中学实用参考手册

数学教与学

（三）

主编：卢炳瑞

延边大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

中学实用参考手册/卢炳瑞主编. —延吉:
延边大学出版社, 2004.11
ISBN 7-5634-2925-5
Ⅰ. 中… Ⅱ. 卢… Ⅲ. ①中学-教学
参考资料-丛书 Ⅳ. G633

中学实用参考手册·数学教与学(三)

作　　者：卢炳瑞
排版设计：盛世文化传播（北京）有限公司

出版发行：延边大学出版社
社　　址：延吉市公园街 105 号
邮政编码：133002

印　　刷：北京忠信诚印刷厂
开　　本：880×1230mm　1／32
总 印 张：575　字数：4 900 千字
版　　次：2004 年 11 月第一版
　　　　　2004 年 11 月第一次印刷
印　　数：1-1 000 册
书　　号：ISBN 7-5634-2925-5／G.026
总 定 价：1656.00　本册定价：18.00

目　录

◎ 分形——自然几何

一、欧氏几何的局限性

自公元前 3 世纪欧氏几何基本形成至今已有 2000 多年。尽管此间从数学的内在发展过程中产生了射影几何、微分几何等多种几何学，但与其他几何学相比，人们在生产、实践及科学研究中更多涉及到的是欧氏几何。欧氏几何的重要性可以从人类的文明史中得到证明。欧氏几何主要是基于中小尺度上，点线、面之间的关系。这种观念与特定时期人类的实践。认识水平是相适应的，数学的发展历史告诉我们，有什么样的认识水平就有什么样的几何学。当人们全神贯注于机械运动时，头脑中的图象多是一些圆锥曲线、线段组合，受认识主。客体的限制，欧氏几何具有很强的”人为“特征。这样说并非要否定欧氏几何的辉煌历史，只是我们应当认识到欧氏几何是人们认识、把握客观世界的一种工具、但不是唯一的工具。

进入 20 世纪以后，科学的发展极为迅速。特别是一战以后，大量的新理论、新技术以及新的研究领域不断涌现，同以往相比，人们对物质世界以及人类社会的看法有了很大的不同。其结果是，有些研究对象已经很难用欧氏几何来描述了，如对植物形态的描

述，对晶体裂痕的研究，等等。

美国数学家 B.Mandelbrot 曾出这样一个著名的问题：英格兰的海岸线到底有多长？这个问题在数学上可以理解为：用折线段拟合任意不规则的连续曲线是否一定有效？这个问题的提出实际上是对以欧氏几何为核心的传统几何的挑战，此外，在湍流的研究。自然画面的描述等方面，人们发现传统几何依然是无能为力的。人类认识领域的开拓呼唤产生一种新的能够更好地描述自然图形的几何学，在此，不妨称其为自然几何。

二、分形的产生

一些数学家在深入研究实、复分析过程中讨论了一类很特殊的集合，如 Cantor 集、Peano 曲线、KoCh 曲线等，这些在连续观念下的”病态“集合往往是以反例的形式出现在不同的场合。当时它们多被用于讨论定理条件的强弱性，其更深一层意义并没有被大多数人所认识。

1975 年，Mandelbrot 在其《自然界中的分形几何》一书中引入了分形（fractal)这一概念。从字面意义上讲，fractal 是碎块、碎片的意思，然而这并不能概括 Mandelbrot 的分形概念，尽管目前还没有一个让各方都满意的分形定义，但在数学上大家都认

为分形有以下凡个特点：

⑴具有无限精细的结构；

⑵比例自相似性；

⑶一般它的分数维大子它的拓扑维数；

⑷可以由非常简单的方法定义，并由递归、迭代产生等。

⑴⑵两项说明分形在结构上的内在规律性。自相似性是分形的灵魂，它使得分形的任何一个片段都包含了整个分形的信息。第⑶项说明了分形的复杂性，第⑷项则说明了分形的生成机制。五条曲线自下而上，按图中所示的规律逼近 Koch 曲线。Koch 曲线处处连续，但处处不可导，其长度为无穷大，以欧氏几何的眼光来看，这种曲线是被打入另类的，从逼近过程中每一条曲线的形态可以看出分形四条性质的种种表现。以分形的观念来考察前面提到的 ” 病态 “ 曲线，可以看出它们不过是各种分形。

我们把传统几何的代表欧氏几何与以分形为研究对象的分形几何作一比较，可以得到这样的结论：欧氏几何是建立在公理之上的逻辑体系。其研究的是在旋转、平移、对称变换下各种不变的量，如角度、长度、面积、体积，其适用范日主要是人造的物体。而分形的历史只有 20 来年，它由递归、迭代生成，

主要适用于自然界中形态复杂的物体。分形几何不再以分离的眼光看待分形中的点、线、面，而是把它看成一个整体。

三、自然几何观及其应用

平面上决定一条直线或圆锥曲线只需数个条件。那么决定一片蕨叶需要多少条件？如果把蕨叶看成是由线段拼合而成，那么确定这片蕨叶的条件数相当可观，然而当人们以分形的眼光来看这片蕨叶时，可以把它认为是一个简单的迭代函数系统的结果，而确定该系统所需的条件数相比之下要少得多。这说明用特定的分形拟合蕨叶比用折线拟合蕨叶更为有效。

分形观念的引入并非仅是一个描述手法上的改变，从根本上讲分形反映了自然界中某些规律性的东西，以植物为例，植物的生长是植物细胞按一定的遗传规律不断发育、分裂的过程，这种按规律分裂的过程可以近似地看做是递归、迭代过程，这与分形的产生极为相似。在此意义上，人们可以认为一种植物对应一个迭代函数系统，人们甚至可以通过改变该系统中的某些参数来模拟植物的变异过程。

分形几何还被用于海岸线的描绘及海图制作、地震预报、图象编码理论、信号处理等领域，并在这些领域内取得了个人注目的成绩。作为多个学科的交

叉，分形几何对以往欧氏几何不屑一顾（或说是无能为力）的”病态“曲线的全新解释是人类认识客体不断开拓的必然结果。当前，人们迫切需要一种能够更好地研究、描述各种复杂自然曲线的几何学：而分形几何恰好可以堪当此用。所以说，分形几何也就是自然几何，以分形或分形的组合的眼光来看待周围的物质世界就是自然几何观。

◎ 毕达哥拉斯

毕达哥拉斯（约公元前 580 年～500 年）, 古希腊哲学家、数学家、天文学家。他在意大利南部的克罗托内建立了一个政治、宗教、数学合一的秘密团体——毕达哥拉斯学派，他们很重视数学，企图用数学来解释一切，毕达哥拉斯本人以发现勾股定理（西方称毕达哥拉斯定理）而著名，其实这一定理早已为巴比伦人和中国人所知，但最早的证明可归功于毕达哥拉斯学派。

该学派还发现，若是奇数,则构成直角三角形的三边，其实我们所称的勾股数。该学派将自然数分为若干类：奇数、偶数、完全数（即等于它的包括 1 而不包括它本身的所有因数之和的数）亲和数、三角数（1、3、6、10……）、平方数（1、4、9、16……）、

五角数（1、5、12、22……）等，又发现从 1 起连续奇数的和必为平方数。

他们还发现了五种正多面体，在天文学和音乐理论上还有不少贡献，他的思想和学说对希腊文化有巨大影响。

◎ 布尔

布尔英国数学家及逻辑学家。18i5 年 11 月 2 日生于林肯：1864 年 12 月 8 日卒于爱尔兰的科克。

布尔是鞋匠之子，他完全靠自己的力量爬上去。他原想做牧师，但是他十六岁时在私立学校教数学，到 1835 年他自己开办一所学校。1849 年，（尽管他没有学位）他被任命为科克的女王学院的数学教授，从此他才有了比较安稳的生活保证。他一直在此学院度其余生。

布尔的大发现就是用一套符号来进行逻辑演算，大约二百年前莱布尼兹曾经摸索过一些。他通过仔细地选择/使这些符号及运算类似于代数的符号及运算。在布尔代数中，符号可以按照固定的规则来处理。而得出合乎逻辑的结果。布尔的前辈对是否进行这种研究一直犹豫不决。（它牵涉到改进亚里士多德的工作，而人们对于改进亚里士多德的工作的尝试总有点

犹豫不决。）然而布尔敢千这么于。1847 年他出版了这方面的第一本书，书并不厚）但足以使他出名而使科克的学院聘他任教。1854 年，他出版了《思维规律的研究》一书，其中完满地讨论了这个主题并奠定了现在所谓的符号逻辑的基础。

逻辑的数学化（好比亚里士多德把音乐数学化）并没有根快给当时的数学家留下印象。或许人们认为它只不过是错综复杂的文字游戏而已。然而，后来发现，符号逻辑对于建立数学的哲学是非常有用的（并且叹实是必不可少的)。尝试把数学建立在严格逻辑基础上（从欧几里得时起，已经整整二十一个世纪了，对于古人和一直到洛巴切夫斯基时代的追随者们，欧几里得似乎已经成功地完成这项任务）首先是弗雷格在进行，而怀特黑德和罗素使之达到顶峰：布尔代数就是用于这个目的。

布尔死于肺炎，这是由于他坚持上课而在十一月的冷雨中步行二英里淋湿后受凉而引起的。

◎ 帕斯卡

帕斯卡（Pasca1，Blaise）法国数学家和物理学家。1623 年 6 月 19 旧生于奥弗涅的克莱蒙费朗 ;1662 年 8 月 0 日卒于巴黎。

考虑到他的短命以及他生命的最后十年他完全献身于神学及内心的反省，值得庆幸的是，帕斯卡还是取得非常多的成就。他是个病弱的孩子，还在幼年时期就有一次人家认为他活不多久了。可是他在脑力方面是个神童。他的父亲是政府官吏，本人也是个数学家，自己亲自监督孩子的教育，并且决定让孩子首先学习古代语言，因此不让他接触任何数学书籍。当小帕斯卡问起几何学方面的‘问题时，就告诉他几何学是研究图形的，于是他自己进一步独立发现出欧几里得的前三十二条定理，而且顺序也完全正确。（这个故事是他妹妹讲出来的，似乎太妙了而不象是真有其事。）于是使人敬畏的父亲让步了，让孩子学习数学。

帕斯卡刚十六岁时，出版了一本论圆锥曲线的几何学的书，这本书第一次把十九个世纪之前阿波洛尼乌斯中所得到结果向前推进了一步。笛卡儿坚决不相信十六岁的孩子能够写出这种书来，帕斯卡反过来也不承吟笛卡儿的解析几何的价值。1642 年刚刚十丸岁时，帕斯卡发明了一种计算机，是用齿轮做成的，可以作加减法。他取得了专利权，并把一个模型送给皇家的学术保护人一瑞典女工克里斯蒂娜。他希望由此获利，但没有成功。因为要想造一台完全能够实用的

计算机大费钱了。但是，它却是最好的机械装置一近代的现金出纳机的祖先。

帕斯卡和律师兼数学家费马通信，他们一起解决某一个上流社会的赌徒兼业余哲学家送来的问题，他弄不清楚当他赌掷三个骰子出现某种组合时为什么老是输钱。在他们解决这个问题的过程中，他们奠定了近代概率论的基础。这 对于科学的发展有着不可估量的重要性，因为它使数学（以及整个世界）木再要求必须绝对肯定。人们开始幢得甚至从完全不确定的事物中也可以得出有用的及可靠的知识。掷一个硬币究竟正面或者反面朝上，在某一次特殊情形中是不能预见的。然而，进行大量的这种个别不能预见的试验以后，却可以相当可靠地得出掷硬币普遍性质的结论（正面朝上的次数与反面朝上的次数大致相等）。

帕斯卡还对托里拆利首创的大气的新观点感到兴趣。如果大气有重量，则重量随高度增加而减少，因为你的位置越高）在你上面的空气就越少。大气重量的减少可以用气压表测量出来。

帕斯卡有慢性病，消化不良，头痛（死后检查证明他的头颅骨变形），失眠不断地折磨着他，所以他想·自己不能够爬山。可是，在 1646 年，他送他的年轻力壮的姻兄弟带着两个气压计爬上多姆山（这山

靠近帕斯卡的出生地）坡。在大约一英里高处，水银柱降下三英寸。他又把这个实验重复了五遍、这就十分肯定地证实托里拆利的观点是正确的（尽管笛卡儿表示怀疑）。它还说明大气的上面是真空，这也否定了笛卡儿否认存在真空和整个空间充满物质的论点/帕斯卡还重复了托里拆利原来的实验，利用红酒代替水银。因为红酒比水更轻，帕斯卡用四十六英尺长的管以装上足够多的液体来平衡大气的重量。）在爬山的年代里，帕斯卡受到冉森教派（一个强烈反耶稣会的天主教教派）的影响。1654 年，有一次他的驾车的马惊跑，他几乎送命。他把这件事解释为神不悦的证据，于是他更坚决地改宗，这就促使他把短暂的受疾病折磨的余生献给沉思默想、禁欲主义及宗教著述，这些著作才华横溢使伏尔泰 ” 受到鼓舞，但是他除了 1658 年有一星期牙痛,他为了分心而研究并很快干净利落地解决一个几何问题外，他不再搞科学们数学了。在晚年，帕斯卡宣称理性对于了解物理的宇宙是不够的，这样就倒退到泰勒斯以前去了。

◎ 傅里叶

傅里叶生于法国中部欧塞尔一个裁缝家庭，8 岁时沦为孤儿，就读子地方军校，1795 年任巴黎综合工