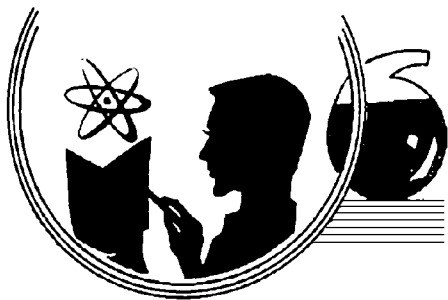


●世界课程改革与教学创新文库(第三辑)

学科课程改革与教学创新

数学教学中的数学能力培养方法

北京师联教育科学研究所 编



学苑音像出版社

责任编辑 冯克诚 王 军

封面设计 师联平面工作室

世界课程改革与教学创新文库

(第三辑)

学科课程改革与教学创新

数学教学中的数学能力培养方法

北京师联教育科学研究所 编



学苑音像出版社出版发行

2004年12月印刷

开本 850×1168 1/32 印张 228 字数 5925千字

ISBN 7-88050-122-3

全38册配碟发行638.40元(册均16.80元 不含碟)

本书如有印刷、装订错误,请与本社联系调换

目 录

学生数学能力研究的问题和目的陈述 ... [苏] M.A. 克鲁台特斯基(1)	
数学能力结构的一般问题 [苏] V·A·克鲁台特斯基(8)	
中小学生学习数学能力和个性心理学 [苏] B.A. 克鲁捷茨基(19)	
培养科学的思考习惯 Lester H. Lange(27)	
幼儿思维能力的发展与幼儿数学教育 (35)	
美国高中数学教材发展能力的特色 (45)	
数学气质方面的结构类型 [苏] B.A. 克鲁捷茨基(48)	
数学能力结构的年龄动态 [苏] B.A. 克鲁捷茨基(68)	
数学能力的性别差异 [苏] B.A. 克鲁捷茨基(83)	
美国中学生的数学态度 (86)	
数学能力与个性 [苏] B.A. 克鲁捷茨基(91)	
数学能力结构概要 :成分的相互关系 ... [苏] B.A. 克鲁捷茨基(98)	
估算技能的教学 [美] 罗伯特·E·雷斯(102)	
概括各种数学对象、关系和运算的能力 [苏] B.A. 克鲁捷茨基(106)	
简缩数学推理过程和相应的运算系统的能力 [苏] B.A. 克鲁捷茨基(140)	
数学解题心理过程的灵活性 [苏] B.A. 克鲁捷茨基(155)	
在解题中力求清晰、简洁和经济(“优美”) ..[苏] B.A. 克鲁捷茨基(165)	
数学推理中心理过程的可逆性 [苏] B.A. 克鲁捷茨基(170)	
关于数学运算感受器的假说 [苏] B.A. 克鲁捷茨基(176)	
美国数学教育培养学生创新能力 (180)	



学生数学能力研究的问题和目的陈述

[苏] V. A. 克鲁台特斯基

一、关于能力一般原理的几个问题

苏联心理学家的一般观点是：能力发展的决定性部分是属于社会历史的根源，它们是在各种活动、教育和训练中随生活而形成和发展的。

1. 能力的先天性与获得性

能力不可能是与生俱来的，只有能力的倾向——大脑和神经系统的某些解剖学和生理学素质——是与生俱在的。能力不是命定的，但也不能毫无根据地植入。倾向是使能力可以存在的必要的内在条件。但是，承认倾向有真实价值，不是意味着同意能力的发展是由内在品质所命定。倾向并不是潜在的能力，能力也不是发展了的倾向。

2. 倾向概念的含义

谈起能力的倾向，一般首先是指神经系统的类型学特性。这些特性对精神能力的专门作用还不很清楚，对此只能表示最一般的看法。

类型学品质是人们个性差异的本质基础。在这个基础上，出现各种暂时联结的高度错综复杂的系统，去反映外界的影响。这些联结形成的特性——它们形成的速率、强度，它们的易于分化——依赖于类型学品质。它们决定集中注意的强度，精神工作的能量。有人相信类型学特性造成精神活动过程的能动品质，并举以下例子支持



他的概念 我们关于乘法表的知识的基础 ,是一定的联结系统 ,在结构上对每个人都是相同的。但是 ,它们的功能(准确、迅速、强度)则依神经系统的特性而人各不相同。

但是 ,即使类型学特性可以看作是一般精神能力的倾向 ,而关于其作为特殊能力(如数学能力)的倾向的效验 ,却说不出什么确切的东西来。一些研究工作曾证实 ,与把神经系统描绘成一个整体的一般类型学特性相伴随 ,还有一些个别的特性 ,描述由大脑各种神经分析器和系统显示出的皮层各个区域的工作。与决定气质的一般类型学特性相对照 ,那些各别特性 ,在研究专门能力时可能有很大价值。我们也要把信号系统间的相关关系 ,看作关于显示一般和专门能力的倾向——虽然第二信号系统的专门生理机制尚待研究。分析器的内在特性几乎无疑是一些专门能力的倾向。最后 ,应当从大脑半球皮层结构的个人差别中寻找倾向。在这方面脑细胞结构的现代科学已给出信息。

3. 倾向与能力的关系

到底在能力的发展中倾向起哪些具体的作用呢?显然 ,必须分别看待倾向是作用于一般水平的能力还是杰出能力。例如 ,每个正常人有为发展掌握学校数学课程能力的足够的倾向 ,但不是每个人都有为发展到更高水平的、联系于科学创造性和新发现的数学能力的倾向。

如果我们认为人们的能力不同 ,只是由于他们的生活与培养的条件不同 ,似乎就不得不作出这样的结论 :罗巴切夫斯基之成为数学家 ,柴可夫斯基之成为作曲家 ,普希金之成为诗人 ,都只是由于他们生活与活动的环境。在另外的环境中会是完全不同的 :会出现数学家普希金和作曲家罗巴切夫斯基。然而 ,所有经验、实际生活 ,以及科学和艺术的权威代表们的意见 ,都证实另外的情形 :即使在任何人都处在具有理想的发展、教育和培养条件的社会中 ,人们在能力上也不会是等同的。这只能是因为存在着生来具有的条件 ,它们结合于



能力发展的程序中,还在一定的限度内决定其内容并影响其成就的水平。

4. 各种倾向的不同作用方式

我们相信关于各种倾向的作用问题,可以从考虑它们的不同的作用方式来解决。各种倾向当中有一些的确不能决定能力的内容或成就的水平,其价值仅限于提供能力发展程序的本源,使能力的发展简单化或复杂化。比方说,神经系统的类型学特性,可能属于这类倾向的范畴。另外一些倾向,虽然它们不能狭隘地、硬性决定能力的内容,但是对能力的发展方向显然有很大影响。属于这类倾向范畴的可能是分析器构造的一些特性,也可能是大脑皮层个别部分构造的一些特性。但是,对这些倾向来说,它们本身并不带有能力的种子的论点也是真实的。

只有这样来对待倾向才能解释以下的情形(1)在有系统地受教育、进行某种学习活动之前,在一些儿童中表现出能力的早期出现。(2)有些人对他们感兴趣的活动的花费了一生的精力,并未表现出特殊能力。(3)在显然不利的社会和家庭条件下儿童优越能力的出现。

5. 对能力一般原理的假设

这里,我们简单地陈述一些关于能力一般原理的假设,以便在此基础上建立我们的研究:

(1)能力总是针对着固定种类的活动,它们只在一个人的专门活动中存在。因此,只能在考察专门活动的基础上去分析研究。相应的,数学能力只存在于数学活动中,并从中表现出来。

(2)能力是个能动的概念,它不仅在活动中存在和表现出来,并且在这里面形成和发展。相应的,数学能力也只存在于能动状态,处于发展之中,它们是在数学活动中形成和发展的。

(3)在人们发展的特定时期,出现发展个别类型能力的最有利条件,而其中的某些能力只是短暂的或昙花一现的。发展某种能力的最优年龄时期叫做“灵敏期”。显然,也存在发展数学能力的最优



时期。

(4) 在一种活动中依靠多种能力的复合。同样, 数学活动能力的进展也不是单靠一种能力, 而是靠多种能力的复合。

(5) 活动中的高度成就, 可能是以能力的不同组合为条件。所以, 在原则上可以论及不同种类的能力, 包括数学能力。

(6) 由于在很大限度内一种能力的薄弱可由另一种能力来补偿, 所以, 虽有某种能力的缺欠仍可成功地完成某项活动。在更广泛的意义上解释补偿: 有用习惯或性格品质(忍耐、坚持) 来补偿某种能力缺欠的可能。对于数学能力也可能出现任何一种补偿。

(7) 关于一般和特殊才赋间相互关系问题是很复杂的, 在苏联心理学界尚未有结论性的解答。

二、基本概念

在表述我们将要考虑的能力的基本概念之前, 必须注意到数学能力可以在很不同的活动水平上表现出来。我们将从两方面来处理数学能力概念 (1) 创造性的(科学的) 能力——从事科学性的数学活动方面的能力, 它产生对人类文明有意义的新成果, 对社会有价值的产品。(2) 在校学习的能力——学习(听懂、掌握) 数学(学校的数学课程) 迅速而成功地掌握适当的信息和技能的能力。

心理学家和数学家一般都区别这两种水平, 称之为“对数学理论的理解”的水平和“对数学理论的发明”的水平, 或“复制性的”和“创造性的”数学能力。

1. 学习能力和创造能力

对于我们, 不把两种水平的区别看成是绝对的。在研究中小学生数学能力时, 我们的确要考虑学生的在校学习能力, 尤其是创造性的在校学习能力。如, 联系学校教育条件独立地、创造性地掌握数学, 独立地把不很复杂的数学问题定型化, 寻求解这类题目的途径和方法; 发现定理的证法, 独立归纳出公式等等。无疑所有这一切也是



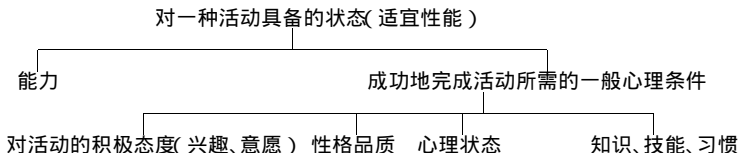
数学创造性的表现。如果创造性因素的存在是评价数学思考能力的固有标准,我们不要忘记数学创造性不仅是客观的,也是主观的。我们研究过一些儿童,他们确实自己“发现了”学校的代数和几何课的个别内容。这些结果没有客观价值,但对学生本身(在主观方面),无疑是一种发现、创造和独立成就。这样,我们可以肯定两种数学能力水平之间有确定的联系:透彻地、独立地和创造性地学习数学,是为发展进行创造性数学活动的能力——为独立地提出和解答新的具有社会价值内容的问题做必要的准备。因此,对中小学生数学能力的研究,是研究数学能力的较高级表现的路途上的第一步。

2. 能力和其他心理品质

学生完成数学活动的成效来自如下一些确定的品质的组合。

- (1)积极主动的态度,学习的意愿和兴趣,以至成为一种热烈的情绪。
- (2)几种个性品质:勤奋活跃,自我调节,目的明确,独立性和坚毅性;稳定的智能快感(从紧张的精神劳动而得到满足的情感,创造和发现中的欢快等等)。
- (3)在活动中存在有利于完成它的心理条件,诸如受到鼓励,精神集中,积极的“心理状态”等。
- (4)在相应的领域中有一定的知识、技能和习惯。
- (5)符合给定的活动要求的感觉和精神领域中确定的个性心理特征。

数学能力本身只是以上结构中的第(5)组品质,最好把其它各组看作是对任何活动都有利的一般因素。至于上述品质的全部,个性品质的综合性“整体”,由于它比能力的概念更为广大,我们宁愿称它为对一种活动的“适宜性能”或“具备状态”(Suitability or readiness),它可以模式化地表示如下:





3. 数学学习能力的定义

谈到学习数学的能力,意思是:满足学校数学活动并(在所有其它条件相同的情况下)影响对数学(作为对学校的学科)的创造性掌握的成效——特别是对数学知识、技能和习惯的迅速、轻易和透彻掌握的个性心理特征(心理活动的初始特征)。数学能力概念的特有内容,当我们分析结构时,将在后面展示出来。

我们应当强调,能力包括心理程序的个别内容——知觉、注意、记忆、想象、思考等等,不要认为能力永远是脱离其它范畴的特性。当年,契瑞恩科曾攻击有人代替具有准确含意的能力而去研究视觉记忆、知觉以及其它等等的个性差异。但是,视觉记忆确是一种艺术能力。同样,我们也拒绝任何说我们不是在研究数学能力而是在研究数学活动过程中表现出来的知觉、思维、记忆和想象方面的个性差异。恰当地说,在多数情况下,对种种专门能力的研究,是通过分解其成为心理程序的个别特征——感觉、知觉、思维、记忆、想象的基本成分(或特殊能力)来进行的。但无论如何,也不能把所有的能力成分都归结为心理程序的个别特性,还有更复合的心理品质来构成能力,以符合于定型活动所发展的特殊形态。种种能力固然是在一定心理程序特性的基础上形成,但是它们还包含情感意志特性和态度的因素——它们有个人特色。

三、研究的问题和目的

对数学能力问题的科学研究的基本目的,应导向创造生动的能力教育的心理学基础。研究中小学生学习数学能力的一般问题,引向以下的专门目的和任务:

1. 研究能力这种复合心理现象的途径,首要的是分析它的结构,分离它的成分。
2. 研究数学才赋的实验方法。这可能有独立的价值。
3. 在确认数学才赋表现出的创造性之后,研究显示能力结构的



类型学差异。

4. 考虑到中小学生学习数学能力表现的年龄差异。我们要努力刻画出数学能力成分发展的年龄动态,从它们在初级学校年龄时的最基本表现到高年级时的更复合而又有独特差异的形式,观察它们发展的基本阶段。

至于对促使数学能力形成和有目的的发展的条件的研究,将是我们以后专门研究的课题。

(张士充 译)

数学能力结构的一般问题

[苏]V·A·克鲁台特斯基

一、结构总纲,成分间的相互关系

根据我们所收集的实验和非实验材料,以及对有关文献的研究,可以列出一个关于中小学生数学能力结构的一般提纲(象以前一样,仍按解题的基本阶段来考虑它)。

1. 获取、运用和保存信息的能力

(1) 获取数学信息:

为明确题目的形式结构所必要的,对数学材料进行定式化(即从素材看明题型)的觉察能力。

(2) 运用数学信息:

A. 关于数量和空间关系,数字和字母记号的逻辑思维能力;用数学记号进行思考的能力。

B. 对数学目标、关系和运算的迅速而广阔的概括能力。

C. 裁短推理程序和相应运算系统的能力,用裁短的结构去思考的能力。

D. 在数学活动中心理程序的灵活性。

E. 解题力求清楚、简单、经济、合理。

F. 迅速而自由地改组心理程序,从正向思串转向逆向思串的能力(在数学推理中心理程序的可逆性)。

(3) 保存数学信息:

数学记忆(对数学关系、类型特征、论述和证明的模式、解题方法



和途径的原理等的记忆)。

(4) 数学脑型, 一般综合成分:

这些成分是密切相关、相互影响的, 并且它们集成单一的整体系统, 一个数学才赋的单独的综合特征, 数学脑型。

2. 不必列入结构提纲的能力

还有一些成分(虽然有用) 其存在并不为结构所必需, 就不包括在数学才赋的结构之内; 它们对数学才赋来说是中性的。但是, 它们的存在与否(更准确地说, 发展程度) 却会决定数学脑型的种类。以下成分不是数学才赋结构所必需的。

(1) 心理程序的敏捷是一种非关键性的品质。数学家可能反应得很审慎, 甚至很缓慢, 但很透辟和精彩。

(2) 计算能力(迅速准确的计算能力, 常是心算) 我们知道有人能作复杂的心算, 但不会解任何较复杂的题目。

(3) 对记号、数字和公式的一种记忆, 很多出色的数学家没有这类的记忆能力。

(4) 空间想象能力。

(5) 使抽象的数学联系和相依关系直观化的能力。

必须强调, 我们的数学能力结构提纲是关于中小学生的数学能力的, 在进一步研究之前, 我们不能说在什么程度上, 它可以被看成数学能力结构的一般提纲——在什么程度上也适用于完满发展的, 有才能的数学家。

3. 概括、裁短和灵活

若对数学才赋结构提纲进行分析就会注意到, 描述数学活动在知觉、理解、记忆等方面的某些特性, 有着一般的准则。例如, 对于一个题目的定式化知觉活动, 是概括了的、裁短了的和灵活的知觉活动, 数学记忆, 是对概括了的、裁短了的灵活的体系的记忆。如果我们说对一个题目的诸条件的定式的(概括的) 觉察, 我们也能说定式的(概括的) 解法和定式的(概括的) 记忆。所以, 前面关于结构的详

细提纲,可以用另一个非常简短的公式来表示:数学才赋可用在数学关系、数字和字母记号领域内的、定式的、裁短的和灵活的思考,以及数学脑型来表征。这种数学思考特性,产生了运用数学信息的加速(它联系于经由概括和裁短,运用小量信息代替了大量信息),并伴随着神经和心理功能的节省。若用联想原理的词汇,可以这样说:数学能力是运用数学材料去形成关于它们的概括的、裁短的、灵活的与可逆的联想和系统的能力。这种能力以不同等级表现于有能力的、一般的,与能力较差的学生中。在一般情况下,对有能力的学生,用最少量的练习可以使这些联想很快形成。在能力差的学生中,它们的形成却是极端困难的。对一般学生,形成这些联想的必要条件是有一套特别组织好的练习和训练。

4. 研究个别成分的重要性

在对数学能力进行初步分析并对其结构作了说明后,透彻地研究每一个成分,深入其本质,解释其心理基础,具有本质的重要性。

如上面曾经指出的,结构成分间是密切相关的,有些成分是联系得那么紧密,以致有些研究者认为,可以设想它们是同一特性的几种表现。例如,罗宾斯坦在他的一本著作里曾写到裁短是概括和分析间相关联的派生表现。心理程序变得越裁短,越能对已发展的和正在迅速发展的概括起作用。P·A·西瓦瑞夫也相信裁短性来自概括性——概括的联想也是裁短的联想。A·M·马提尤斯基持同样观点,相信当概括程序达到更透辟后,详细的运算就转变为新形式——一种简短的运算形式。

这些看法都是正确的。但是,如果一个是从一个而来,由另一个决定,并不意味着它们之间可以划等号。我们觉得,如果一个成分(裁短性)是另一个成分(概括性)所派生,它们应被看作是两个成分,因为它们是完全不同的心理表征。完全可能,所有其他成分都是在一个原始发展了的成分——概括能力和数学脑型——的基础上形成的。但是,在那种情形,应论及数学脑型的不同成分,而不能把它们



都归于概括能力和数学脑型。

二、数学能力的特殊性问题

问题产生了,我们所选的成分必然是特别的数学成分吗?它们会不会都是一般能力,而数学仅是它们的一个好的表现场地呢?我们试针对这种观点来考察在数学才赋结构中所选的基本能力之一——对数学事物、关系和运算的概括能力。

当然,概括能力就其本性来说是一种一般能力。如罗宾斯坦指出的,把概括能力理解为,是所有能力的本质成分也是成立的,因为能力作为个性的特征,必须找到允许从一种情况转移到另一情况,一种材料转移到另一材料的作用的表征。但是这里要谈的不是一般的概括能力,而是概括用数字和字母符号表示的数值和空间关系的能力。

1. 关于特殊性的论据——来自征询和调研

怎样为“概括数学材料的能力是一种特殊能力”的这一观点来辩护呢?首先指出这种能力是表现在一个特定的范围,而不能在其他领域得到具有相关关系的表现。许多数学家和非数学家的传记材料和专家们的意见,特别是我们征询过的数学研究工作者的意见,都证实这一点。M·A·拉夫兰捷夫院士强调:“在我生活中一次又一次地遇到一些人,他们在某一领域中很有能力,但在另外的领域却缺少才赋。可能这种对照在与我很接近的科学——数学上有显著能力的那些人中表现得最尖锐。”换句话说,一位杰出的数学家可能在别的领域中缺少才赋。数学家彭加勒和莫尔德克哈-波里托夫斯基曾认为,数学能力的特殊性,使得不是所有的人都是适合学数学的。换句话说,一个人有一般的才干,不一定有数学才赋。D·I·门德里耶夫在学校里对数学和物理取得很大成功,但是在语言科目却常得零分和1分。

其次,可举出一整串国外研究工作者,都曾指出(虽然只是由测

验方法,和由相关关系与因素分析来证实),在智力分数(众所周知,概括能力是一般智力的最重要品质之一)和数学测验成绩之间只有微弱的相关关系。J·W·盖特泽勒、P·W·杰克逊和I·佛里西尔也证实,在一般心理才赋和个别领域中的创造性之间缺少重合。依照B·R·伯金罕的素材,智力测验表示出与历史和英语有最高相关关系,和数学有最低相关关系。

第三,为证实我们的论点,可以参考学生在校的成绩。许多教师指出,一种迅速而透彻的概括能力可以在一个科目中表现出来,但不能说明该生在其他科目中的工作。一些我们的被测者表现出,例如,在数学中有准确的概括能力,但在艺学、历史、地理方面却没有这种能力。相反的情况也曾出现。

校内分数可以大略地描述学生的能力。为此,在1964-65学年,研究了莫斯科一些学校的1 086个6到11年级(32个班)的学生的学年分数。这些是来自有不同数学教学水平的学校。我们感兴趣地看到数学和非数学分数极端不一致的情况。我们把总的素材用下表列出。

数学和他科分数不一致的学生分布

年级	学生分布	数学进展好 他科差得多	数学进展差 他科好得多
6	64	0	2
7	168	10	8
8	336	12	19
9	270	9	11
10	186	3	16
11	62	3	4
总计	1 086	37(3.4%)	60(5.5%)

西皮罗在研究他的九年级学生时,在他科教师的帮功下,按学生



在数学、物理和文学(选取了“最近于”和“最远离”数学的两科)方面的能力分组,在30个学生中,只有16个数学和文学在一组里,23个数学和物理在同一组里,12个三科在同一组里。学生各科能力间相关系数是:数学-物理 0.75,数学-文学 0.49,物理-文学 0.21。

2. 关于特殊性的论据——来自实验

第四、把解数学题目的测验和解非数学题目的测验的结果两相比较,对维护我们的观点很有意义。

第一个这种比较是根据一种测验作的,在给出一个需要改组心理程序的数学测验的同时,也给出一个在非数学活动中改组心理程序的测验——用一个“校读表”进行操作。实验结果表明这两种活动成效间没有什么相关关系。第二个比较得到更有意义的素材。在这个测验系列中,关于非数学概括能力的测验联系于人工概念的形成,它曾引起学生的兴趣。24个有能力的学生作完这个系列的题目。在平均分数的基础上,算出所有24个学生的等级。我们考察研究数学概括能力的一些系列中的组间相关关系矩阵,选取两对系列——一对是表现出最小相关关系的,另一对则是有最大相关关系的。于是把非数学“移植”进每对系列,计算这些系列的结果之间(24个被测者的)等级相关系数。这样,我们得到两个三级组间相关矩阵:一个包含关于概括非数学材料的系列和两个彼此相关很小的概括数学材料的系列;另外一个,包含同一个非数学材料系列和两个彼此相关很大的概括数学材料的系列。这样做,是在等级上估价非数学系列在两个互相“远离”的数学系列以及两个相互“接近”的数学系列间的地位。

经过统计分析表明,在第一种情形,三系列在共同因素(一般概括能力)上具有显著的保证。一般(共同)因素出现在所有三系列中(虽然不是十分清楚的表现出来)。在第二种情形,两个“最接近”的系列在共同因素上有很高的保证,而非数学系列虽然也有显著保证,但显然落后。由数表可以确定地作出如下解释:一般因素(一般概括