

中学数学思想方法概论

主编 王林全 摇摇 副主编 林国泰

暨南大学出版社

目 录

绪论 摇数学思想方法的对象和意义	(员)
第一节 摇中学数学思想方法的研究对象	(员)
第二节 摇学习中学数学思想方法的意义	(苑)
第三节 摇中学数学思想方法的学习方法	(员袁)
练习题	(员愿)
第一章 摇数学的起源与发展	(圆)
第一节 摇数学发展各个时期简析	(圆)
第二节 摇中国数学的起源与发展	(猿)
第三节 摇数学发展的动力	(源)
练习题	(远)
第二章 摇数学概观	(远)
第一节 摇数学的对象和特征	(远袁)
第二节 摇数学的地位	(苑)
第三节 摇辩证唯物主义数学观	(苑愿)
第四节 摇数学基础论及其简要评介	(怨袁)
练习题	(员愿)
第三章 摇数学研究的一般方法	(员园)
第一节 摇观察与实验	(员园)
第二节 摇划分与比较	(员苑)
第三节 摇分析与综合	(员缘)

第四节 摇抽象与概括	(员愿)
第五节 摇特殊与一般	(员源)
练习题	(员源)
第四章 摇数学的逻辑方法	(员愿)
第一节 摇逻辑思维的基本形式	(员愿)
第二节 摇形式逻辑方法与辩证逻辑方法	(员怨)
第三节 摇逻辑推理规则	(员怨)
第四节 摇常用的逻辑推理方法	(员缘)
第五节 摇数学证明与逻辑推理错误剖析	(圆苑)
练习题	(圆圆)
第五章 摇几种重要的数学方法	(圆原)
第一节 摇模型方法	(圆原)
第二节 摇化归方法	(圆圆)
第三节 摇公理化方法	(圆圆)
练习题	(圆缘)
第六章 摇数学思维方法	(圆苑)
第一节 摇思维及数学思维	(圆苑)
第二节 摇数学逻辑思维方法	(圆猿)
第三节 摇数学形象思维方法	(猿猿)
第四节 摇创造性思维及其培养	(猿怨)
练习题	(猿远)
第七章 摇数学思想方法的教学	(猿原)
第一节 摇数学思想方法教学的原理	(猿原)
第二节 摇符号化意识的培养	(猿怨)
第三节 摇化归意识的培养	(猿苑)
第四节 摇整体化意识的培养	(猿猿)
第五节 摇帮助学生形成正确的数学观	(猿猿)

练习题	(源四)
参考文献	(源四)

前摇言

随着数学科学和数学教育的发展，数学思想方法的研究日益受到重视。“中学数学方法论”已作为一门课程，被普遍列入我国高等师范院校数学专业选修课的一系列之中。该课程成为从事中学数学教育的重要理论基础。它的开设将对未来的中学数学教学产生深远的影响。

数学方法论是研究数学的发展规律，数学的思想、方法、原则，数学的发现，发明和创新的学科。是一门发展中的学科。它的理论体系和研究方法正在不断完善和发展。作为高等师范院校开设的数学方法论课程，是为培养中学教师服务的，是以提高教师对数学思想方法认识水平为宗旨的。该课程的教材，不可能对数学发展史，数学发展规律以及它的发明创新原则作全面论述。然而，我们将针对中学数学教学，吸取数学发展中某些重要方面，对数学一些重要思想方法进行适当的整理，总结和阐述。本书是参考原国家教委颁布的《普通高等师范院校数学教育专业教育教学基要求》（试行）中有关要求编写的，可作为高等师范院校数学系（包括师专、教育学院数学专业）开设本课程的教材。本书从数学思想方法的对象和意义，数学的起源与发展。数学观，数学研究的一般方法，数学的逻辑方法，几种重要的数学方法，数学思想方法和数学思想方法的教学等方面，结合中学数学教学实际和编者对这门课程的多年教学经验，力求使教材具有简明性，实用性和联系中学数学教学实际的特色。为方便教学，

员

在每章之后，附有练习题供教学参考，并给予部分答案或提示。本课程是“数学教学论”的后继课程，是前一课程的深化和补充。因此，在教材编写的一些相应部分，在理论上有所加深，在内容上有所扩展，使这两门课程相辅相成，成为中学数学教学的理论基础。本书同时作为广东省高等教育（师范类）自学考试“中学数学方法论”的指定教材。

参加本书编写的有王林全（绪论，第二章，第七章），陈德崇（第一章），朱仲庆（第三章），林国泰（第四章），吴跃忠（第五章），何小亚（第六章）。由王林全担任主编，林国泰担任副主编。

本书属数学教育丛书系列，受广东省高师数学教育研究会委托组织编写，并得到广东省教育厅教学处的支持，特别是暨南大学出版社给予大力协助和密切的配合，编者谨向有关领导和研究会的全体同志表示衷心感谢。

1992年 猿月

绪论 数学思想方法的对象和意义

在实际需要的推动下，数学伴随着人类历史前进的脚步而发展。在数学内容不断丰富、分支不断增多的同时，与其相应的数学思想方法也逐步形成。因此，我们学习数学时，不仅要学习其内容和原理，还要认真领会它所蕴含的丰富的思想方法。

近代各国数学家都重视数学思想方法的研究。我国不少学者还把数学思想方法作为专门学科予以研究。我国不少高等学校开设了数学思想方法课程。数学思想方法课程的开设将对未来中学数学教学产生深远的影响。

本绪论介绍中学数学思想方法的内容和意义。我们希望，读者通过对绪论的学习，对数学思想方法的意义有一个概括性的了解，从而明确本课程的学习目的。

第一节 中学数学思想方法的研究对象

本节试图解释方法、方法论、数学思想、数学方法等的意义。它们是本课程的关键词语。

一、方法和方法论

方法总与具体事物相联系。世界上没有脱离具体事物、具体对象的方法。方法是人类认识中的原始概念之一，未有人试图对

方法给予精确定义

一般地说，方法就是人们处理某种事物的策略、思路、途径和步骤，解决不同学科的不同问题，需要用不同的方法。在种种不同的方法之间，有时存在某些共同的规律。这种研究各种方法共同规律和原则的学问，称为方法论（~~西文译音~~）。

方法论与一定的世界观相联系。辩证唯物主义认为，科学的方法论必须体现客观事物发展的规律，也必须符合人类对客观世界的认识规律。根据人类对客观事物的认识规律，整理和总结各种处理问题方法的共同规律、共同原则的学问，称为科学方法论。

二、数学方法论

数学思想方法是数学的精髓。在运用数学解决问题中，在对数学自身进行研究和探索中，数学思想方法体现其重要价值。人们对数学思想方法有不同的认识。

作为学科的数学方法论

狭义地说，数学方法论可理解为解决数学问题的方法和手段，包括：数学概念的定义方法、数学的推理和证明方法、数学的计算和解决问题的思想方法等。

广义地说，数学方法论还应包括对数学概念、数学理论的概括认识，包括对各种数学方法进行分类、整理和总结，从中寻找某些共同的规律，从而使我们能更好地学习数学和运用数学。从这个角度来认识和阐述数学方法就是数学方法论的研究目的。

更广义地说，数学方法论是研究数学的发展规律，数学的思想、方法、原则，数学的发现、发明和创新的学科。

到目前为止，对于数学方法论的对象、任务及其所隶属的学科范畴，人们尚存在不同的认识。专家们在其著作中各抒己见，应该说，作为学科的数学方法论，其涵义有待继续探索，以便求圆。

得较为一致的认识

作为课程的数学方法论

在高等师范院校所开设的数学方法论课程，是为培养中学数学教师服务的，作为这门课程的教材，本书不打算也不可能对数学的发展史、数学的发展规律以及它的发明创新原则作全面论述。然而，我们将联系数学发展史中某些重要方面，对数学的一些重要思想方法进行适当的整理、总结和阐述。我们希望，通过本课程的学习，读者对数学的对象、特点、内容和方法能建立正确的认识，并根据这种认识，指导未来数学教学工作。

数学方法论和其他学科的关系

哲学家认为，方法论是一门关于认识世界和改造世界的哲学分支。根据不同的哲学观，就有不同的方法论。利用一定的哲学观点研究不同学科领域的方法问题，就是不同学科各自的方法论。

辩证唯物主义认为，世界是永恒的、运动发展着的物质世界。这是辩证唯物主义世界观的核心。用这种观点去观察自然科学、技术科学和社会科学的方法问题，就是科学的方法论。用辩证唯物主义观点为指导去研究数学方法问题，就成为数学方法论。

作为高等师范院校数学方法论的教材，本书并不局限于从数学和哲学角度来研究和阐述数学的方法。我们还需要考虑，在数学教学中，有意识地传播数学思想方法，使得中学生在学数学的同时，逐步领会各相关内容所蕴含的数学思想方法。因此，本课程还与数学教学论、数学学习论相互配合，相互联系。

数学思想方法是以一定的数学内容为载体的。离开了具体的数学内容孤立地谈数学方法就没有说服力。为了说明数学思想方法的来源和发展，我们需要联系这些数学思想方法产生的时代背景。因此，具备坚实的数学理论基础、掌握相关的数学史知识是

学习数学思想的前提条件 鄢

此外，在历史上，数学和逻辑学有着密切的联系，直到 19世纪末 20世纪初，还有一些学者试图把数学基础全部归结为逻辑问题，可见逻辑在数学方法研究中有重要地位 鄢

综上所述，中学数学思想方法和哲学、数学、数学史、逻辑学、数学教学论、数学学习论都有密切联系。它们之间的联系，可用图 0原1表示。

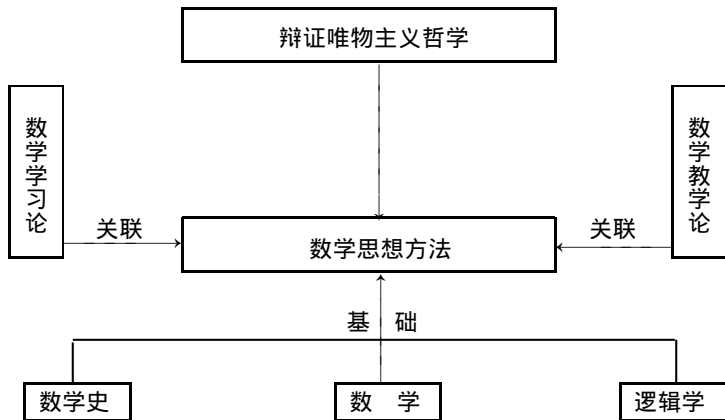


图 0原1

三、中学数思想方法

数学思想和数学方法

当前，国内外一些有代表性的数学思想方法论著，内容相近而名称不一 鄢有些书称之为数学思想，例如，美国克莱因（西顿著）著《古今数学思想》；有些书称为数学方法，例如，前苏联亚历山大洛夫（李德著）等著《数学——它的

内容、方法和意义》；有些书也称为数学思想方法，例如我国解恩译、赵树智编著的《数学思想方法纵横谈》等。对于什么是数学思想，什么是数学方法，它们有什么区别，未见有人作过明确的界定。

事实上，数学方法可大可小，小至解决某个或某类具体数学问题的具体方法，例如，分解因式的待定系数法；大至建立某个分支体系的数学方法，如公理化方法等。而数学思想，一般是能反映某些重大数学成就的思想。张奠宙教授认为：“同一个数学思想，当用它去解决别的问题时，就称之为方法，当评价它在数学体系中的自身价值和意义时，就称之为思想。”这是对“思想”和“方法”相互关系的一种合理解释。“数学思想”和“数学方法”这两个术语常常被混用或合用，人们目前尚未觉得有必要进一步澄清。由于我们既需要用数学方法解决问题，有时也需要对这些方法作出评价。本书就把“数学思想”和“数学方法”合二为一了，在不同的章节，有时称之为思想，有时称之为方法，不再区分其差异。

中学数学思想方法的研究对象

中学数学思想方法概论主要论述与中学数学内容有关的数学思想方法问题，并讨论如何在数学教学中传播上述思想方法。

本书所联系的数学内容又不完全局限在现行中学教学知识范围内。中学数学课程是一个活动的、发展中的体系。过去认为属于高等数学的内容今天已经部分进入中学数学，今天认为属于高等数学的内容，明天也可能会进入中学数学。根据目前已公布的高中数学课程改革方案，未来高中数学课程内容将有不少更新，微积分、概率统计等内容将会进入高中数学。

因此，把中学数学思想方法局限为传统的代数、三角、几何等内容是一种片面的认识。为了说明数学思想方法的发展，我们会联系数学史、数学家的有关工作。尽管这些内容有些已超出了

当前中学数学的范围，但是我们相信，对这些内容的认识，有助于未来的数学教师建立正确的数学观，并以更科学的观点分析研究中学数学问题 鄠

獠中学数学思想方法概论的主要内容

根据对中学数学思想方法研究对象的分析，本书内容由绪论和七章组成，其内容和要求概述如下：

绪论：数学思想方法的对象和意义 鄠绪论论述中学数学思想方法的研究对象、内容、意义和学习方法 鄠通过对绪论的学习，读者对本课程应该有一个概括性的认识，从而明确本课程的目的、要求和方向 鄠

第一章：数学的起源与发展 鄠第一章用辩证唯物主义和历史唯物主义观点分析数学发展各个时期的数学思想方法及其重要成就 鄠通过对第一章的学习，了解数学来源于实践，各个时期数学的主要成就、矛盾与斗争 鄠

第二章：数学概观 鄠第二章指出数学的研究对象、特点，阐述辩证唯物主义数学观的基本观点，介绍数学基础论各派的基本观点，各学派理论的积极意义和局限性 鄠

第三章：数学研究的一般方法 鄠第三章阐述处理数学问题的一般性思想方法，包括分析与综合、抽象与概括、特殊与一般、划分与比较、观察与实验等 鄠它们不但在数学研究中经常使用，而且在一般科学研究中也有普遍意义 鄠

第四章：数学的逻辑方法 鄠第四章论述数学推理的逻辑方法，包括归纳法、演绎法和类比法 鄠第四章着重阐述逻辑推理规则，并明确这些规则在数学教学中的运用 鄠

第五章：几种重要的数学方法 鄠第五章论述反映数学学科特点的几种研究方法，如公理化方法、模型方法、关系映射反演方法等 鄠其中模型方法、映射方法在中学数学教学中应该受到较大重视 鄠

第六章：数学思维方法 第六章主要论述数学思维概念、逻辑思维与形象思维、创造性思维及其培养等 对如何发展学生的数学思维能力进行了深入的论述

第七章：数学思想方法的教学 第七章研究数学思想方法教学的意义、原则 并着重阐述在教学中如何培养符号意识、化归意识整体化意识和数学观等问题

第二节 学习中学数学思想方法的意义

中学数学思想方法概论是高等师范院校重要的专业课，20世纪80年代初，我国数学方法论的奠基人徐利治教授首先在大连、长春、武汉等一些高校开设了数学方法论选修课，其讲义《数学方法论选讲》已经出版，为我国数学方法论教学提出了理论框架

近20年来，我国不少高等师范院校分别为本科生、硕士生开设了数学方法论课程，相应的教材纷纷出版 数学方法论作为一门重要的专业课的地位已经确立 本节主要研究师范生学习这门课程的意义。

一、有助于树立正确的数学观

数学观是人们（个体或群体）对数学的基本看法。人们数学观的形成与其个人的数学经验，以及他们受数学教育的程度很有关系。

我国数学课程重视数学观的培养

目前，数学家和数学教育工作者正在积极为二十一世纪的数学课程作准备。人们认为二十一世纪的数学课程应对中学生的科学素质提出更高的要求。其中，二十世纪九十年代以来的各国数

学课程标准，对培养中学生的良好的数学观都比较重视。由于各国情况的差异，各国对培养中学生的数学观的要求有不同的着重点。

我国重视培养学生学习数学的正确动机。“全日制数学教学大纲”指出：“要培养学生对数学的兴趣，激励学生为实现四个现代化”学好数学的积极性，培养学生的科学态度和辩证唯物主义观点”可见培养正确的观点是我国中学数学课程的重要目标

美国数学课程标准重视培养良好的数学价值观 该标准列举了数学课程的 个目标，其中第一个就是“让学生了解数学的价值” 该标准还指出：“通过评价数学的价值，发展学生心中的数学意识”，“让他们体会到数学在人类活动中的作用” 可见美国是通过让学生了解数学的价值来诱发其学习动机的

英国重视帮助学生树立数学应用意识 在英国国家数学课程五大块内容中，“应用与使用数学”被列为首位 该课程的指导书还指出：“要让学生树立对数学的正确态度，包括：对数学的向往，良好的兴趣和动机，从数学活动中获得的快乐和享受，对学习成就的自我满足感，对自己在适当的水平上做数学的信心”

一般地说，通过数学的广泛应用来说明数学的重要性，是各国数学课程的共同点

师范生对数学的认识，不能停留在经验水平上

经过几年专业基础课的训练，师范大学数学系学生打下了较好的数学理论基础，并积累了学习数学与解决问题的初步经验 然而，大部分师范生在学习《数学方法论》之前，他们对数学的认识仅仅停留在经验水平上 他们对数学的起源和发展，缺乏系统的了解；对数学发展过程中的矛盾和斗争，缺乏全面的认识；他们虽了解数学的一些具体方法，但对这些方法的理解有待愿

深化与提高，他们对一些数学家的故事也许略有所闻，但多未能把握数学家的创造所赖以产生的时代背景，以及数学家的这些创造对数学发展的贡献 郾

未来的数学教师必须自觉树立正确的数学观，否则，就不能全面贯彻数学课程的目标，更不能正确传播数学的思想方法 郾

隹正确数学观的基本涵义

培养正确的数学观既是本课程开设的重要目标，也是中学数学教学的重要目标，我们认为正确的数学观应该包含如下成分：

（员）数学的整体观

数学的整体观即用辩证唯物主义观点和历史唯物主义观点统观数学全貌 郾从整体上，从发展上对数学有正确的认识，包括了解数学研究对象、数学的特点、数学的来源和发展、数学的矛盾和斗争、数学的发展动向等 郾

（圆）数学的价值观

数学的价值观即认识数学作为基础课和工具课的价值，数学在日常生活中，在自然科学和社会科学中广泛应用的价值，在思维训练和素质教育中的价值等 郾

（猿）数学的问题观

数学的问题观即了解数学问题的特点，数学问题在数学发展中的意义和地位，解决数学问题的一般方法和具体方法，以及数学问题在人才培养中的作用 郾

（源）数学的审美观

数学的审美观即不但把数学作为一门学科来学习，而且要学会欣赏数学的美，从而获得学习的乐趣，形成美好的情操，包括对数学美的和谐性、简单性和奇异性的初步认识和鉴赏，并能在数学学习和问题解决中追求这种美 郾

（缘）数学教学和数学学习观

数学教学和数学学习观即对数学教学目的、意义、数学教学

原则、数学教学基本要求的正确认识；对数学学习目的、数学学习方法的正确理解 ㊟

师范生只有自己形成了正确的数学观，才能在未来教学中培养学生形成正确的数学观 ㊟

二、促进数学方法的普及和人才的培养

数学方法论是和数学教育密切相关的学科，美籍匈牙利著名数学教育家波利亚教授的研究工作的一个主要方面就是对数学方法及其传播的研究，他发表了许多卓越的见解，对我们学习数学思想方法概论十分有益 ㊟学习、研究数学思想方法，对数学的发展和普及，对科学人才（包括教育人才）的培养，有重要意义 ㊟ ㊟

“数学方法论”是一门综合性的学科，它跨越历史和学科分支的界线，从纵横两个方向对古往今来诸多数学方法进行概括、分类和评价，使我们更好地认识数学方法的本质，从而推动数学的普及和发展 ㊟综观历史上数学家们的创造，无不与新方法的研究联系在一起 ㊟

牛顿、莱布尼兹分别从力学、几何学出发，从不同角度探索变量的变化率问题，从而使人们对各种背景下与变量的变化率有关的问题产生统一的认识，而且揭示了原函数与导数之间的关系 ㊟为了说明他们的见解，牛顿发表了《曲线求积术》，《流数术方法与无穷级数》；莱布尼兹发表了《关于求极大极小和切线的新方法》 ㊟上述几部著作，有鲜明的方法论色彩 ㊟

笛卡儿创立解析几何学，其重大贡献在于他建立了坐标观念，沟通了平面点集与有序实数偶的集合之间的关系，把互有关联的两个未知数的任意代数方程看成是平面上一条曲线，他的这种创造性的见解是在他的名著《方法论》的附录《几何学》中