

中学实用参考手册

数学教与学

(五)

主编：卢炳瑞

延边大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

中学实用参考手册 / 卢炳瑞主编. - 延吉:
延边大学出版社, 2004.11
ISBN 7-5634-2925-5
. 中... . 卢... . 中学-教学
参考资料-丛书 . G633

中学实用参考手册·数学教与学(五)

作 者: 卢炳瑞

排版设计: 盛世文化传播(北京)有限公司

出版发行: 延边大学出版社

社 址: 延吉市公园街 105 号

邮政编码: 133002

印 刷: 北京忠信诚印刷厂

开 本: 880×1230mm 1/32

总 印 张: 575 字数: 4 900 千字

版 次: 2004 年 11 月第一版

2004 年 11 月第一次印刷

印 数: 1-1 000 册

书 号: ISBN 7-5634-2925-5 / G.026

总 定 价: 1656.00 本册定价: 18.00

目 录

| | |
|------------------|----|
| 古希腊数学 | 1 |
| 埃及古代数学 | 8 |
| 欧洲中世纪数学 | 10 |
| 十六、十七世纪数学 | 13 |
| 十八世纪的数学 | 21 |
| 十九世纪的数学 | 31 |
| 最早的数学——算术 | 33 |
| 初等代数 | 37 |
| 高等代数 | 41 |
| 数学中的皇冠——数论 | 48 |
| 回波为什么会增强呢 | 53 |
| 数学的趣味 | 55 |
| 音乐家与杜鹃花 | 57 |
| 头发与心肌梗塞 | 59 |
| 彩色袜子 | 61 |
| 三条领带 | 62 |
| 飞机的矛盾 | 63 |
| 烤面包的时间 | 64 |

| | |
|------------------------|-----|
| 王安石三难苏学士 | 65 |
| 揭开动物冬眠之谜 | 67 |
| 爱瓦特尔应不应付学费 | 72 |
| “立等可取” | 74 |
| 两个猎人的争论 | 76 |
| “万能”溶液 | 77 |
| 一封谈文艺的信 | 79 |
| 铁水和铁块 | 82 |
| 这个理发师给不给自己刮胡子呢 | 84 |
| 书记的答复 | 85 |
| 鲍细霞的肖像 | 86 |
| 盗窃钻石的罪犯是哪个 | 88 |
| 登徒子好色 | 90 |
| 不肖子的狡辩 | 92 |
| 获“最佳故事片”奖的是哪一部影片 | 93 |
| “既不慌人，也不遭打”行吗 | 96 |
| 生死阎 | 99 |
| 他们之间谁同谁是一对夫妻 | 101 |
| 兔子伤风 | 103 |
| 鲁班是怎样发明锯子的 | 105 |
| 数学史话 | 106 |

| | |
|--------------------|-----|
| 生活中的几何——欧式几何 | 118 |
| 坐标法—解析几何 | 126 |
| 微分几何 | 131 |
| 代数几何 | 134 |
| 射影几何 | 139 |
| 不量尺寸的几何——拓扑学 | 146 |
| 常微分方程 | 152 |
| 泛函分析 | 157 |
| 复变函数论 | 161 |
| 概率论和数理统计 | 165 |
| 实变函数论 | 172 |
| 计算数学 | 176 |
| 数学物理学 | 179 |
| 突变理论 | 183 |

古希腊数学

古希腊的地理范围，除了现在的希腊半岛外，还包括整个爱琴海区域和北面的马其顿和色雷斯、意大利半岛和小亚细亚等地。公元前 5、6 世纪，特别是希、波战争以后，雅典取得希腊城邦的领导地位，经济生活高度繁荣，生产力显著提高，在这个基础上产生了光辉灿烂的希腊文化，对后世有深远的影响。

希腊数学的发展历史可以分为三个时期。第一期从伊奥尼亚学派到柏拉图学派为止，约为公元前七世纪中叶到公元前三世纪；第二期是亚历山大前期，从欧几里得起到公元前 146 年，希腊陷于罗马为止；第三期是亚历山大后期，是罗马人统治下的时期，结束于 641 年亚历山大被阿拉伯人占领。

从古代埃及、巴比伦的衰亡，到希腊文化的昌盛，这过渡时期留下来的数学史料很少。不过希腊数学的兴起和希腊商人通过旅行交往接触到古代东方的文化有密切关系。

伊奥尼亚位于小亚细亚西岸，它比希腊其他地区更容易吸收巴比伦、埃及等古国积累下来的经验和文化。在伊奥尼亚，氏族贵族政治为商人的统治所代替，商人具有强烈的活动性，

有利于思想自由而大胆地发展。城邦内部的斗争，帮助摆脱传统信念在希腊没有特殊的祭司阶层，也没有必须遵守的教条，因此有相当程度的思想自由。这大大有助于科学和哲学从宗教分离开来。

米利都是伊奥尼亚的最大城市，也是泰勒斯的故乡，泰勒斯是公认的希腊哲学鼻祖。早年是一个商人，曾游访巴比伦、埃及等地，很快就学会古代流传下来的知识，并加以发扬。以后创立伊奥尼亚哲学学派，摆脱宗教，从自然现象中寻找真理，以水为万物的根源。

当时天文、数学和哲学是不可分的，泰勒斯同时也研究天文和数学。他曾预测一次日食，促使米太（在今黑海、里海之南）、吕底亚（今土耳其西部）两国停止战争，多数学者认为该次日食发生在公元前 585 年 5 月 28 日。他在埃及时曾利用日影及比例关系算出金字塔的高，使法老大为惊讶。

泰勒斯在数学方面的贡献是开始了命题的证明，它标志着人们对客观事物的认识从感性上升到理性，这在数学史上是一个不寻常的飞跃。伊奥尼亚学派的著名学者还有阿纳克西曼德和阿纳克西米尼等。他们对后来的毕达哥拉斯有很大的影响。

毕达哥拉斯公元前 580 年左右生于萨摩斯，为了

摆脱暴政，移居意大利半岛南部的克罗顿。在那里组织一个政治、宗教、哲学、数学合一的秘密团体。后来在政治斗争中遭到破坏，毕达哥拉斯被杀害，但他的学派还继续存在两个世纪之久。

毕达哥拉斯学派企图用数来解释一切，不仅仅认为万物都包含数，而且说万物都是数。他们以发现勾股定理(西方叫做毕达哥拉斯定理)闻名于世，又由此导致不可通约量的发现。

这个学派还有一个特点，就是将算术和几何紧密联系起来。他们找到用三个正整数表示直角三角形三边长的一种公式，又注意到从1起连续的奇数和必为平方数等等，这既是算术问题，又和几何有关，他们还发现五种正多面体。

伊奥尼亚学派和毕达哥拉斯学派有显著的不同。前者研习数学并不单纯为了哲学的兴趣，同时也为了实用。而后者却不注重实际应用，将数学和宗教联系起来，想通过数学去探索永恒的真理。

公元前五世纪，雅典成为人文荟萃的中心，人们崇尚公开的精神。在公开的讨论或辩论中，必须具有雄辩、修辞、哲学及数学等知识，于是“智人学派”应运而生。他们以教授文法、逻辑、数学、天文、修辞、雄辩等科目为业。在数学上，他们提出“三大问

题”：三等分任意角；倍立方，求作一立方体，使其体积是已知立方体的二倍；化圆为方，求作一正方形，使其面积等于一已知圆。这些问题的难处，是作图只许用直尺（没有刻度的尺）和圆规。

希腊人的兴趣并不在于图形的实际作出，而是在尺规的限制下从理论上去解决这些问题，这是几何学从实际应用向系统理论过渡所迈出的重要的一步。

这个学派的安提丰提出用“穷竭法”去解决化圆为方问题，这是近代极限理论的雏形。先作圆内接正方形，以后每次边数加倍，得 8、16、32、... 边形。安提丰深信“最后”的多边形与圆的“差”必会“穷竭”。这提供了求圆面积的近似方法，和中国的刘徽的割圆术思想不谋而合。

公元前三世纪，柏拉图在雅典建立学派，创办学园。他非常重视数学，但片面强调数学在训练智力方面的作用，而忽视其实用价值。他主张通过几何的学习培养逻辑思维能力，因为几何能给人以强烈的直观印象，将抽象的逻辑规律体现在具体的图形之中。

这个学派培养出不少数学家，如欧多克索斯就曾就学于柏拉图，他创立了比例论，是欧几里得的前驱。柏拉图的学生亚里士多德也是古代的大哲学家，是形式逻辑的奠基者。他的逻辑思想为日后将几何学整理

在严密的逻辑体系之中开辟了道路。

这个时期的希腊数学中心还有以芝诺为代表的埃利亚学派，他提出四个悖论，给学术界以极大的震动。这四个悖论是：

二分说，一物从甲地到乙地，永远不能到达。因为想从甲到乙，首先要通过道路的一半，但要通过这一半，必须先通过一半的一半，这样分下去，永无止境。结论是此物的运动被道路的无限分割阻碍着，根本不能前进一步；阿基琉斯(善跑英雄)追龟说，阿基琉斯追乌龟，永远追不上。因为当他追到乌龟的出发点时，龟已向前爬行了一段，他再追完这一段，龟又向前爬了一小段。这样永远重复下去，总也追不上；飞箭静止说，每一瞬间箭总在一个确定的位置上，因此它是不动的；运动场问题，芝诺论证了时间和它的一半相等。

以德谟克利特为代表的原子论学派，认为线段、面积和立体，是由许多不可再分的原子所构成。计算面积和体积，等于将这些原子集合起来。这种不甚严格的推理方法却是古代数学家发现新结果的重要线索。

公元前四世纪以后的希腊数学，逐渐脱离哲学和天文学，成为独立的学科。数学的历史于是进入一个

新阶段——初等数学时期。

这个时期的特点是，数学(主要是几何学)已建立起自己的理论体系，从以实验和观察为依据的经验科学过渡到演绎的科学。由少数几个原始命题(公理)出发，通过逻辑推理得到一系列的定理。这是希腊数学的基本精神。

在这一时期里，初等几何、算术初等代数大体已成为独立的科目。和 17 世纪出现的解析几何学、微积分学相比，这一个时期的研究内容可以用“初等数学”来概括，因此叫做初等数学时期。

埃及的亚历山大城，是东西海陆交通的枢纽，又经过托勒密王的加意经营，逐渐成为新的希腊文化中心，希腊本土这时已经退居次要地位。几何学最初萌芽于埃及，以后移植于伊奥尼亚，其次繁盛于意大利和雅典，最后又回到发源地。经过这一番培植，已达到丰茂成林的境地。

从公元前四世纪到公元前 146 年古希腊灭亡，罗马成为地中海区域的统治者为止，希腊数学以亚历山大为中心，达到它的全盛时期。这里有巨大的图书馆和浓厚的学术空气，各地学者云集在此进行教学和研究。其中成就最大的是亚历山大前期三大数学家欧几里得、阿基米德和阿波罗尼奥斯。

欧几里得的《几何原本》是一部划时代的著作。其伟大的历史意义在于它是用公理法建立起演绎体系的最早典范。过去所积累下来的数学知识，是零碎的、片断的，可以比作砖瓦木石；只有借助于逻辑方法，把这些知识组织起来，加以分类、比较，揭露彼此间的内在联系，整理在一个严密的系统之中，才能建成宏伟的大厦。《几何原本》体现了这种精神，它对整个数学的发展产生深远的影响。

阿基米德是物理学家兼数学家，他善于将抽象的理论和工程技术的具体应用结合起来，又在实践中洞察事物的本质，通过严格的论证，使经验事实上升为理论。他根据力学原理去探求解决面积和体积问题，已经包含积分学的初步思想。阿波罗尼奥斯的主要贡献是对圆锥曲线的深入研究。

除了三大数学家以外，埃拉托斯特尼的大地测量和以他为名的“素数筛子”也很出名。天文学家喜帕恰斯制作“弦表”，是三角学的先导。

公元前 146 年以后，在罗马统治下的亚历山大学者仍能继承前人的工作，不断有所发明。海伦(约公元 62)、门纳劳斯(约公元 100)、帕普斯等人都有重要贡献。天文学家托勒密将喜帕恰斯的工作加以整理发挥，奠定了三角学的基础。

晚期的希腊学者在算术和代数方面也颇有建树，代表人物有尼科马霍斯(约公元100)和丢番图(约250)前者是杰拉什(今约旦北部)地方的人。著有《算术入门》，后者的《算术》是讲数的理论的，而大部分内容可以归入代数的范围。它完全脱离了几何的形式，在希腊数学中独树一帜，对后世影响之大，仅次于《几何原本》。

公元325年，罗马帝国的君士坦丁大帝开始利用宗教作为统治的工具，把一切学术都置于基督教神学的控制之下。

公元529年，东罗马帝国皇帝查士·丁尼下令关闭雅典的柏拉图学园以及其他学校，严禁传授数学。许多希腊学者逃到叙利亚和波斯等地。数学研究受到沉重的打击。641年，亚历山大被阿拉伯人占领，图书馆再次被毁，希腊数学至此告一段落。

埃及古代数学

埃及是世界上文化发达最早的几个地区之一，位于尼罗河两岸，公元前3200年左右，形成一个统一的国家。尼罗河定期泛滥，淹没全部谷地，水退后，要重新丈量居民的耕地面积。由于这种需要，多年积累起来的测地知识便逐渐发展成为几何学。

公元前 2900 年以后，埃及人建造了许多金字塔，作为法老的坟墓。从金字塔的结构，可知当时埃及人已懂得不少天文和几何的知识。

例如基底直角的误差与底面正方形两边同正北的偏差都非常小。现今对古埃及数学的认识，主要根据两卷用僧侣文写成的纸草书；一卷藏在伦敦，叫做莱因德纸草书，一卷藏在莫斯科。

埃及最古老的文字是象形文字，后来演变成一种较简单的书写体，通常叫僧侣文。除了这两卷纸草书外，还有一些写在羊皮上或用象形文字刻在石碑上和木头上的史料，藏于世界各地。两卷纸草书的年代在公元前 1850 ~ 前 1650 年之间，相当于中国的夏代。

埃及很早就用十进记数法，但却不知道位值制，每一个较高的单位是用特殊的符号来表示的。例如 111，象形文字写成三个不同的字符，而不是将 1 重复三次。埃及算术主要是加法，而乘法是加法的重复。他们能解决一些一元一次方程的问题，并有等差、等比数列的初步知识。占特别重要地位的是分数算法，即把所有分数都化成单位分数（即分子是 1 的分数）的和。莱因德纸草书用很大的篇幅来记载 $2/N$ (N 从 5 到 101) 型的分数分解成单位分数的结果。为什么要这样分解以及用什么方法去分解，到现在还是一个谜。这

种繁杂的分数算法实际上阻碍了算术的进一步发展。

纸草书还给出圆面积的计算方法：将直径减去它的 $\frac{1}{9}$ 之后再平方。计算的结果相当于用 3、1605 作为圆周率，不过他们并没有圆周率这个概念。根据莫斯科纸草书，推测他们也许知道正四棱台体积的计算方法。总之，古代埃及人积累了一定的实践经验，但还没有上升为系统的理论。

欧洲中世纪数学

中世纪开始于公元 476 年西罗马帝国灭亡，约结束于 15 世纪。这一千年的历史大致可以分为两段。十一世纪之前常称为黑暗时代，这时西欧在基督教神学和烦琐哲学的教条统治下，人们失去了思想自由，生产墨守成规，技术进步缓慢，数学停滞不前。十一世纪以后情况稍有好转。

希腊文化通过罗马人传到中世纪的很少，这大部分体现在博伊西斯(约 480 ~ 524)的著作中。他的《算术原理》大体上是新毕达哥拉斯学派数学家尼科马霍斯《算术入门》的译本，但若干精采的命题均被删去。博伊西斯的《几何》取材于欧几里得《几何原本》，但却完全没有证明，因为他认为证明是多余的。

公元 529 年，东罗马帝国皇帝查士丁尼勒令关闭

雅典的学校，严禁研究和传播数学。数学发展再一次受到沉重的打击。此后数百年，值得称道的数学家屈指可数，而且多是神职人员。号称博学多才的比德是英国的僧侣学者，终生在修道院度过。他的本领是会算复活节（每年过春分月圆后的第一个星期日）的日期，和用手指来计算。稍后的阿尔昆也是著名的英国神学家。781年左右，接受查理曼大帝的聘请，到法兰克王国担任宫廷教师和顾问。他所编的算术书，现在看来是相当粗浅的。热尔贝原是兰斯的大主教，后被选为教皇，改名西尔威斯特二世。他热心提倡学术，对推动“四艺”（音乐、几何、算术、天文）的学习有一定的功劳。十字军远征（1096~1291）使欧洲人接触到阿拉伯国家所保有古代文化宝藏。

他们将大量的阿拉伯文书籍译成拉丁文。于是希腊、印度和阿拉伯人创造的文化，还有中国的四大发明便传到了欧洲。意大利地处东西方交通的要冲，逐渐成为新的经济和文化中心。

12、13世纪欧洲数学界的代表人物是斐波那契，他向欧洲人介绍了印度-阿拉伯数码和位值制记数法，以及各种算法在商业上的应用。

中国的盈不足术和《孙子算经》的不定方程解法也出现在斐波那契的书中。此外他还有很多独创性的

工作。

14 世纪的法国主教奥尔斯姆引入了分指数记法和坐标制的思想，后者是从天文、地理的经纬度到近代坐标几何的过渡。英国大主教布雷德沃丁的算术、几何、力学的著作影响也很大。欧洲第一本系统的三角学作者是雷格蒙塔努斯。

文艺复兴以后，人类摆脱了中世纪束缚思想的精神枷锁，迎接了一个新时代的到来。

中世纪开始于公元 476 年西罗马帝国灭亡，约结束于 15 世纪。这一千年的历史大致可以分为两段。十一世纪之前常称为黑暗时代，这时西欧在基督教神学和烦琐哲学的教条统治下，人们失去了思想自由，生产墨守成规，技术进步缓慢，数学停滞不前。十一世纪以后情况稍有好转。

希腊文化通过罗马人传到中世纪的很少，这大部分体现在博伊西斯(约 480 ~ 524)的著作中。他的《算术原理》大体上是新毕达哥拉斯学派数学家尼科马霍斯《算术入门》的译本，但若干精采的命题均被删去。博伊西斯的《几何》取材于欧几里得《几何原本》，但却完全没有证明，因为他认为证明是多余的。

公元 529 年，东罗马帝国皇帝查士丁尼勒令关闭雅典的学校，严禁研究和传播数学。数学发展再一次