

## ◇ 目录 ◇

## 猿载· 数学解题的创造性思维品质培养(上)

## 第一部分

## 猿载· 数学解题的思维品质教学

数学思维品质的教学培养与训练(一) .....	(员)
数学思维品质的教学培养与训练(二) .....	(源)
数学思维品质的教学培养与训练 .....	(怨)
数学思维中的抽象与概括 .....	(员苑)
数学抽象思维能力的教学培养与训练 .....	(圆)
合情推理与数学学习 .....	(圆缘)
运用变式培养数学递进思维 .....	(猿)
广义比较思维在初中数学教学中的应用 .....	(猿)
数学比较思维十法 .....	(猿)
数学转换思维中的若干思维指向 .....	(源)
数学辩证思维的教学培养与训练(一) .....	(源)
数学辩证思维的教学培养与训练(二) .....	(缘)
数学体式思维在教学中的运用与培养 .....	(远)
整体思维的几种途径与技巧 .....	(远)
数学猜想在教学中的运用 .....	(远)
数学思维的广阔性及其教学培养与训练 .....	(苑)
数学思维的严谨性及其教学培养与训练 .....	(苑)
数学思维的深刻性及其教学培养与训练 .....	(苑)
数学思维灵活性的教学培养与训练 .....	(苑)
构建思维单元发展思维能力 .....	(苑)
数学缜密思维能力的教学培养与训练(一) .....	(愿)
数学缜密思维能力的教学培养与训练(二) .....	(愿)
数学通类思维能力及其培养 .....	(愿)
数学思维的个性差异与教学 .....	(怨)

## 圆

在解题教学中培养学生良好的思维品质 .....	( 猿)
数学思维自控能力及其教学培养 .....	( 猿)
数学思维的批判性及其教学培养 .....	( 猿)
课本习题的处理与思维品质的培养 .....	( 猿)
低层次应用题对提高学生思维素质的作用 .....	( 猿)
数学习惯性思维的影响及其克服 .....	( 猿)
解题中的几种思维意识及其培养 .....	( 猿)
创造性思维与数学教学 .....	( 猿)
数学创造性思维的特征 .....	( 猿)
数学创造性思维的表现特征 .....	( 猿)
数学创造性思维的实质 .....	( 猿)
数学创造性思维的过程 .....	( 猿)
数学创造性思维及其教学培养(一) .....	( 猿)
数学创造性思维及其教学培养(二) .....	( 猿)
数学创造性思维及其教学培养(三) .....	( 猿)
数学创造性思维及其教学培养(四) .....	( 猿)
猜想与创造性思维能力的培养 .....	( 猿)
纠错辨误发展学生的思维能力 .....	( 猿)
问题的非常规解法与思维品质的培养 .....	( 猿)
思维定势与中学数学教学 .....	( 猿)
数学思维定势的建立与突破 .....	( 猿)
数学思维定势规律的运用 .....	( 猿)
运用教学素材进行探索性思维 .....	( 猿)
读议操作拓展思维 .....	( 猿)
剖析典型错误培养科学思维 .....	( 猿)
数学思维“怪圈”形成的心理分析 .....	( 猿)
突破数学思维的“怪圈” .....	( 猿)
数学“求解性思维”的障碍与布置对策 .....	( 猿)

## 第二部分

### 猿· 数学解题的递进思维方法及其运用

递进思维在解题中的运用 .....	猿
-------------------	---

递推方法与递归函数 .....	猿源
数学解题中的递归方法 .....	猿猿
构造递归关系解题的七种思考方法 .....	猿员
递推法应用 .....	猿远
递推思想在解应用题中的运用 .....	猿愿
初中数学教学中的递推思想和方法 .....	猿园
降次法在解题中的运用 .....	猿源
无穷递降法及其在解题中的运用(一) .....	猿源
无穷递降法及其在解题中的应用(二) .....	猿愿
无限下推法及其在解题中的运用 .....	猿园

## 第一部分

## 猿猴垣载 数学解题的思维品质教学

## 摇摇 □ 数学思维品质的教学培养与训练 (一)

当前,培养学生数学思维能力的工作越来越引起广大数学教育工作者的重视。实践证明,培养中学数学思维是开发中学生思维能力的的一个突破点,是提高教学质量的重要途径。王家燕老师提出了从中学数学思维品质的含义,加强培养的目的及训练的基本方法进行了探索:

员 洞察本质,培养思维的深刻性

思维的深刻性是指能够深入全面思考问题,不是停留在事物的表面现象上,而是透过现象洞察事物的本质,掌握事物的发展规律。中学数学思维的深刻性,往往表现在对定义、公式、法则、定理的实质和知识之间的相互关系的认识水平上。培养思维的深刻性,可采取下面几个途径:

(员)由表及里,思考问题。摇由表及里地理解所学的基本知识是培养思维深刻性的重要途径。学习复数在越(猿猴垣载)时,学生感到很困难。如果在教学中引导学生由表及里地观察,认识它的本质,学起来就比较容易了。

从外部特征来认识复数的代数式由几个部分组成:

- ①  $\theta$  是幅角  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,
- ②  $\cos \theta$  和  $\sin \theta$  是同一个角  $\theta$  的三角函数,
- ③  $\cos \theta$  表示实数,  $\sin \theta$  表示虚数,
- ④  $\cos \theta$  是正数。

根据复平面性质,从复数的代数式,向量表示以及三角函数的互相转化上理解复数三角式的上述本质特征:

- ①  $r$  是向量  $\vec{z}$  的模当然是正的。

圆

培养(上)

②圆是这个复数的向量与实轴正向的夹角(即幅角)。

③根据三角函数定义可知  $\alpha$  越精, 遭越泽。

④根据复数性质, 亦在越垣遭越(精垣泽)。

经过由表及里的分析, 学生可以深刻理解复数三角函数的本质。如果教师能经常引导学生这样去探讨和思考问题, 思维的深刻性就能够得到发展。

(圆)由此及彼, 思考问题。摆在数学教学中, 学习一个新的概念时实行迁移, 运用旧概念, 学习新概念, 就可以进一步认识概念的本质。

例如, 函数的连续性定义式:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  (猿), 理解这个概念, 可以把极限概念、极限值运算和函数值运算联系起来分析, 以认识函数连续性的本质。

(猿)去伪存真, 思考问题。摆在数学教学中, 由于学生对某些概念理解不清, 有时因忽视条件或因推理不严格, 常常出现一些错误。在这种情况下, 教师就应该注意, 引导学生去伪存真。

例如: 判定下题化简是否正确

$$\sqrt{\frac{1}{(原象)^{猿}} \text{越} \frac{1}{[(原象)^{猿}]^{\frac{1}{猿}} \text{越} \sqrt{\frac{1}{原象}}}$$

此题化简是错误的, 当遭远时,  $\sqrt{\frac{1}{(原象)^{猿}} \neq \sqrt{\frac{1}{(原象)^{猿}}}$  忽略了这种情况, 造成了错误结论。正确化法应该是: 原式越  $\sqrt{\frac{1}{(原象)^{猿}} \text{越} \sqrt{\frac{1}{原象}}$

圆观察、联想、转化, 培养思维的灵活性

思维的灵活性, 是指能够根据客观条件的变化, 及时地改变原来的思维过程, 寻找新的解决问题的途径。

在中学数学教学中, 思维的灵活性通常表现为不固执己见, 不拘泥于陈旧的方法, 善于根据题中的已知条件及时地提出新的设想和解决问题的方案。在具体运用中, 培养思维的灵活性, 可采取下列途径:

(员)观察, 也就是根据题目的具体特征, 对题目进行深入、细致透彻的观察, 然后认真思考, 确定良好的解题思路, 找出最佳的解题方法。

例如:

$$\text{求和: } \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

该数列本身无明显求和规律, 如果用常规的通分法非常困难, 如果逐项计算, 既繁琐又不可能。细致观察可见每项都是两相邻自然数积的倒数, 且通项:

$$\frac{1}{n(n+1)} \text{越} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \text{这样, 可将原式变形为容易求和的数列:}$$

员原 垣员 员原 垣猿 垣…… 垣员 原员 越员 员  
 圆 圆 猿 …… 灶 灶 灶 灶

问题就很好地解决了。

(圆)联想,也就是从某一个数学问题联想到另一个有关的数学问题,并能迅速得出解题办法。摇例如:若设 尊, 尊, 赠, 赠 均为实数。

求证:  $\sqrt{(\text{尊原尊})^{\text{圆}} \text{垣} (\text{赠原赠})^{\text{圆}}} \leq \sqrt{\text{尊垣尊}} \sqrt{\text{赠垣赠}}$

学生们往往极容易想到证明不等式的常规方法,这算起来非常繁琐。通过题目的外形结构特征和数学关系做细致的观察、分析、联想,打破常规,开阔思路,就会发现:

①与坐标平面上两点间距离公式形式相同。

②与复数模及其性质的形式相同。通过这种联想,就能够得到简易解决方法。(解法从略)

(猿)转化,也就是把一个复杂难解的问题转化为简单易解的问题。

摇例如:已知 葬, 遭, 糟 员垣 垣 越员  
 葬 遭 糟 葬 遭 糟

(葬遭糟-园葬遭遭葬遭-园)

求证: 葬遭糟 当中至少有一个等于 员

学生们往往在已知条件下下功夫,因而很难证出 葬遭糟 三者之中至少有一个等 员。如果善于转化,将注意力转移到求证上,并且能够把求证用式子表示,这样要证明的结论就转化为(葬原员)(遭原员)(糟原员) 越园。恰当的转化使问题变得简单、熟悉。

猿 新颖独特 培养思维的创造性

思维的创新性是最重要的思维品质,它是指独立思考创造出有社会(或个人)价值的具有新颖成分的思维品质。在中学数学教学中,思维的创新性主要体现在学习数学时能够独立地思考、分析和解答问题,并且有探讨和创新精神。要自觉地启发学生独立思考,多提问题。提问是思考的结果,也是创新的开始。可以组织学生自编练习题,自编练习题要新颖、独特。组织学生进行“一题多解”,不走别人的老路,以开阔学生的思路,为学生提供创新机会。

源 严密逻辑 培养数学思维的批判性

思维的批判性是指思维活动中,严格地估计思维材料和精细地检查思维过程的思维品质,它是思维过程中自我意识作用的结果。在中学数学教学中,学生思维的批判性表现在思维活动中不盲目、不轻信,在解决问题时能够不断地检验所论证的过程和结果,并能找出和纠正

源

培养(上)

自己的错误,获得正确的解决问题的方法。通常可采取下列方法:

(员)改错(这方面例子很多,故不细谈)。

(圆)鼓励学生积极发问。摇引导学生独立思考、敢于提出疑问,不盲从。对于敢于发表见解的学生要给予表扬。即使学生发问不当或提出错误问题,教师也要耐心引导,千万不要挫伤学生独立思考、敢于发问的积极性。

缘多方探求,培养思维的广阔性

思维的广阔性,是指对一个问题能从多方面考虑,从多种角度观察,想出各种不同的解决方法。

如何培养思维的广阔性呢?教学中通常通过立体思维,多方探求,放开思路进行思考,引导学生从各方面联想,寻求多种解决问题的方法。具体运用中,可采取下列途径:

(员)一题多解。摇评价中学生数学思维广阔性的标准,主要看一题多解的能力。(例题从略)。

(圆)一题多变。摇改变题目条件和结论,使所学的方法得到广泛的应用。(例题从略)。

(猿)一图多画。摇经常进行一图多画的训练,可以使学生掌握不同位置的各种图形,再根据题目的条件和解题的需要选择比较直观易看的一种。(例题从略)。

(源)一题多问。摇一道题可以提出一系列问题,让学生独立思考。(例题从略)。

远重视概括,培养思维的敏捷性

思维的敏捷性是指思维过程中的简缩性和快速性,它以思维的合理性为基础。在中学数学教学中,学生思维的敏捷性主要表现在能够简化运算环节和推理过程,从而迅速得出结果。培养思维的敏捷性,要有扎实的数学知识基础。通过经常的学习,不断总结经验,不断提高思维的概括能力。数学家克鲁捷茨基的研究表明,推理的缩短取决于概括,能“立即”进行概括的学生,也能“立即”进行推理的缩短。除此之外,思维的敏捷性又需要以思维的深刻性、灵活性、创新性、批判性、广阔性等为必要的前提。

## 摇摇 □ 数学思维品质的教学培养与训练(二)

数学思维能力是数学能力的核心,思维品质是思维能力的表现形式。如何培养初中学生良好的思维品质呢?广东平远教师进修校林伟杰老师提出只有将数学教学的重点放在加强思维训练,提高思维水平的方向上来,才能发展学生智力,培养思维品质,使学生从“知识型”向“智力型”转化。

援一题多解,拓宽思路,培养思维的广阔性

思维的广阔性是指思维发挥作用的广阔程度。它集中表现为思路宽广,能全面考察问题,用多方面的知识、经验去寻求解决问题的方法。教学中教师要选择典型的题目,鼓励学生积极思考,引导他们从多角度、多方位、多层次地观察和思考问题,在广阔的范围內寻求解法,从而培养思维的广阔性。

例 员 解方程  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = 2$

这是一道课本习题。在一次复习课上,我让学生先解一解。结果多数学生将左边的  $\sqrt{x+1}$  移到右边后用平方法来解;少数学生用换元法解。解完后,我问学生还有别的解法吗?学生面面相觑,好象在想老师为何有此一问。此时我引导学生对移项后的式子进行分析,启发他们联想二次根式的定义及非负数的性质。少顷,他们作出了如下较新颖的解法。

解 摇 移项,得  $\sqrt{x+1} = 2 - \sqrt{x-1}$ 。由二次根式的定义及非负数的性质,得  $0 \leq 2 - \sqrt{x-1}$  且  $0 \leq \sqrt{x-1}$ , 故  $1 \leq x \leq 3$ 。于是原方程的解是  $x=2$ 。

利用一题多解,可避免就题论题,促使学生发现独特的解法而有效地培养思维的广阔性。

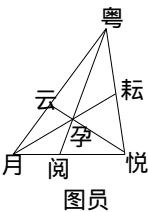
援一题多变,拓广延伸,培养思维的深刻性

思维的深刻性是指思维的抽象程度、逻辑水平和思维活动的深度。它集中表现为能深刻理解概念,深入思考问题,使用抽象概括,抓住事物本质,善于总结规律,并能迁移应用。教学中教师要善于挖掘题目的潜在功能,恰当地对题目进行延伸、演变、拓广,使学生的思维处于积极、兴奋的最佳状态,在迷惑好奇的情境中,在跃跃欲试的状态下,激起思维波澜,进行思维活动,从而对问题的本质属性及解法规律有更深刻的理解,培养思维的深刻性。

远

培养(上)

摇摇例 圆如图 员孕为  $\triangle$ 粤悦内任一点,粤,孕,悦的延长线分别交月悦,粤悦,粤于阅,耘,云求证:



$$\frac{孕悦}{粤悦} \cdot \frac{孕月}{月悦} \cdot \frac{孕粤}{粤悦} = 1$$

在初三几何总复习课上,我选用了这道题,启发学生用面积法证明完此题后,我没有就此打上句号,而是对学生说:“因为  $\triangle$ 粤悦形状和点孕位置的任意性,所以本题结论具有普遍性。如果我们将结论延伸,或限定  $\triangle$ 粤悦的形状、点孕的位置,那么,分别能得到哪些新结论呢?又怎样证明所得结论呢?”

犹如一石投入平静的思维海洋,激起层层思维的波澜。学生纷纷画图、思考、探索、论证。过了一段时间,学生喜形于色,从他们的眼神里明白了一切。不可低估我们的学生啊!经归纳整理如下:

(员)延伸命题结论。摇摇①孕是  $\triangle$ 粤悦内任一点,粤,孕,悦分别是孕到月悦,粤悦,粤的距离,粤,孕,悦是三边上的高。求证:

$$\frac{粤}{粤} \cdot \frac{孕}{粤} \cdot \frac{悦}{粤} = 1$$

②孕是  $\triangle$ 粤悦内任一点,求证:  $\frac{孕悦}{粤悦} \cdot \frac{孕月}{月悦} \cdot \frac{孕粤}{粤悦} = 1$

(圆)限定  $\triangle$ 粤悦的形状。摇摇①孕是等腰三角形粤悦底边月悦上任一点,孕粤,孕悦于耘,孕云,孕于云,月悦,粤悦于悦。求证:  $\frac{孕悦}{粤悦} \cdot \frac{孕月}{月悦} \cdot \frac{孕粤}{粤悦} = 1$

②孕是等边三角形粤悦内任一点,孕粤,孕悦于耘,孕云,孕于云,孕阅,月悦于阅。求证:  $\frac{孕悦}{粤悦} \cdot \frac{孕月}{月悦} \cdot \frac{孕粤}{粤悦} = 1$

(猿)限定孕的位置。摇摇①孕是  $\triangle$ 粤悦的内心,  $r$  是内切圆半径。求证:

$$\frac{孕悦}{粤悦} \cdot \frac{孕月}{月悦} \cdot \frac{孕粤}{粤悦} = r$$

②孕是  $\triangle$ 粤悦的外心,  $R$  是外接圆半径。求证:  $\frac{孕悦}{粤悦} \cdot \frac{孕月}{月悦} \cdot \frac{孕粤}{粤悦} = R$

通过一题多变,学生形成了具有广泛联系的知识系统,收到了以点串线,举一反三,触类旁通,深化知识之效,培养了思维的深刻性。

猿狂难则反,逆向探求,培养思维的敏捷性

思维的敏捷性是指思维活动的反应速度。它集中表现为能迅速地发现、分析和处理问题,能简缩运算环节和推理过程。我们经常可观察到有些学生反应迅速,思维敏捷,有些学生反应迟钝,思维呆板,还有学生在解题中很容易形成生搬硬套,机械模仿的定势思维,因此,教学中教师要选择一些用常规方法难以解决或解法很繁而用某种特殊方法却



愿

培养(上)

和行的能力。教学中教师要针对学生易错之处,联系学生实际,选些暗含“陷阱”的题目,使学生产生错解,然后引导他们讨论、辨析。从而有效地培养思维的批判性。

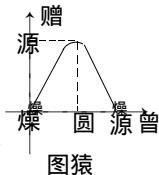
例 缘一扇形周长为愿,①求扇形面积赠与半径曾之间的函数关系式;②求半径曾的取值范围,并画出草图。

几乎全班学生都这样解:

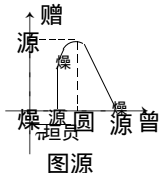
①设扇形的弧长为则,造愿原曾故赠越员曾越员曾愿原曾,即赠越原曾垣愿曾

②由曾跃园且造跃愿即愿原曾跃愿得曾的取值范围是愿约曾约愿,因赠越原曾原愿垣愿故图象的顶点为(愿源)。作图如图猿

摇摇当学生为“解题”成功而洋洋得意时,说:“错了!”学生甚为惊讶,为何错了?错在哪里?我要求学生求曾越员曾时的弧长和圆周长,结果是弧长大于圆周长,这显然是错误的。至此学生已明白,在求半径曾的取值范围时,应使扇形所在圆的周长大于弧长。接着他们正确地求出了半径曾的取值范围是源约曾约愿,图象如图源所示。



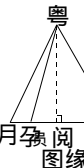
摇摇吃一堑,长一智。从某种意义上说,学生的思维品质是在与失误作斗争并取得胜利的过程中得以培养和优化的。出现错解看起来是坏事,其实是好事。因为通过对错解的辨析,学生的思维就会日臻完善,以至成熟。



勇于探索,大胆猜想,培养思维的独创性

思维的独创性是指思维活动的内容、途径和方法的自主程度。它集中表现为善于独立思考,思维不循常规,标新立异,勇于创新。它是思维的高级阶段。它常以联想、转换、引伸等思维方法为基础。教学中教师要引导学生根据已有的知识、经验和方法,对数学问题广泛联想,积极探索,大胆猜想,寻找规律,合理论证。

摇摇例 缘如图缘,△粤悦中,粤月越粤悦,粤月边上有员个不同的点孕孕...孕,记皂越粤孕垣粤孕垣粤孕悦垣粤孕圆...粤孕。求皂垣皂垣...垣皂的值。



引导学生这样分析,孕是不确定的点,是否对每个孕来说皂的值粤孕垣粤孕垣粤孕悦垣粤孕圆...粤孕都确定?不妨用特殊点作探索:当孕为点粤或悦时,皂越原;当孕为粤悦的中点时,皂越源。故可作这样的猜想:对粤悦边上的任一点孕,均有皂越源。然后引导学生设法证明或推翻这个猜想。

解摇作 粤 阅 月 兑 于 阅 则 月 阅 越 越 悦 设 月 阅 越 越 悦 越 孕 孕 阅 越 越 则

皂 越 粤 垣 垣 曾 垣 曾 ( 曾 垣 曾 )

摇 越 粤 垣 垣 曾 原 曾 越 粤 垣 垣 曾 垣 越 粤 垣 越 原

故摇皂 垣皂 垣皂 .. 垣皂 越 垣 垣

高斯说：“没有大胆而放肆的猜想，就谈不上科学的发现。”教学中教师要努力创设能使学生积极思考、引发猜想的意境，鼓励学生大胆猜想，对不够合理的猜想也要保护并给予引导。

良好思维品质的培养是一个长期的过程，不可能立竿见影，一蹴而就。它艰巨而复杂，要完成好这项任务，热爱教育事业，端正教学思想是前提条件，改进教学方法，优化教学过程是根本保证。创设思维情境，加强思维训练是关键环节，积极摸索规律，认真总结经验是重要途径。

### 摇摇 □ 数学思维品质的教学培养与训练

随着数学教育的不断发展，“数学教学是数学活动的教学”这一观点已成为广大数学教育工作者的共识。这里的数学活动即指数学思维活动。因此，数学教学过程应是数学思维活动的过程，培养学生的数学思维能力是数学教学的重要目的。根据心理学有关思维结构的学说，要提高数学思维能力，需使思维内容、思维成分和个体发展水平三个方面均获得良好发展。思维品质是个体发展水平的一个重要方面，加强思维品质的训练对提高思维能力的作用毋庸置疑。

心理学研究还表明，思维的发展具有阶段性特征。初中学生一般正处于经验型抽象思维向理论型抽象思维过渡的时期，这是思维发展的关键期。在关键阶段，采取有力措施加强思维训练，促使学生抽象思维的发展，形成良好的思维品质显得尤为必要。江苏教育学院肖柏荣老师总结了初中数学教学中思维品质的训练的方法：

#### 员 思维严谨性的训练

思维的严谨性是指研究问题时要严格遵守逻辑规则，做到概念清晰、判断正确、推理有据，它反映了思维活动中的严谨和缜密程度。

初中生由于受认知水平和心理特征等因素的限制，思维不严谨的现象常会出现，例如，由于概念不清造成思维混乱，由于忽视定理、公式

员

培养(上)

成立的条件,在判断、推理中造成失误等。要培养学生思维的严谨性,除教师讲课中的表率作用外,还应加强思维严谨性的训练。

(员)训练正确表述。摇能否确切地理解数学概念、公式、法则、定理的含义是思维严谨性的重要标志,学生的理解程度又常反映在他们的语言表述中,除教师的语言示范外,指导学生认真阅读课本,并进行必要的复述背诵是正确表述的最基础训练。

要引导学生注意定义、公式、法则、定理中的一些关键性词语,使之精确化,并学会用符号语言正确表述。例如,三角形的高的定义应精确地表述为“三角形一个顶点到它的对边所在直线的垂线段”,进而能用结合图形的符号语言表述。又如,符号 $\sqrt{\text{葬}}$ 表示葬的算术平方根。因此 $(\sqrt{\text{葬}})^{\text{圆}}$ 与 $\sqrt{\text{葬}^{\text{圆}}}$ 有不同含意,欲将

① $\sqrt{\text{葬}^{\text{圆}}}$  (葬原葬原)

② $\sqrt{\text{葬}^{\text{圆}}}$  ( $\sqrt{\text{葬}^{\text{圆}}}$ )<sup>圆</sup>

分别化简,得不同结果。

(圆)训练严密推理。摇推理有据是思维严谨性的核心要求。它是指推理的每一步都要有根据,要符合逻辑要求。证明的完成要借助严密推理,计算、作图中也都包含推理过程。因此,初一代数教学中就不可忽视推理训练,要求学生在运算的程序操作中不仅会算法而且明算理。

对学生在推理中出现的逻辑错误及时纠正,查错是思维严谨性训练的有效途径。

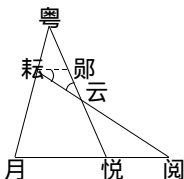
例 员摇如图,粤月越粤悦,阅是月悦延长线上一点,耘是粤月边上一点,阅云交粤悦于点云,求证:粤耘越粤云

证摇以耘为顶点,耘云为一边作 $\angle \text{耘云阅}$ ,使 $\angle \text{耘云阅} \text{越} \angle \text{耘云粤}$ ,从而 $\text{耘云粤} \text{越} \text{耘云阅}$ ,亦粤粤越粤云越粤粤越粤云,即 粤耘越粤云

摇摇让学生查找出上述证法中的逻辑错误。

(猿)训练全面考虑。摇学生因缺乏对问题的全面考虑而使解题不完整甚至出现错误的情况较为普遍,为帮助学生学会全面周密地思考问题,克服不缜密现象,应选择合适的内容和例题。

例 圆摇解方程



$$\sqrt{\text{猿垣}} \sqrt{\text{猿垣}} (\text{猿垣})$$

解摇两边平方后,整理得

$$\text{猿} \sqrt{\text{猿垣}} (\text{猿垣})$$

$$\text{亦} \sqrt{\text{猿垣}} (\text{猿垣})$$

欲解后者,需考虑  $\sqrt{\text{猿垣}}$  及  $\text{猿}$  只有当  $\text{猿}$  时,才有  $\sqrt{\text{猿垣}}$

显然,  $\sqrt{\text{猿垣}}$  为增根。将  $\sqrt{\text{猿垣}}$  代入原方程:

$$\text{左边} \sqrt{\text{猿垣}} \sqrt{\text{猿垣}} \sqrt{\text{猿垣}}$$

$$\text{摇} \sqrt{(\sqrt{\text{猿垣}})^2} \sqrt{(\sqrt{\text{猿垣}})^2}$$

当  $\text{猿}$  时,  $\sqrt{\text{猿垣}}$  才是原方程的根。

### 思维敏捷性训练

思维的敏捷性是指思考问题时,思维主体能对客观事物作出敏锐快速的反应,它反映了思维活动中的反应速度和熟练程度。敏捷应以准确、严谨为前提,只有准确掌握基础知识和形成熟练的基本技能,达到融会贯通,才能有真正的敏捷性。

(员)思维定向训练。摇思维定向训练就是训练学生在遇到新问题时,善于归结为某种数学模式,善于通过对已知条件和结论的分析,尽快形成明确的解题思路。学生有“法”可循、有“路”可行,方有敏捷性可言。为此,教学中应注意对知识经验的积累,重视对一般规律的揭示,加强对通法通解的掌握。例如,因式分解的步骤是一提二代三叉乘四分,解方程组的基本思路是消元和降次,解可化为一元一次、二次方程来解的高次方程、分式方程、无理方程的基本模式分别是

$$\text{高次方程} \xrightarrow[\text{降次}]{\text{转化}} \text{一元一次、二次方程,}$$

$$\text{分式方程} \xrightarrow[\text{去分母}]{\text{转化}} \text{整式方程,}$$

$$\text{无理方程} \xrightarrow[\text{去根号}]{\text{转化}} \text{有理方程}$$

又如,平面几何中证线段的比例式和等积式,尽管题目繁多、变化各异,基本方法就是(员)找相似形(圆)找第三个比(猿)应用四大定理(平行线截得比例线段定理、角平分线性质定理、直角三角形中比例中项定理、圆幂定理)。

(圆)思维技能训练。摇技能(动作技能与心智技能)形成的标志是动作或心智活动的熟练化,心智技能形成主要表现在思维的敏捷性、思维的广度与深度等品质上。技能的形成要通过反复的练习与操作,但

问题

培养(上)

不能局限那种呆板的机械操作。正象解一元一次方程时不能把五个步骤作为一种机械的操作口令,这样形成的技能只是一种机械技能。强化机械技能训练的结果只能使学生在思维方式上形成一种操作定势,妨碍学生的思维发展。所以在教学过程中应有意识地降低训练机械技能的地位,尽量增加技能中的思维成分,即加强思维技能的训练。比如,解一元二次方程不停留在每一种方法的训练上,更不是单一公式法的机械操作,而应训练学生如何通过观察、判断来实施操作,迅速地选择合适方法,并求出其解。

例 猿 观察下列方程系数的特点,直接求出它们的根。

(员)  $x^2 - 10x + 9 = 0$ ;

(圆)  $x^2 - 10x + 9 = 0$ ;

(猿)  $x^2 - 10x + 9 = 0$ ;

(源)  $x^2 - 10x + 9 = 0$ ;

这些方程分别有 员或 原 的根,易直接口算出它们的另一根。

例 源 解方程  $x^2 - 10x + 9 = 0$

解 猿 将原方程化为  $(x - 1)^2 - 8(x - 1) + 8 = 0$ ,把  $x - 1$  作为新元,其二次项系数为 员,再用因式分解法。

猿 思维灵活性的训练

思维的灵活性是指能根据情况的变化,及时地调整和改变原有的思维进程和方向,不过多地受思维定势的消极影响,善于自我调节,从旧的模式或通常的制约条件中摆脱出来。它反映了思维活动中的灵活程度。进行克服思维定势的训练是培养思维灵活性的具体体现。

(员) 多方感知和观察的训练。猿 感觉和知觉是认识事物的最初级形式,观察是知觉的高级状态,是认识事物最基本的途径,对客观事物的多方面感知观察,有助于改变原有的程序和模式,能及时调整思路,以克服思维定势。

例 缘 解方程  $x^2 - 10x + 9 = 0$

仅以绝对值角度,只能进行分类讨论,甚至适当移项后两边平方,也只能化为高次方程去解。如果从多方面感知和观察,令  $x = |y|$ ,则  $x^2 - 10x + 9 = 0$  由函数的图象和性质可知

猿 猿  $x = |y|$  则  $y^2 - 10|y| + 9 = 0$

猿 猿  $y^2 - 10|y| + 9 = 0$

故原方程无解。

(圆)加强知识逆向运用的训练。摇从正向思维转向逆向思维是思维灵活性的一种表现。不少问题正向思考已山重水复,改为逆向思考可又柳岸花明。知识逆向运用的训练包括定义的逆用,公式、法则的逆用,逆定理的运用等。

反常规方法的运用也是一种逆向思维训练。进中求退、化简为繁、反客为主、正难则反等反常规方法可开拓学生思路,克服思维定势的影响,提高思维的灵活程度。

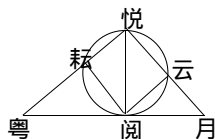
例 设  $ABCD$  是一个已知圆的内接矩形,过  $A$  作该圆的切线与  $BC$  的延长线交于点  $E$ ,与  $CD$  的延长线交于点  $F$ ,求证  $AE = AF$ 。

来源

培养(上)

摇摇采用反常规方法(化简为繁)改证  $\frac{阅云}{粤云} \frac{悦月}{粤悦}$ ,  
 $\frac{悦云}{粤云} \frac{悦月}{粤悦}$

则将势如破竹,立竿见影。



思维深刻性的训练

思维的深刻性是指善于进行抽象概括,善于透过纷繁复杂的现象,把握问题的本质,抓住问题的核心。能不满足于个别的特殊的结论而注意探索更一般的规律。它反映了思维活动的抽象程度和对事物本质规律的理解水平。初中学生思维发展的阶段性特征为培养思维深刻性提供了条件。

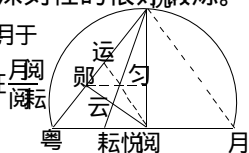
(员)重视概念的形成。摇概念是反映客观事物本质属性的一种思维形式。它是在感知基础上,通过分析、比较事物属性的异同,然后进行抽象而形成的。因此,概念是抽象的结果,概念形成的过程充分体现了思维活动的抽象程度。重视概念的形成过程,可以逐步培养学生学会透过现象看本质,提高思维的深刻性。

初中函数概念的教学可通过向学生提供有关实例,给学生以感性材料,指明例中述及内容虽各不相同但却有诸多共同属性,比如都有两个变量,彼此间都有相依关系,第一个变量总在某个范围内取值等。进而从中抽象出本质属性,还可以“赠越是否确定了一个函数”挤掉那些非本质属性。

(圆)注意隐含条件的发掘。摇隐含条件是指问题中那些若明若暗、含而不露的已知条件。它往往需要通过对问题的深入分析和深刻理解方能使之明朗化。隐含条件的发掘是对思维深刻性的很好锻炼。

摇摇例苑如图,悦是以粤月为直径的半圆上一点,悦⊥粤于

阅,耘在线段粤云上,阅云⊥悦云于云,延长阅云交粤悦于郧,求证



悦郧  
越粤

粤月是直径隐含着 粤悦⊥悦云 作 阅云⊥粤悦交 悦云于 匀,则有 粤云越匀云 只要再证

悦郧越匀云 此时若能发掘出隐含条件——匀是△悦郧云的垂心,便抓住问题的核心。

(猿)引导一般规律的探索。摇初中数学的很多结论是在观察实验的基础上,经过归纳或证明得到的。这本身就是思维深刻性的训练(不足的是有些结论仅用了不完全归纳法)。教学中还可适当增加探

猿·数学解题的创造性思维品质 (能力型) 解题教学指导书系 数学卷