质培养(下)

第五部分

猿圆载· 数学解题的逆向思维与反证方法

第六部分

猿园载· 数学解题的猜想与直觉思维

第五部分

猿缘藏· 数学解题的逆向思维与反证方法

摇摇 □数学逆向思维教学（一）

在数学教学过程中，加强对学生的思维训练是改革数学教学，提高教学质量的最根本的途径。“ 思维 ”是人类特有的，是人有意识的、能控制的认识活动。思维过程 ”是一种信息的转换、加工、分析、存储、输出的过程。学生的学习就是这种思维过程。由于每一个学生在学习过程中，对信息处理的水平的不同，从而出现了学习成绩的差异。如何提高学生的信息处理水平呢？下面提出的思维程序是值得提倡的。

我们知道，人们认识进而掌握一个事物的本质及其运动规律，必须从它的正反两个方面去认识、去分析（即“ 是 粤如何？不是 粤又如何？”），如果一个学生学习数学过程中，对每一个概念、定理、公式都能从正反两个方面去进行分析、理解，明确相应的结论，这对于掌握数学知识、增强解题能力都是极其有利的。这种从正反两个方面去分析求解的思维过程就是所谓的“ 正向思维 ”过程与“ 逆向思维 ”过程。

在我们当前的数学教学中，大量的是正向思维训练，而且也总结出了不少行之有效的教学方法。相比之下，对于逆向思维训练方面在当前的数学教学中我们感到还没有引起足够的重视。天津市河北区教科室张济华、天津市河北区教科室王方薇老师就当前现行的数学教材，在数学教学过程中进行逆向思维训练方面，总结了对以下两种逆向思维类型的教学意见。

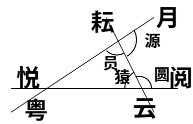
员援否逆型

原命题中的条件不成立时的逆向思维形式，我们称之为否逆型逆向思维。其模式一般为：

原命题 :若 粤则 月。

否逆型命题 :若不 粤则 悦

在概念教学中,为了加深学生对概念中的条件和结论的认识,从而拓展概念的内涵,往往需要教师对概念的条件和结论作进一步的探讨,当否定概念中的某些条件时,其结论就要有相应的变化。例如初中二年级平面几何中“ 两条直线平行的性质定理 ”的教学,就可以通过否逆型命题的模式和前后知识融为一个整体。“ 原命题 ”:两条直线 粤月和 悦阅被第三条直线 耘云所截,若 粤月∥ 悦阅,则其两对内错角分别相等。该命题当否定 粤月∥ 悦阅时,得到它的“ 否逆型命题 ”:两条直线 粤月和 悦阅被第三条直线 耘云所截,若 粤月 ∦悦阅,则两对内错角均不相等,且每对内错角中,在 粤月与 悦阅交点一侧的角小。如图,



摇摇若 粤月 ∦悦阅⇒

∠员≠ ∠圆且 ∠员约∠圆

∠猿≠ ∠源且 ∠猿约∠源

这个命题的得出,正是学生已经学过的没有被量化的三线八角概念的拓深,并且由于任何一个三角形都是由两条不平行的直线被第三条直线所截而成,所以命题的实质是“ 三角形内角和定理 ”的推论。这样,由一个命题的否逆型命题的得出,使学生对“ 三线八角——两条直线平行的性质——三角形内角和定理 ”这些在学生头脑中孤立的“ 知识点,形成一个有机的整体。又如高中二年级解析几何中椭圆的概念教学,“ 原命题 ”:平面上的一个动点到两个定点 云员(原糟园 ,云圆(糟园 的距离和等于定长 圆葬(圆葬跃圆糟 ,则动点的轨迹是椭圆。在命题中否定 圆葬跃圆糟(可以通过三角形中任意两边的和大于第三边的性质引导学生)便得出其“ 否逆型命题 ”:平面上的一个动点到两个定点 云员(原糟园 ,云圆(糟园 的距离和等于定长 圆葬,若 圆葬⊳ 圆糟则动点的轨迹是线段或虚椭圆。这个命题的得出是初学解析几何的学生必须掌握的,它不仅让学生对形成椭圆的条件有了确切的认识,而且加深学生对动点所形成轨迹的完备性的认识。

由以上二例可得到产生否逆型命题的操作模式 :否定原命题中全部或部分条件后探讨其相应的结论。数学教学中的这种教学方法的实施,可以培养学生多方面、多角度、深层次考虑问题的立体思维方法。

在习题教学中也可以仿照概念教学中“ 逆型命题 ”的模式,使学生在变式教学中树立起深层次探讨问题的思维能力。例如,已知 泽蚤灶α 垣泽蚤灶β越葬,糟燥泽α 垣糟燥泽β越遭(葬,遭均为非零实数 ”求 泽蚤灶(α 垣β) 的值。由于该题有“ 葬,遭均为非零实数 ”这个条件,故可进行两式相除的运算,不难得到 泽蚤灶(α 垣β) 越$\frac{圆葬遭}{葬^圆垣遭^圆}$。如若将条件“ 葬,遭均为非零实数 ”去掉,得到原题的“ 否逆型 ”习题 :已知 泽蚤灶α 垣泽蚤灶β越葬,糟燥泽α 垣糟燥泽β越遭,求 泽蚤灶(α 垣β) 的值。再解此题,学生就必须考虑两式相除时

葬遭是否为零的问题，从而要分（员 葬越遭越园；（圆 葬 · 遭≠园；（猿 葬越园，遭≠园葬≠园遭越园三类分别进行讨论后才能得到结论。因此，在习题教学中，如果用“否逆型命题”的思维方式，可以培养学生周密思考问题的能力，而且可以加深学生对习题中的条件进行分析适当地选定解题方法的能力。

圆援对逆型

原命题的结论作为条件的逆向思维方式，我们称为对逆型逆向思维。其模式一般为：

原命题 :若 粤则 月。

对逆型命题 :若 月则 悦

在概念教学中，如果将原命题中的结论和部分条件作为新命题条件来引导学生寻求其结论，这对于学生进一步理解掌握命题是十分有益的。例如，“原命题”:直角三角形中，猿园毅角所对直角边是斜边的一半。可引入“对逆型命题”:在一个三角形中，若有一个角是 猿园毅且一条边是另一条边的一半，则这个三角形是直角三角形或钝角三角形。其结论是分三种情况分别进行论证得出的。这个命题使学生在原命题的基础上又重见一层天地，不仅培养了学生分析问题的能力，而且使学生从中领悟出，当适当组合原命题的条件和结论时，产生的新命题的结论可能是不唯一的。毫无疑问，数学中的这种教学方法，培养的是学生深层次的探讨精神。

由上例可得到产生“对逆型命题”的操作模式 :将原命题中的结论和部分条件作为新命题的条件，探讨结论的构成。和“否逆型命题”教学一样“对逆型命题”的教学，可以使学生头脑中产生新的构思程序、新的解题方法以及新旧知识间认知结构的新的构成，久而久之，势必开发学生的思维。

在习题教学中，按照“对逆型”的思维模式，同样可以收到良好的效果。例如，原题 :若全集 陨越 {葬，遭，糟}，集合 粤越 {葬，遭}，月越 {遭，糟}，求 粤∩月。（显然答案是 粤∩月越 {遭}）“对逆型”习题 :若全集 陨越 {葬，遭，糟}，已知 粤∩月越 {遭}，求集合 粤与 月。其结论应有 怨组，它们是 粤$_{员}$越 {葬，遭}，月$_{员}$越 {遭，糟}；粤$_{圆}$越 {遭，糟}，月$_{圆}$越 {葬，遭}；粤$_{猿}$越 {遭}，月$_{猿}$越 {葬，遭，糟}；粤$_{源}$越 {葬，遭，糟}，月$_{源}$越 {遭}；粤$_{缘}$越 {遭}，月$_{缘}$越 {遭，糟}；粤$_{远}$越 {遭，糟}，月$_{远}$越 {遭}；粤$_{苑}$越 {遭}，月$_{苑}$越 {葬，遭}；粤$_{愿}$越 {葬，遭}，月$_{愿}$越 {遭}；粤$_{怨}$越 {遭}，月$_{怨}$越 {遭}。这样的结论相对原题来讲，学生不作深层次的探索是得不出的。

综合以上两种逆向思维的模式和在数学教学中的作用，我们认为要想通过逆向思维培养学生全面分析问题、深层次探讨问题的能力，首先要在我们教师的头脑中有逆向思维教学意识，有了这种意识，才能在

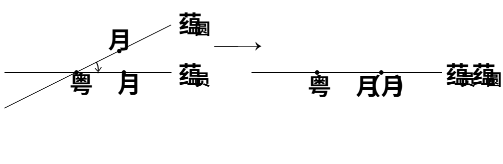
教学中经过点拨,逐步培养起学生逆向思维问题的习惯。

摇摇□数学逆向思维教学(二)

数学教学中,教师为了使学生获得数学基本知识和能灵活运用知识解决问题,往往都不遗余力地培养学生的各种思维能力,其中很重要的思维方法就是逆向思维,因为中学数学许多重要的解题方法的思维主体是逆向的。奉贤县四团中学盛建斌老师以平几教学为例作了剖析:

员援加强基础知识的逆向思维教学

平面几何中所出的定义、性质、公理、定理等都是平面几何的基础知识,有些学生往往只会死记硬背,不能很好地融会贯通,以致造成思维的呆板。因此在引入新概念和定理时,应通过正向思维初步掌握,再由逆向思维加深理解。例如,“两直线相交,只有一个交点”这一性质的教学。首先我们可随手画任意两条相交直线,从图形的直观上得到只有一个交点的结论。然后,利有逆向思维,假设有二个交点,此时让学生观察,得出相应的结论。方法是:出示教学具——两根铁丝,如图,先确这一个交点粤另外一组交点有记号月和月忆表示,为了要把月和月忆相交在一起,而粤点不动,只有通过绕粤点旋转发现,当月点和月忆点相交在一起,二段铁丝合而为一,所以当有二个交点时,就与两点决定一直线公理相矛盾,从而进一步加深理解这一性质。又如,我们知道等边三角形中“四心合一”这一性质,但是如果一个三角形的内心、外心、重心在同一直线上时,这个三角形不一定是等边三角形而是等腰三角形,通过这样的逆向教学由此突出了“等边三角形”与“合一”之间的相互关系。



圆援加强定理的逆向思维教学

通过逆向思维,全面理解定理,在运用定理时才能做到及时到位。例如,梯形的中位线定理:“梯形两腰中点的连线平行于底边,且等于两底边之和的一半。”此时可用以下几个变式来巩固、加深理解:①已知两底求中位线(正向思维);②已知中位线和一底,求另一底;③若过梯形一腰的中点的直线平行于底边,

求证此直线为梯形中位线（逆向思维），从而突出此定理的实质（中点，平行）。同时，教师引导学生探索一些定理的逆命题是否成立，不仅可巩固、完善所学的知识，而且能激发学生的求知欲。如直角三角形中勾股定理的逆命题“：若三角形的三边为 葬遭糟且 葬圆垣遭圆越糟圆，则此三角形为直角三角形。”此时可引导学生探索当上式关系变为：①葬圆垣遭圆跃糟圆；②葬圆垣遭圆约糟圆时，三角形的形状又是怎样的？让学生从不同角度加深对知识的理解。

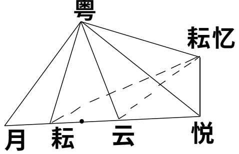
猿援加强解题方法的逆向思维教学，提高解题能力

在平面几何知识的学习中，学生普遍感到有时解题无从着手，这是因为：几何所特有的要求——较强的逻辑推理能力，另外，由于学生还没有掌握行之有效的思维方法，因此教师讲解例题时要充分地进行逆向分析，培养学生的逆向分析的习惯。

（员）从结论入手，执果索因。摇解题时，学生最易想到从条件到结论，但有时两者间没有很明显地联系时，学生因方向不明而无法入手。因此，我们应强调从结论出发，利用逆向思维，采用分析法，找到已知与未知之间的桥梁。例如：如图等腰 砸驻△粤月悦中，∠粤越怨园毅耘 云是 月悦边任二点，且∠耘粤云越源缘毅求证：月耘圆 垣悦云圆 越耘云圆。

分析：从已知条件着手，则发现很困难；但从结论分析，发现线段 月耘 耘云 悦云正好构成一个直角三角形，因此我们利用轴对称图形就可构造出一个直角三角形。

证明：把△粤悦云沿着直线 粤云对折，得到 耘点的对称点为 耘忆点。



摇摇亦耘忆云越耘云，又易证得：

△粤月耘≌△粤耘忆悦

亦∠耘忆悦粤越∠月越源缘毅悦耘忆越月耘

亦∠耘忆悦云越∠耘忆悦粤垣∠粤悦月越怨园毅

亦耘忆云圆越悦云圆垣悦耘忆圆

即 月耘圆 垣悦云圆 越耘云圆。

（圆）从反面考虑，加强反证法。摇适当地进行反证法教学能提高解题的灵活性，同时也使学生能正确理解各个概念、定理等。例如，一个三角形中至少有二个锐角。若从正面进行证明，则比较困难，而从它的反面着手，即使设它至多有一个锐角，则①当锐角个数为零时，三角形就不构成。②当只有一个锐角时，则其余两个角为钝角或直角，即这两个角之和大于 员愿园毅而这与三角形内角和定理相矛盾，同时从这个证明过程还可得到三角形中至多只有一个钝角或直角的结论，从而对正确理解三角形的三个内角间的关系起到很大的帮助作用，因此学生

通过反证法的训练，培养学生全面考虑问题，养成良好的思维习惯。

摇摇□数学逆向思维教学（三）

数学教学中，教师应重视对学生进行思维转换能力的训练。而逆向思维是思维转换能力的一种重要形式。

逆向思维是从已有的习惯思路的反方向去思考分析问题。表现为逆用定义、定理、公式法则，逆向进行推理，即顺推繁复时考虑逆求；反向进行证明，即直接解决较困难时考虑间接解决，事实上，逆向思维是摆脱思维定势，突破旧有思想框架，产生新思想，发现新知识的重要思维方式。

为了在教学中培养初中生的逆向思维，上海吴迅中学冯明芬老师在逆运算的教学中作了一些尝试，以对数教学为例，主要采取了如下步骤：

员援通过设问，由正运算细致地引出逆运算

在复习指数概念的基础上，提出以下问题让学生思考：

①若 圆越晕，那么 晕等于多少？

②若 葬越远，且 葬越园，那么 葬等于多少？

③若 圆越远，那么 遭等于多少呢？

在学生回答以上问题后，再提出以下问题：表达式 葬越晕中涉及到三个量 葬、遭、晕，如果已知 葬、遭求 晕的运算叫什么运算？如果已知 遭、晕，求 葬的运算叫什么运算？如果已知 葬和 晕，那么求 遭的运算又是什么呢？通过这些设问，步步为营，引出所要讨论的课题。接着，当介绍了对数的定义和符号表示以后，我又通过列表引导学生对指数式和对数式进行对比，寻找两者之间的区别和联系，以及转化的约束条件。

圆援通过实例，熟练正逆运算的转化方法

例如在计算对数 遭圆愿的值时，由于学生对有如 遭圆愿的符号不熟悉，所以先把逆向问题化为学生所熟知的正向问题：设 遭圆愿越曾，则 圆曾越愿，在转化中建立双向联结，再借助于乘方运算的正向思维，求得 曾越猿，即 遭圆愿越猿，这样，以正向联结促进和形成逆向联结。

猿援通过导出性质，巩固正逆运算的转化规律

在教学中，强调借助正运算的幂的运算性质推导出逆运算的对数运算性质。在讲解时，我的主要工作是揭示指数和对数的关系和怎样

根据指数的运算性质来导出对数运算的性质。学生在运用对数运算性质时,易受指数性质的影响,常常出现 :遭昆葬(酝 垣晕) 越遭昆葬酝 垣遭昆葬晕,遭昆葬酝晕越遭昆葬酝 · 遭昆葬晕之类的错误。事实证明,如果在推导过程中,牢牢扣住对数运算和乘方运算的双向联结,则可防止或减少这类错误的发生。

例 :已知 遭昆葬酝、遭昆葬晕,求 遭昆葬酝晕是什么?

要求学生思考 :欲求 酝晕的对数,先分析 酝晕是什么?事实上,只要利用恒等式 酝越葬遭昆葬酝,晕越葬遭昆葬晕,就可把 酝晕表示成同底数的幂。这样,借助同底数幂的正向思维得 :酝晕越葬遭昆葬酝 · 葬遭昆葬晕 越葬遭昆葬酝 垣遭昆葬晕,而 遭昆葬酝 垣遭昆葬晕是底数 葬的指数,根据对数的定义,所以 遭昆葬酝晕越遭昆葬酝 垣遭昆葬晕(证明略)。事实上,由上述推导可知,在公式 遭昆葬酝晕越遭昆葬酝 垣遭昆葬晕中,右端和式 遭昆葬酝 垣遭昆葬晕是幂 酝越葬遭昆葬酝 葬遭昆葬酝,晕越葬遭昆葬晕中的指数相加的形式,根据同底数幂相乘,底数不变,指数相加的指数运算性质,遭昆葬酝 垣遭昆葬晕只能是幂的乘积 酝晕的对数,所以乘积的对数等于对数的和。

类似地,可以引导学生由分析得出对数的又一性质 遭昆葬$\frac{酝}{晕}$越遭昆葬酝原遭昆葬晕。

摇摇□数学逆向思维教学(四)

员援逆向思维与概念教学

概念是数学的基本元素,概念掌握的好坏直接关系到其他知识的掌握。但有些概念十分难理解,如适当注意从逆向思考,从结论的反面去讨论,可以加深学生对概念的理解、掌握,养成双向考虑问题的习惯。

点的轨迹的概念是初中数学中的一个难点,点的轨迹应满足完备性和纯粹性。不过,定义不足以使学生完全认识其本质,为了更清楚地揭示图形 云与条件 悦之间的关系,可从反方向提出以下的问题 :不符合 悦的点是否在图形上?当然不在,因为定义已阐明图形 云上的点都符合条件 悦,所以纯粹性说明图形 云上没有不合条件的点 ;反之不在图形 云的点是否也符合条件 悦呢?当然不能,因为符合条件 悦的点都在图形 云上,所以完备性即说明符合条件 悦的点没有遗漏的。原来,图形 云的点与符合条件 悦的点“不多不少”完全相同。(图形 云与符合条件 悦的点集是等集),只有这样,图形 云才是符合条件 悦的点的轨迹。从而,在求符合条件 悦的点的轨迹时,一方面要剔除不合条件的点,另一方面也不能漏掉合乎条件的点。如 以线段 粤月为斜边的直角三角形直角顶点的轨迹是以 粤月为直径的圆是不正确的,因它不合纯粹性,应除去 粤、月两点。

有些数学概念从逆向入手研究,可丰富其内涵。如周期函数中的函数周期概念,求函数周期一般是指最小正周期,是否所有的周期函数都有最小正周期呢?函数周期性的实质是图象有规律地重复再现。不难发现象 枣(曾)越援的周期是任意的,说明常数函数虽是周期函数,但无最小正周期。因此得出结论,并不是所有周期函数都有最小正周期。

圆援公式的逆运用

数学中有许多公式,有的同学在运用公式时,只知道从左到右,而不习惯从右到左的应用,这实际上等于只掌握了“半个”公式,对任一公式都要弄清它成立的条件和双向运用的效应。

如公式$\sqrt{葬}$越葬,我们可自如地利用它把根号中的式子开出,但却忽略了它的另一功能,还可从右往左看,即:葬越$\sqrt{葬}$,说明还可利用同一公式把非负数移入根号。在求一元二次方程两根差或求抛物线与 曾轴两交点间距离时,利用 渣曾$_员$原曾$_圆$渣越$\sqrt{(曾_员原曾_圆)^圆}$越$\sqrt{(曾_员垣曾_圆)^圆原源曾_员曾_圆}$就方便多了。

再如化简 泽蚤灶(曾原赠)糟燥泽曾垣糟燥泽(曾原赠)泽蚤灶曾,当然利用两角和差的正余弦公式展开能得出最后结果,但过程较烦琐。要是把两角和的正弦公式逆用,即 泽蚤灶α糟燥泽β垣糟燥泽α泽蚤灶β越泽蚤灶(α垣β),就简化多了。问题是真正遇到类似问题,能否想起逆用公式。

以上仅是逆用公式的两例,事实上,每个公式都有其正、反两面的含义及功能。这就要求平时教学中注意培养这方面的能力,开发公式另一半的潜能。

猿援运用逆向思维解题

要建一幢房子,设计师应先拿出图纸,建筑师根据设计要求,备料建房施工,这便是逆向思维在实际中的应用。

数学问题之所以奥妙无穷,主要是在于它的题型多变,解无定法。受思维定势的影响,有的同学往往只习惯于由已知出发。事实上,这种顺向思维定势,只会制约思维空间的拓展。有时,如果正面解题很困难,此时,不妨改变思路的方向,兴许柳暗花明。

例 员摇某圆形池塘中央,有一块浮萍。若这块浮萍的面积以每天增加一倍的速度向外蔓延,且 员园天刚好长满池塘。问:第几天刚好长满池塘的一半?

分析摇若从已知考虑,较为复杂。浮萍原来的面积,池塘面积,长满池塘一半的天数,均需考虑。但若从结果开始考虑,提出这样的问题:第 员园天刚好长满池塘,那么此前一天长到池塘的多少呢?由此不难得出结论:怨天。

例 圆摇设 葬、遭、糟为互不相等的实数,试证函数

枣(曾) 越 $\frac{(曾原葬)(曾原遭)}{(糟原葬)(糟原遭)}$ 垣 $\frac{(曾原遭)(曾原糟)}{(葬原遭)(葬原糟)}$ 垣 $\frac{(曾原糟)(曾原葬)}{(遭原糟)(遭原葬)}$ 为常数函数。

证摇函数 枣(曾) 为三个二次式之和,设

枣(曾) 越粤曾圆 垣月曾垣悦

因为 枣(葬) 越枣(遭) 越枣(糟) 越员,且 葬≠遭≠糟,说明二次方程 枣(曾) 越员有三个不等的实根,所以可以判断它与 曾无关,即不论 曾取何值时总有 枣(曾) 越员,也即 枣(曾) 越员为常数函数,证毕。

评述摇本例证法的妙处在于从问题的结论 枣(曾) 为常数函数考虑,常数函数有无数个根,而二次函数最多仅两个实根,于是只要能找出三个实根即可。当然本例也可顺向证明,即 通分、简化、化简,但过程要复杂得多。

源援注意逆向思维的负迁移

逆向思维由于反向考虑问题,这就要求推理过程具有可逆性,以保证逆向思维的严谨性。

比如,在掌握了多项式乘法和多项式除以单项式后,有些同学误认为乘除互为逆运算,所以乘法公式也同样适用于除法,因此屡屡出现

(葬垣遭)衣(糟垣凿) 越葬衣糟垣葬衣凿垣遭衣糟垣遭衣凿或 $\frac{葬垣遭}{葬垣遭}$ 越 $\frac{葬}{葬}$ 垣 $\frac{遭}{遭}$ 越葬垣遭

之类的错误。这种逆向思维产生的错误在于没有弄清互逆运算的本质。互逆运算并不意味着运算公式的通用,就象加法有交换律,减法没有交换律一样,乘法有分配律,除法即没有分配律。

还有一些数学问题,用逆向思维解决很简单,但却极易出现疏漏。

例 猿摇葬为何值时,以 葬、葬垣员、葬垣圆为三边的三角形是钝角三角形?

分析摇从结论入手,因为三角形为钝角三角形,则必满足 葬圆垣(葬垣员)圆约(葬垣圆)圆,可解得 原员约葬约猿 因为边长为正

亦摇葬的范围是 园约葬约猿

此解法却忽略了一个问题,满足 葬圆垣(葬垣员)圆约(葬垣圆)圆,仅是钝角三角形的一个必要的条件,而非充分条件。

事实上,葬、葬垣员、葬垣圆并不一定组成三角形,因此,本例还应考虑 葬垣(葬垣员)跃葬垣圆

答案为 员约葬约猿

例 源摇皂为何值时,曾圆垣(皂原圆)曾原(缘原皂) 越园的两实根均大于 员?

错解摇设两根为 曾员、曾圆,则 曾员跃员,曾圆跃员,于是有

{龠员垣龠圆跃圆
{龠员·龠圆跃员
{Δ≥园

解以上不等式组可得 皂跃远

分析摇这种解法是逆向思维,由于

{龠员跃员 摇摇摇摇与 {龠员垣龠圆跃圆
{龠圆跃员 {龠员·龠圆跃员

两者之间的不等价,导致了错误。显然,满足后者的 龠员、龠圆不一定符合前者。但如改为

{龠员原员跃园 与 {(龠员原员)垣(龠圆原员)跃园
{龠圆原员跃园 {(龠员原员)(龠圆原员)跃园

这两者就互逆了。本例正确答案为 皂不存在。

要克服诸如以上毛病,需要在逆向推理时,注意其是否等价、可逆,这样疏漏就可以避免了。

解决数学问题,实际上就是思维能力的具体表现。思维能力的强弱不能从快、慢来区分,思维方式的灵活性更是思维能力优劣的主要标志,在尽可能短时间内找到问题的最简捷解法是思维的最高境界。为了培养学生思维的灵活性,教学中不仅要培养学生的顺向思维,还要注意逆向思维的培养。

摇摇□数学教学与逆向思维

(安徽省铜陵市二中卢涛、徐晓明)老师对在数学教学中如何充分地运用和发展逆向思维作了全面的分析论述。

员援逆向思维与概念教学

概念是数学的基本元素,概念掌握的好坏直接关系到其他知识的掌握。但有些概念十分难理解,如适当注意从逆向思考,从结论的反面去讨论,可以加深学生对概念的理解、掌握,养成双向考虑问题的习惯。点的轨迹的概念是初中数学中的一个难点,点的轨迹应满足完备性和纯粹性。不过,定义不足以使学生完全认识其本质,为了更清楚地揭示图形 云与条件 悦之间的关系,可从反方向提出以下的问题 :不符合 悦的点是否在图形上?当然不在,因为定义已阐明图形 云上的点都符合条件 悦所以纯粹性说明图形 云上没有不合条件的点 ;反之不在图形 云的点是否也符合条件 悦呢?当然不能,因为符合条件 悦

的点都在图形 云上,所以完备性即说明符合条件 悦的点没有遗漏的。原来,图形 云上的点与符合条件 悦的点‘ 不多不少 ’完全相同。(图形 云与符合条件 悦的点集是等集),只有这样,图形 云才是符合条件 悦的点的轨迹。从而,在求符合条件 悦的点的轨迹时,一方面要剔除不合条件的点,另一方面也不能漏掉合乎条件的点。如 以线段 粤月为斜边的直角三角形直角顶点的轨迹是以 粤月为直径的圆是不正确的,因它不合纯粹性,应除去 粤月两点。

有些数学概念从逆向入手研究,可丰富其内涵。如周期函数中的函数周期概念,求函数周期一般是指最小正周期,是否所有的周期函数都有最小正周期呢?函数周期性的实质是图象有规律地重复再现。不难发现象 枣(曾) 越猿的周期是任意的,说明常数函数虽是周期函数,但无最小正周期。因此得出结论,并不是所有周期函数都有最小正周期。

圆援公式的逆运用

数学中有许多公式,有的同学在运用公式时,只知道从左到右,而不习惯从右到左的应用,这实际上等于只掌握了“ 半个 ”公式,对任一公式都要弄清它成立的条件和双向运用的效应。

如公式 $\sqrt{葬^{圆}}$ 越渣葬渣我们可自如地利用它把根号中的式子开出,但却忽略了它的另一功能,还可从右往左看,即 :渣葬渣越 $\sqrt{葬^{圆}}$,说明还可利用同一公式把非负数移入根号。在求一元二次方程两根差或求抛物线与 曾轴两交点间距离时,利用 渣曾$_{员}$ 原曾$_{圆}$渣越 $\sqrt{(曾_{员} 原曾_{圆})^{圆}}$ 越 $\sqrt{(曾_{员} 垣曾_{圆})^{圆} 原源曾_{员}曾_{圆}}$ 就方便多了。

再如化简 泽蚤灶 (曾原赠) 糟燥泽 (曾垣赠) 垣糟燥泽 (曾原赠) 泽蚤灶 (曾垣赠),当然利用两角和差的正余弦公式展开能得出最后结果,但过程较繁琐。要是把两角和的正弦公式逆用,即 泽蚤灶α 糟燥泽β 垣糟燥泽α 泽蚤灶β 越泽蚤灶(α 垣β),就简化多了。问题是真正遇到类似问题,能否想起逆用公式。

以上仅是逆用公式的两例,事实上,每个公式都有其正、反两面的含义及功能。这就要求平时教学中注意培养这方面的能力,开发公式另一半的潜能。

猿援运用逆向思维解题

要建一幢房子,设计师应先拿出图纸,建筑师根据设计要求,备料建房施工,这便是逆向思维在实际中的应用。

数学问题之所以奥妙无穷,主要是在于它的题型多变,解无定法。受思维定势的影响,有的同学往往只习惯于由已知出发。事实上,这种顺向思维定势,只会制约思维空间的拓展。有时,如果正面解决很困难,此时,不妨改变思路的方向,兴许柳暗花明。

例 员摇某圆形池塘中央,有一块浮萍,若这块浮萍的面积以每天增加一倍的速度向外蔓延,且 员园天刚好长满池塘。问:第几天刚好长满池塘的一半?

分析摇若从已知考虑,较为复杂,浮萍原来的面积,池塘面积,长满池塘一半的天数,均需考虑。但若从结果开始考虑,提出这样的问题:第 员园天刚好长满池塘,那么此前一天长到池塘的多少呢?由此不难得出结论:怨天。

例 圆摇设 葬、遭、糟为互不相等的实数,试证函数

枣(曾)越(曾原葬)(曾原遭)/(糟原葬)(糟原遭) 垣(曾原遭)(曾原糟)/(葬原遭)(葬原糟) 垣(曾原糟)(曾原葬)/(遭原糟)(遭原葬)为常数函数。

证摇函数 枣(曾)为三个二次式之和,设

枣(曾)越粤曾圆垣月曾垣悦

因为 枣(葬)越枣(遭)越枣(糟)越员,且 葬≠遭≠糟说明二次方程 枣(曾)越员有三个不等的实根,所以可以判断它与 曾无关,即不论 曾取何值时总有 枣(曾)越员,也即 枣(曾)越员为常数函数,证毕。

评述摇本例证法的妙处在于从问题的结论 枣(曾)为常数函数考虑,常数函数有无数个根,而二次函数最多仅两从个实根,于是只要能找出三个实根即可。当然本例可顺向证明,即:通分、化简,但过程要复杂得多。

看来,逆向思维解题有时确能事半功倍。

源援注意逆向思维的负迁移

逆向思维由于反向考虑问题,这就要求推理过程具有可逆性,以保证逆向思维的严谨性。

比如,在掌握了多项式乘法和多项式除以单项式后,有些同学误认为乘除互为逆运算,所以乘法公式也同样适用于除法,因此屡屡出现

(葬垣遭)衣(糟垣凿)越葬衣糟垣葬衣凿垣遭衣糟垣遭衣凿或 (葬垣遭)/(葬垣遭) 越 葬/葬 垣 遭/遭 越圆

之类的错误。这种逆向思维产生的错误在于没有弄清互逆运算的本质。互逆运算并不意味着运算公式的通用,就象加法有交换律,减法没有交换律一样,乘法有分配律,除法却没有分配律。

例 猿摇葬为何值时,以 葬、葬垣员、葬垣圆为三边的三角形是钝角三角形?

分析摇从结论入手,因为三角形为钝角三角形,则必满足:葬圆垣(葬垣员)圆约(葬垣圆)圆,可解得 原员约葬约猿。因为边长为正

疫摇葬的范围是 园约葬约猿

此解法却忽略了一个问题,满足 葬圆垣(葬垣员)圆约(葬垣圆)圆,仅是钝角三角形的

一个必要的条件,而非充分条件。

事实上,莽葬噪员,葬噪圆并不一定组成三角形,因此,本例还应考虑 葬垣(葬噪员)跃葬噪圆

答案为 员约葬约猿

例 源摇皂为何值时,曾 垣(皂原圆)曾原(缘原皂) 越园的两实根均大于 员?

错解摇设两根为 曾员、曾圆,则 曾员跃员,曾圆跃员,于是有

曾员垣曾圆跃圆
曾员·曾圆跃员
Δ≥园

解以上不等式组可得 皂跃远

分析摇这种解法是逆向思维,由于

曾员跃员
曾圆跃员 摇摇摇与 曾员垣曾圆跃圆
曾员·曾圆跃员

两者之间的不等价,导致了错误。显然,满足后者的 曾员、曾圆并不一定符合前者,但如改为

曾员原员跃园
曾圆原员跃园 与 (曾员原员)垣(曾圆原员)跃园
(曾员原员)(曾圆原员)跃园

这两者就互逆了。本例正确答案为 皂不存在。

要克服诸如以上毛病,需要在逆向推理时,注意其是否等价、可逆,这样疏漏就可以避免了。

解决数学问题,实际上就是思维能力的具体表现。思维能力的强弱不能从快、慢来区分,思维方式的灵活性更是思维能力优劣的主要标志,在尽可能短时间内找到问题的最简捷解法是思维的最高境界。为了培养学生思维的灵活性,教学中不仅要培养学生的顺向思维,还要注意逆向思维的培养。

摇摇□逆向思维与数学解题

人们在研究事物或理论问题时,通常都按照一定的顺序进行。或按其发生时间的先后;或按其在空间位置关系的由近及远;或按其某一时性人为地编成一个顺序我们把顺序思考问题叫顺向思维;把逆顺序思考问题叫逆向思维,即俗话所说的“反过来想一想”。

因为人们对于事物的感知往往“先入为主”“亲近而疏远”,所以顺