

教育部师范教育司组织评审

数学教学理论选讲

主 编 唐瑞芬

副主编 朱成杰

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学教学理论选讲/唐瑞芬主编. —上海:华东师范大学出版社,2000

全国中小学教师继续教育数学专业教材

ISBN 7-5617-2460-8

I. 数... II. 唐... III. 数学课-教学理论-中小学-师资培训-教材 IV. G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 80668 号

数学教学理论选讲

主 编 唐瑞芬

策划编辑 倪 明

责任编辑 戎甘润

封面设计 黄惠敏

版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社

发行部 电话 021-62571961

传真 021-62860410

<http://www.hdsdbook.com.cn>

社 址 上海市中山北路 3663 号

邮编 200062

印 刷 者 昆山市亭林印刷总厂

开 本 890×1240 32 开

印 张 8

字 数 220 千字

版 次 2001 年 1 月第一版

印 次 2001 年 1 月第一次

印 数 8000

书 号 ISBN 7-5617-2460-8/G·1145

定 价 11.00 元

出 版 人 朱杰人

前 言

全面推进素质教育,是当前我国现代化建设的一项紧迫任务,是我国教育事业的一场深刻变革,是教育思想和人才培养模式的重大进步。实施“中小学教师继续教育工程”,提高教师素质,是全面推进素质教育的根本保证。

开展中小学教师继续教育,课程教材建设是关键。当务之急是设计一系列适合中小学各学科教师继续教育急需的示范性课程,编写一批继续教育教材。在教材编写方面,我们采取了以下几种做法:

(1) 组织专家对全国各省(区、市)推荐的中小学教师继续教育教材进行评审,筛选出了 200 余种可供教师学习使用的优秀教材和学习参考书;

(2) 组织专门的编写队伍,编写了 61 种教材,包括中小学思想政治、教育法规、教育理论、教育技术等公共必修课教材;小学语文、数学,中学英语、物理、化学、生物,小学社会、自然等学科专业教材。上述教材,已经在 1999 年底以《全国中小学教师继续教育 1999 年推荐用书目录》(教师司[1999]60 号)的形式向全国推荐。

(3) 向全国 40 余家出版社进行招标,组织有关专家对出版社投标的教材编写大纲进行认真的评审和筛选,初步确定了 200 余种中小学教师继续教育教材,这批教材,目前正在编写过程中,将于 2001 年上半年陆续出版。我们将陆续向全国教师进修院校、教师培训基地和中小学教师推荐,供开设中小学教师继续教育相关课程时选用。

在选择、设计和编写中小学教师继续教育教材过程中,我们遵循了以下原则:

1. 从教师可持续发展和终身学习的战略高度,在课程体系中,

加强了反映现代教育思想、现代科学技术发展和应用的课程。

2. 将教育理论和教师教育实践经验密切结合,用现代教育理论和方法、优秀课堂教学范例,从理论和实践两个方面,总结教学经验,帮助教师提高实施素质教育的能力和水平。

3. 强调教材内容的科学性、先进性、针对性和实效性,并兼顾几方面的高度统一,从教师的实际需要出发,提高培训质量。

4. 注意反映基础教育课程改革的新思想和新要求,以使教师尽快适应改革的需要。

中小学教师继续教育教材建设是一项系统工程,尚处在起步阶段,缺乏足够的经验,肯定存在许多问题。各地在使用教材的过程中,有什么问题和建议,请及时告诉我们,以便改进工作,不断加强和完善中小学教师继续教育教材体系建设。

教育部师范教育司

二〇〇〇年十一月一日

编 者 的 话

《数学教学理论选讲》是由国家教育部师范教育司组织专家审定立项,以部级项目正式下达的课程教材,供全国中学数学教师继续教育使用。

近 20 年来,数学教育研究蓬勃发展。本教材期望能在总结和传播国内外数学教学理论新成果方面做一些工作,但考虑到数学教学理论尚处于成长时期,我们的视野也有一定的限制,因此采用了“选讲”的编写方式,不追求体系的全面和完整。我们还希望能将数学教学理论与课堂教学实践更好地结合起来,因此在介绍数学教学理论的同时,也对这些理论在实施过程中的经验和存在问题,进行了一些初步的概括和总结,并附了一些教学案例,供读者研究和讨论。

本教材在编写过程中,张奠宙教授、苏式冬教授、顾泠沅教授、王尚志教授等提供了许多宝贵的意见和建议,特此表示衷心的感谢。

本书由唐瑞芬任主编,朱成杰任副主编;唐瑞芬编写绪言、第一章,王继延编写第二章、第五章第三节,朱成杰编写第三章和第五章第一节、第二节,赵小平编写第四章第二节、第三节,徐克明编写第四章第一节、第四节。全书由唐瑞芬、朱成杰统稿。

为了写好本书,我们付出了辛勤的劳动,但囿于水平,不当之处依然难免,恳切期盼广大专家、同行和读者赐教。

编 者

2000 年 11 月于上海

目 录

绪 言	1
第一节 数学教学理论的研究对象	1
第二节 数学观与数学教学观	3
一、数学是什么?	3
二、树立正确的数学观	5
三、建立现代的数学教学观	8
参考文献	11
第一章 现代数学教学理论概述	13
第一节 “现实数学”原则	15
一、现实的数学	15
二、每个人的“数学现实”	16
三、一些具体的例子	18
第二节 “数学化”思想	22
一、“数学化”的含义	22
二、“数学化”的结构与成分	24
三、实现“数学化”过程的数学教学理论	28
四、数学化的实例	31
第三节 “再创造”原理	35
一、“再创造”的依据	35
二、有指导的“再创造”	36
三、怎样指导“再创造”?	38
第四节 “初等化”理论	42

一、“初等化”的理解	42
二、影响“初等化”的基本因素	43
三、关于“初等化”的一些设想	47
第五节 建构主义的数学教学理论	48
一、发生认识论与建构主义观点	48
二、建构主义的数学学习观	50
三、建构主义的数学教学观	54
第六节 我国数学教学改革中的一些观念与经验	58
一、加强基础知识与基本技能的训练	58
二、“熟能生巧”	61
三、青浦经验	63
参考文献	66
第二章 数学课堂教学中的人际关系	68
第一节 数学课堂中教师与学生的地位与作用	69
一、教师与学生的地位	69
二、教师的作用	71
三、学生的作用	78
第二节 数学课堂中师生群体的相互作用	82
一、教师与学生的相互作用	82
二、学生群体的相互作用	87
第三节 小组活动的学习情境	88
一、在解决问题过程中的社会认知冲突	88
二、在解决问题过程中的合作	90
三、影响小组活动结果的因素	92
参考文献	94
第三章 数学课堂教学策略	95
第一节 “掌握学习”教学策略	95
一、“掌握学习”的理论框架	95

二、“掌握学习”在数学教学中的应用	99
三、对“掌握学习”的反思	103
附录：“等差数列”教学目标	105
第二节 “发现学习”教学策略	108
一、“发现学习”的理论基础	108
二、“发现学习”在数学教学中的运用	111
三、“发现学习”的利与弊	116
附录：“发现学习”教学案例	117
第三节 “再创造”教学策略	122
一、“再创造”的理论基础	122
二、“再创造”在课堂教学中的实施	123
三、对“再创造”的思考	126
附录：“再创造”教学案例	128
第四节 活动式教学策略	130
一、活动式教学概述	130
二、活动式教学设计集锦	132
第五节 演练式教学策略	134
一、演练式教学概述	134
二、演练式教学与中国教育古训	135
参考文献	137
第四章 差异教学理论	139
第一节 对数学后进生的教学	139
一、数学后进生	139
二、数学后进生的认知特点	141
三、对数学后进生的教学策略	145
附录：智力型差生转化个案	153
第二节 对数学优秀学生的教学	160
一、数学优秀学生	160
二、数学优秀学生的特点	161

三、对数学优秀学生的数学教学	164
四、数学优秀生的课外活动内容举例	166
附录:优秀生教学研究案例	171
第三节 男女生数学学习的差异研究	172
一、数学教育中性别差异的表现	173
二、数学学习中男女生差异的研究	174
三、学校教育中要缩小男女生的差异	177
第四节 课堂教学如何面对差异	178
一、差异不可避免	178
二、数学课堂教学如何面对差异	179
附录:数学课堂教学如何面对差异的教学案例	184
参考文献	188
第五章 数学教学中的若干热点问题	189
第一节 数学问题解决	189
一、“问题解决”的缘起	189
二、“问题解决”的教学	191
三、数学问题举例	193
四、“问题解决”的局限性	201
附录:“问题解决”教学案例	202
第二节 创造性思维培养	206
一、知识经济呼唤创造性人才	206
二、创造性思维的特点	207
三、数学教学中的创造性思维培养	210
附录:创造性思维培养教学案例	224
第三节 数学教学与现代技术	226
一、现代技术对数学教学的影响	226
二、现代技术在数学教学中的应用	232
附课件	244
参考文献	246

第一节 数学教学理论的研究对象

自 20 世纪初国际数学教育委员会(ICMI)开展工作以来,不少数学家、心理学家、教育科学家、数学教育工作者和数学教师都在数学的教与学领域内进行着科学研究,只是许多研究工作都是独自在进行,缺少交流,尤其是国际间的交流,因而也很少有人认为自己所从事的领域是独立于数学、独立于教育科学的另一门科学。

与其他学科相比,数学教学理论确实很年轻,正处于形成发展的过程中,有关它的研究对象、研究方法以及评价其理论是否有效的标准等一系列问题都尚未达成共识,必然呈现多元性。但可以肯定的一点是:数学教学理论应该是一般教学理论在数学教学这一特殊领域中的应用,只是不能简单地把它等同于一般教学理论再加上一些数学例子的凑合;数学教学理论应该是在充分认识与理解教学理论和数学教学这两个领域的内涵实质的基础上,相互渗透、相互促进,由此综合而生成的结果。

数学教学理论必然具有自身特有的规律,也必然具有自己独特的研究课题、研究方法和具体实践的独立范畴,从而形成自身特有的结构与体系。它是自然科学与社会科学的结合,是典型的演绎体系与错综复杂的社会现象的交叉,再加上多方面难以预想的制约因素的介入;从而人们所关心的就不仅是这一人类活动的结果,还包括活动本身,涉及数学教学活动的整个过程;很多问题难以预先设计与制定,而必须在过程中得到解决。

本书的目的就是试图揭示数学教学的基本规律,从理论和实践

的不同侧面探讨数学教学的基本原理。但又必须指出的是：这毕竟是初步的尝试，很多问题的认识与理解还有待于广大的数学教师与数学教育工作者共同参与、共同探讨与研究，我们期盼着符合中国国情的数学教学理论的成长与发展。

按照传统的理解，数学教学是指由数学的教和学两方面组成的活动，并且两者是不可分割的，因而数学教学理论的研究必然与数学、教师和学生这三个对象都有着密切的联系。其中心问题应该包括：教师怎样教数学？学生如何学数学？以及数学教学中涉及的数学内容又是哪一些？等等。但是为了进一步揭示数学教学的本质，更深入地理解数学教学的意义，也为了便于有针对性地讨论问题，我们这里所涉及的数学教学理论将以教学的一种规定性定义为依据，即教学是指教师引起、维持以及促进学生学习的所有行为。因而我们讨论的侧重点将是数学教师如何教数学，而不是学生如何学数学；尤其集中讨论的是有关数学课堂教学的理论、策略与实施。希望就与数学课堂教学关系比较密切的一些课题，如数学教学内容的准备，数学教学过程的实施，数学课堂教学中教师与学生的相互影响，数学课堂教学中教师所采用的各种措施和策略，数学教师如何对待具有不同的数学接受能力的学生群体等等，进行一些考察、分析与研究，以期数学教师能对数学教学理论的研究内容，由初步的了解引起深入的反思，并进而对数学教学的实践产生促进作用。

值得指出的一个重要观念是：数学教学理论是关于人类活动的一个应用领域，它与工程学、（应用）心理学和医学一样，科学研究和（建设性）实践之间的界限可以说是模糊的。数学教学理论面临着相应的社会问题，那就是数学教育，它涉及许多实际的问题，需要使用各种方法进行建设性的工作，必须努力将这些实践活动合理化，甚至有必要加深对理论和方法论的反思，以便对实际问题有更深入的认识；无论就教师的观念和课堂里的相互影响而言，都反映出数学教学理论这一动态的特点。

这里还想指出的是，真正对数学教学实践产生影响的是数学教师自己头脑中拥有的那种“数学教学理论”；这种“数学教学理论”是

数学教师自己经过学习和亲身体验而产生的。这儿介绍的数学教学理论不可能对数学教师的教学实践产生直接的影响,只有在数学教师自觉地理解和思考这些有关数学教学理论的基础上,借以形成自身内在的“数学教学理论”的概念结构或思维方式,并转化为自己的信念,指导实际的行动,那才达到了运用数学教学理论以指导和改造数学教学实践的目标。正是基于这样的思考,我们更多地采用呈现多种不同的解释、框架和思维形态的开放性的陈述,以便促使数学教师结合自身的教学实践,进行深入的反思,而建构起自身内在的相应的数学教学理论,并在亲自经历的数学教学实践过程中,继续不断地探索和反思,以进一步丰富数学教学理论与实践的宝藏。

第二节 数学观与数学教学观

数学教学理论是关于数学教学即数学教师行为的理论,而数学教师在数学教学过程中的所作所为,则取决于数学教师的基本观念,取决于数学教师对数学与数学教学的基本看法、信念与态度;因此,数学教师必须逐步形成正确的数学观与现代的数学教学观,才能不断提高实施素质教育的能力,有目的地、自觉地进行数学教学实践。

一、数学是什么?

“数学是什么”这一问题对于从事数学教育事业的数学教师来说,显然是个十分重要的问题;也许我们并未对此问题有意识地进行过认真的思考,甚至不一定能作出明确的回答,但在我们的实际工作中,却必然自觉或不自觉地以某种观念指导着具体的行动,从而也影响了数学教学的实践与效果。

在不同的历史时期,随着数学本身的发展与人们对数学的认识的深入,对“数学是什么”这一问题有着各种很不相同、很不一致的论述。例如,古代中国就认为数学是术,是用来解决生产与生活问题的计算方法;而古希腊则认为数学是理念,是关于世界本质的学问,数

学对象是一种不依赖于人类思维的客观存在,但可以通过亲身体验,借助实验、观察和抽象获得有关的知识。有的主张数学是一个公理体系,由基本概念、基本关系与公理出发,可以严格地、逻辑地导出所有的结论;也有的声称数学是结构的科学,其任务就是在许多不同的背景下,以精确的和客观的形式,系统地分析共同的和基本的结构特征。

由于观察与思考问题的角度不同,人们又对数学的特征作了各种不同的描述。从数学的源泉及其与现实世界的关系来看,恩格斯(F. Engels)断言,数学是关于现实世界的空间形式和数量关系的科学,所以是非常现实的材料。弗赖登塔尔(H. Freudenthal)认为,数学的概念、结构与思想都是物理世界、社会存在与思维世界各种具体现象的反映,也是组织这些现象的工具,因而数学在现实世界中有它的现象学基础。柯尔莫哥洛夫(А. Н. Колмогоров)也提出,数学的研究对象产生于现实,但数学又必须离开现实(抽象),由于数学内容不断丰富,应用范围无限扩大,因而并非完全脱离现实;他同时又主张,所有数学的基础是纯集合论,数学的各专门分支研究各种特殊的结构,每一种结构由相应的公理体系所确定。

从数学的研究方法来分析,人们对数学的认识又有了更大的分歧。有人认为,数学全然不涉及观察、归纳、因果等方法;对人进行的训练,全都是利用演绎方法;数学家工作的起点,只需要少数公理,一见就懂,无需证明,而其余的工作则都可以由此而推演出来。与此相对的看法则是,解决数学问题常常必须借助于新定理、新见解、新方法;在具体解决问题和从事研究的过程中,常常要进行观察和比较。在这其中,归纳法是十分常用的,而且需要依赖实际经验;数学家的工作,都离不开观察、推测、归纳、实验、经验、因果等方法。甚至认为,数学家还需要有高度的直觉和想象力,直觉比以往任何时候都更加成为数学发现的创造性源泉。更有人声称,数学是证明与反驳的交互过程,认为数学从来不是严谨的。随着时代的发展与研究的深入,对“数学是什么”这一问题的回答,可以列举出很多种说法:

“数学是模式的科学。”

“数学是科学，数学更是一门创造性的艺术。”

“数学是科学，数学也是一门技术。”

“数学是一种语言。”

“数学是一种文化。”

这正好反映了数学是一个多元的综合产物，不能简单地将数学等同于命题和公式汇集的逻辑体系。数学通过模式的构建与现实世界密切联系，但又借助抽象的方法，强调思维形式的探讨；现代技术渗透于数学之中，成为数学的实质性内涵，但抽象的数学思维仍然是一种创造性的活动；数学其实是一种特殊的语言，由此形成的思维方式，不仅决定了人类对物质世界的认识方式，还对人类理性精神的发展具有重要的影响，因而必然成为人类文化的一个重要组成成分。

综上所述，如果从哲学的根本观点上来刻画数学的本质，不外乎以下两种不同的看法：一种是动态的，将数学描述为处于成长发展中因而是不断变化的研究领域；另一种则是静态的，将数学定义为具有一整套已知的、确定的概念、原理和技能的体系。斯蒂恩（L. A. Steen）的一段比喻可以为此作注解：

“许多受过教育的人，特别是科学家和工程师，将数学想象成为智慧之树：公式、定理和结论犹如成熟的果实挂在枝头，有待过路的科学家采摘以滋养他们的理论。与此相对的，数学家则视自己的领域为一片快速成长的热带雨林，由数学外部的力量所滋养和形成，同时又将不断丰富而更新的智慧动、植物群奉献给人类文明。这种观念上的差异主要是由于抽象语言的严峻与苛刻的背景，使数学雨林与普通人类活动的领域相割裂。”

二、树立正确的数学观

作为数学教师而言，其首要任务应该是积极、自觉地促使自己的观念改变，以实现由静态的、片面的、机械反映论的数学观向动态的、辩证的、模式论的数学观的转变。特别是由对于上述问题的朴素的、不自觉的认识向自觉认识的转化。

数学观是人们对数学的性质与任务的认识，因而必然对数学教

学的内容、方法等各个方面产生深刻的影响;数学观涉及数学知识的来源与性质,也涉及数学与人类社会各个领域的知识之间的关系,我们必须接受数学作为一种人类的活动,这种活动不受任何一种学术思想(历史上的逻辑主义、直觉主义与形式主义等)所制约。

一种近代的观点认为:数学论述的是理念。数学论述的不是铅笔记号也不是粉笔记号,不是有形的三角,不是物体的组合,而是理念,这种理念可以用适当的对象来表示或呈现。而我们从日常经验中熟知的数学知识或数学活动的主要性质是什么呢?

(1) 数学的对象是由人类所发明和创造的。

(2) 它们不是任意地被创造的,而是在已经存在的数学对象的活动中以及从科学和日常生活的需要中产生出来的。

(3) 一旦被创造后,数学对象所具有的性质是确定的,也许我们很难发现,但所具有的性质却是客观存在,与我们是否知道无关。

这种观点事实上认定了,真正的数学知识应当是关于抽象的思维对象的研究,而并非对于真实事物或现象的量性属性的直接研究;但是与此同时,这一观点也认定了,数学的概念、结构与思想都是物理世界、社会存在与思维世界各种具体现象的反映,也是组织这些现象的工具,因而数学在现实世界中有它的现象学基础。

随着数学理念的发生与发展,由真实事物或现象(现实原型)所抽象出来的数学概念、命题、问题和方法,由特殊上升到了一般,从而形成了模式。模式具有相对的独立性,能反映一类问题的共同特性,而具有超越特殊对象的普遍意义;模式不再从属于特定的事物或现象,也不再是专为研究特殊的实际系统及其性态而设计的数学结构。

数学家就是通过模式的建构,并以此为直接对象来从事客观世界量性规律性研究的问题解决;因而从这样的角度分析,数学就被说成是“模式的科学”。数学家寻求存在于数量、空间、科学、技术乃至想象之中的模式;数学理论阐明了模式间的关系;函数和映射,算子和射把一类模式与另一类模式联系起来,从而产生稳定的数学结构。

有关数学知识来源的观点,也限定了数学是一种动态的科学,因

为作为人类的活动,必然随着试验与应用的新发现而不断变化、不断发展;并且也必然与人类活动的各个领域,也就是与各种自然科学与社会科学以及思维科学等有着广泛而密切的联系。数学绝不可能缩进象牙塔里而向应用关上大门,只有从人类智慧的巨大宝库中汲取更多的营养以适应自身探索知识的需要,也只有作为一个多元的综合体,才能真正地取得数学的发展。

当今数学科学的发展出现了下列三种新的趋向:

(1) 数学内部各分支间的相互渗透以及数学与其他科学的交叉融会。连续与离散、有限与无限、纯粹与应用、结构与算法、随机与确定等等,相互之间均有着千丝万缕的联系。从数学应用的传统领域——物理学到生物学、经济学等等这些新兴的数学应用的大“客户”,数学几乎成了自然科学、技术科学、社会科学与管理科学的共同智力资源。

(2) 计算机这一新颖工具的出现及其发展改变了人们对数学的看法,数学成了形式科学与实验科学两种不同的知识类型的结合,在思维形式与研究方法等各方面都需在差异中寻求平衡。计算机的发展为数学开辟了新的研究领域,不仅使古老的数学领域获得复苏,也开辟了关于算法理论以及可行性等更为新颖有趣的数学问题的源泉。计算机的发展为数学研究提供了新工具,形成了数学活动的新形式。

(3) 数学的应用领域日趋广泛。宇宙之大、粒子之微、火箭之速、地球之变、生物之谜等各个方面,无处不有数学的重要贡献,数学的触角几乎伸向了一切领域。

根据教育学的原理与数学发展的倾向,我们要为学生准备的数学,也就是我们要进行教学的数学就必须是:作为整体的数学,而不是分散、孤立的各个分支;广泛应用的数学,而不仅是象牙塔里的严密体系;与计算技术及其他科学密切相关的数学,而不是纯而又纯的抽象理念。

数学教师所持有的数学观,与他在数学教学中的设计思想、与他在课堂讲授中的叙述方法以及他对学生的评价要求都有密切的联

系。通过数学教师传递给学生的任何一些关于数学及其性质的细微信息,都会对学生今后去认识数学以及数学在他们的生活阅历中的作用产生深刻影响,换句话说,数学教师的数学观往往会影响学生的数学观的形成。

三、建立现代的数学教学观

数学教师天天在教数学,可是我们有没有认真想过下面这些问题:“为什么要进行数学教学?”“应当怎样去进行数学教学?”或者说,“我是按照怎样的数学教学观在从事数学教学的?”如果对这些问题缺乏明确的认识,而处在不自觉的状态下,人们就往往会成为各种错误观念的俘虏,以致对数学教学工作产生消极影响。

这里其实涉及到很多根本性的认识,比如数学教育的目标是什么?是纯数学的——主要关注数学知识的传授,还是人本主义的——主要涉及人的理性思维和创造性才能的充分发展,还是实用主义的——主要关注实用的数学技能的掌握。再如数学学习与数学教学活动的本质是什么?是学生对于教师所授予的知识的被动的接受,还是以其已有的知识和经验为基础的、主动的建构过程,而这恰好就是应当怎样去进行数学教学的一个基本的出发点。由这些基本观念,也就决定了数学教学的内容,数学教学的模式与方法,数学课堂活动的准则,以及教师与学生各自的作用与地位等一系列问题的探讨与抉择,从而也就决定了数学教学的实施与效果。

数学教师在进行数学的考虑的同时,也必须进行教学的思考,也就是说数学教师除了要具备数学思维之外,还应该培养教学思维。数学教师应该运用教育学、心理学的知识,将有关的数学内容放在教学背景下进行审视。这应该是两类知识的结合,也是数学观与教学观的交融渗透。

数学教学观应该是数学教师对关于数学本质以及学习数学的认知过程的一种认识,它不仅涉及数学的性质与特征,更涉及获得知识的认识过程,或者说学习数学的规律。除了思考教学内容的数学知识与方法的科学性以外,更必须确定对教学形式与方法的认识,同样