

绪 言

第一节 数学教学理论的研究对象

自 20 世纪初国际数学教育委员会(ICMI)开展工作以来,不少数学家、心理学家、教育科学家、数学教育工作者和数学教师都在数学的教与学领域内进行着科学研究,只是许多研究工作都是独自在进行,缺少交流,尤其是国际间的交流,因而也很少有人认为自己所从事的领域是独立于数学、独立于教育科学的另一门科学。

与其他学科相比,数学教学理论确实很年轻,正处于形成发展的过程中,有关它的研究对象、研究方法以及评价其理论是否有效的标准等一系列问题都尚未达成共识,必然呈现多元性。但可以肯定的一点是:数学教学理论应该是一般教学理论在数学教学这一特殊领域中的应用,只是不能简单地把它等同于一般教学理论再加上一些数学例子的凑合;数学教学理论应该是在充分认识与理解教学理论和数学教学这两个领域的内涵实质的基础上,相互渗透、相互促进,由此综合而生成的结果。

数学教学理论必然具有自身特有的规律,也必然具有自己独特的研究课题、研究方法和具体实践的独立范畴,从而形成自身特有的结构与体系。它是自然科学与社会科学的结合,是典型的演绎体系与错综复杂的社会现象的交叉,再加上多方面难以预想的制约因素的介入,从而人们所关心的就不仅是这一人类活动的结果,还包括活动本身,涉及数学教学活动的整个过程。很多问题难以预先设计与制定,而必须在过程中得到解决。

本书的目的就是试图揭示数学教学的基本规律,从理论和实践

的不同侧面探讨数学教学的基本原理。但又必须指出的是：这毕竟是初步的尝试，很多问题的认识与理解还有待于广大的数学教师与数学教育工作者共同参与、共同探讨与研究，我们期盼着符合中国国情的数学教学理论的成长与发展。

按照传统的理解，数学教学是指由数学的教和学两方面组成的活动，并且两者是不可分割的，因而数学教学理论的研究必然与数学、教师和学生这三个对象都有着密切的联系。其中心问题应该包括：教师怎样教数学？学生如何学数学？以及数学教学中涉及的数学内容又是哪一些？等等。但是为了进一步揭示数学教学的本质，更深入地理解数学教学的意义，也为了便于有针对性地讨论问题，我们这里所涉及的数学教学理论将以教学的一种规定性定义为依据，即教学是指教师引起、维持以及促进学生学习的所有行为。因而我们讨论的侧重点将是数学教师如何教数学，而不是学生如何学数学；尤其集中讨论的是有关数学课堂教学的理论、策略与实施。希望就与数学课堂教学关系比较密切的一些课题，如数学教学内容的准备，数学教学过程的实施，数学课堂教学中教师与学生的相互影响，数学课堂教学中教师所采用的各种措施和策略，数学教师如何对待具有不同的数学接受能力的学生群体等等，进行一些考察、分析与研究，以期数学教师能对数学教学理论的研究内容，由初步的了解引起深入的反思，并进而对数学教学的实践产生促进作用。

值得指出的一个重要观念是：数学教学理论是关于人类活动的一个应用领域，它与工程学、(应用)心理学和医学一样，科学研究和(建设性)实践之间的界限可以说是模糊的。数学教学理论面临着相应的社会问题，那就是数学教育，它涉及许多实际的问题，需要使用各种方法进行建设性的工作，必须努力将这些实践活动合理化，甚至有必要加深对理论和方法论的反思，以便对实际问题有更深入的认识；无论就教师的观念和课堂里的相互影响而言，都反映出数学教学理论这一动态的特点。

这里还想指出的是，真正对数学教学实践产生影响的是数学教师自己头脑中拥有的那种‘数学教学理论’这种‘数学教学理论’是

数学教师自己经过学习和亲身体验而产生的。这儿介绍的数学教学理论不可能对数学教师的教学实践产生直接的影响，只有在数学教师自觉地理解和思考这些有关数学教学理论的基础上，借以形成自身内在的“数学教学理论”的概念结构或思维方式，并转化为自己的信念，指导实际的行动，那才达到了运用数学教学理论以指导和改造数学教学实践的目标。正是基于这样的思考，我们更多地采用呈现多种不同的解释、框架和思维形态的开放性的陈述，以便促使数学教师结合自身的教学实践，进行深入的反思，而建构起自身内在的相应的数学教学理论，并在亲自经历的数学教学实践过程中，继续不断地探索和反思，以进一步丰富数学教学理论与实践的宝藏。

第二节 数学观与数学教学观

数学教学理论是关于数学教学即数学教师行为的理论，而数学教师在数学教学过程中的所作所为，则取决于数学教师的基本观念，取决于数学教师对数学与数学教学的基本看法、信念与态度；因此，数学教师必须逐步形成正确的数学观与现代的数学教学观，才能不断提高实施素质教育的能力，有目的地、自觉地进行数学教学实践。

一、数学是什么？

“数学是什么”这一问题对于从事数学教育事业的数学教师来说，显然是个十分重要的问题；也许我们并未对此问题有意识地进行过认真的思考，甚至不一定能作出明确的回答，但在我们的实际工作中，却必然自觉或不自觉地向以某种观念指导着具体的行动，从而也影响了数学教学的实践与效果。

在不同的历史时期，随着数学本身的发展与人们对数学的认识的深入，对‘数学是什么’这一问题有着各种很不相同、很不一致的论述。例如，古代中国就认为数学是术，是用来解决生产与生活问题的计算方法；而古希腊则认为数学是理念，是关于世界本质的学问，数

学对象是一种不依赖于人类思维的客观存在,但可以通过亲身体验,借助实验、观察和抽象获得有关的知识。有的主张数学是一个公理体系,由基本概念、基本关系与公理出发,可以严格地、逻辑地导出所有的结论;也有的声称数学是结构的科学,其任务就是在许多不同的背景下,以精确的和客观的形式,系统地分析共同的和基本的结构特征。

由于观察与思考问题的角度不同,人们又对数学的特征作了各种不同的描述。从数学的源泉及其与现实世界的关系来看,恩格斯(F. Engels)断言,数学是关于现实世界的空间形式和数量关系的科学,所以是非常现实的材料。弗赖登塔尔(H. Freudenthal)认为,数学的概念、结构与思想都是物理世界、社会存在与思维世界各种具体现象的反映,也是组织这些现象的工具,因而数学在现实世界中有它的现象学基础。柯尔莫哥洛夫(А. Н. Колмогоров)也提出,数学的研究对象产生于现实,但数学又必须离开现实(抽象),由于数学内容不断丰富,应用范围无限扩大,因而并非完全脱离现实。他同时又主张,所有数学的基础是纯集合论,数学的各专门分支研究各种特殊的结构,每一种结构由相应的公理体系所确定。

从数学的研究方法来分析,人们对数学的认识又有了更大的分歧。有人认为,数学全然不涉及观察、归纳、因果等方法,对人进行的训练,全都是利用演绎方法。数学家工作的起点,只需要少数公理,一见就懂,无需证明,而其余的工作则都可以由此而推演出来。与此相对的看法则是,解决数学问题常常必须借助于新定理、新见解、新方法;在具体解决问题和从事研究的过程中,常常要进行观察和比较。在这其中,归纳法是十分常用的,而且需要依赖实际经验;数学家的工作,都离不开观察、推测、归纳、实验、经验、因果等方法。甚至认为,数学家还需要有高度的直觉和想象力,直觉比以往任何时候都更加成为数学发现的创造性源泉。更有人声称,数学是证明与反驳的交互过程,认为数学从来不是严谨的。随着时代的发展与研究的深入,对“数学是什么”这一问题的回答,可以列举出很多种说法:

“数学是模式的科学。”

“数学是科学,数学更是一门创造性的艺术。”

“数学是科学,数学也是一门技术。”

“数学是一种语言。”

“数学是一种文化。”

这正好反映了数学是一个多元的综合产物,不能简单地将数学等同于命题和公式汇集成的逻辑体系。数学通过模式的构建与现实世界密切联系,但又借助抽象的方法,强调思维形式的探讨;现代技术渗透于数学之中,成为数学的实质性内涵,但抽象的数学思维仍然是一种创造性的活动;数学其实是一种特殊的语言,由此形成的思维方式,不仅决定了人类对物质世界的认识方式,还对人类理性精神的发展具有重要的影响,因而必然成为人类文化的一个重要组成成分。

综上所述,如果从哲学的根本观点上来刻画数学的本质,不外乎以下两种不同的看法:一种是动态的,将数学描述为处于成长发展中因而是不断变化的研究领域;另一种则是静态的,将数学定义为具有一整套已知的、确定的概念、原理和技能的体系。斯蒂恩(L. A. Steen)的一段比喻可以为此作注解:

“许多受过教育的人,特别是科学家和工程师,将数学想象成为智慧之树:公式、定理和结论犹如成熟的果实挂在枝头,有待过路的科学家采摘以滋养他们的理论。与此相对的,数学家则视自己的领域为一片快速成长的热带雨林,由数学外部的力量所滋养和形成,同时又将不断丰富而更新的智慧动、植物群奉献给人类文明。这种观念上的差异主要是由于抽象语言的严峻与苛刻的背景,使数学雨林与普通人类活动的领域相割裂。”

二、树立正确的数学观

作为数学教师而言,其首要任务应该是积极、自觉地促使自己的观念改变,以实现由静态的、片面的、机械反映论的数学观向动态的、辩证的、模式论的数学观的转变。特别是由对于上述问题的朴素的、不自觉的认识向自觉认识的转化。

数学观是人们对数学的性质与任务的认识,因而必然对数学教

学的内容、方法等各个方面产生深刻的影响；数学观涉及数学知识的来源与性质，也涉及数学与人类社会各个领域的知识之间的关系，我们必须接受数学作为一种人类的活动，这种活动不受任何一种学术思想(历史上的逻辑主义、直觉主义与形式主义等)所制约。

一种近代的观点认为：数学论述的是理念。数学论述的不是铅笔记号也不是粉笔记号，不是有形的三角，不是物体的组合，而是理念，这种理念可以用适当的对象来表示或呈现。而我们从日常经验中熟知的数学知识或数学活动的主要性质是什么呢？

(1) 数学的对象是由人类所发明和创造的。

(2) 它们不是任意地被创造的，而是在已经存在的数学对象的活动中以及从科学和日常生活的需要中产生出来的。

(3) 一旦被创造后，数学对象所具有的性质是确定的，也许我们很难发现，但所具有的性质却是客观存在，与我们是否知道无关。

这种观点事实上认定了，真正的数学知识应当是关于抽象的思维对象的研究，而并非对于真实事物或现象的量性属性的直接研究；但是与此同时，这一观点也认定了，数学的概念、结构与思想都是物理世界、社会存在与思维世界各种具体现象的反映，也是组织这些现象的工具，因而数学在现实世界中有它的现象学基础。

随着数学理念的发生与发展，由真实事物或现象（现实原型）所抽象出来的数学概念、命题、问题和方法，由特殊上升到了一般，从而形成了模式。模式具有相对的独立性，能反映一类问题的共同特性，而具有超越特殊对象的普遍意义；模式不再从属于特定的事物或现象，也不再是专为研究特殊的实际系统及其性态而设计的数学结构。

数学家就是通过模式的建构，并以此为直接对象来从事客观世界量性规律性研究的问题解决；因而从这样的角度分析，数学就被说成是“模式的科学”。数学家寻求存在于数量、空间、科学、技术乃至想象之中的模式；数学理论阐明了模式间的关系；函数和映射，算子和射把一类模式与另一类模式联系起来，从而产生稳定的数学结构。

有关数学知识来源的观点，也限定了数学是一种动态的科学，因

作为作为人类的活动,必然随着试验与应用的新发现而不断变化、不断发展,并且也必然与人类活动的各个领域,也就是与各种自然科学与社会科学以及思维科学等有着广泛而密切的联系。数学绝不可能缩进象牙塔里而向应用关上大门,只有从人类智慧的巨大宝库中汲取更多的营养以适应自身探索知识的需要,也只有作为一个多元的综合体,才能真正地取得数学的发展。

当今数学科学的发展出现了下列三种新的趋向:

(1) 数学内部各分支间的相互渗透以及数学与其他科学的交叉融会。连续与离散、有限与无限、纯粹与应用、结构与算法、随机与确定等等,相互之间均有着千丝万缕的联系。从数学应用的传统领域——物理学到生物学、经济学等等这些新兴的数学应用的大“客户”,数学几乎成了自然科学、技术科学、社会科学与管理科学的共同智力资源。

(2) 计算机这一新颖工具的出现及其发展改变了人们对数学的看法,数学成了形式科学与实验科学两种不同的知识类型的结合,在思维形式与研究方法等各方面都需在差异中寻求平衡。计算机的发展为数学开辟了新的研究领域,不仅使古老的数学领域获得复苏,也开辟了关于算法理论以及可行性等更为新颖有趣的数学问题的源泉。计算机的发展为数学研究提供了新工具,形成了数学活动的新形式。

(3) 数学的应用领域日趋广泛。宇宙之大、粒子之微、火箭之速、地球之变、生物之谜等各个方面,无处不有数学的重要贡献,数学的触角几乎伸向了一切领域。

根据教育学的原理与数学发展的倾向,我们要为学生准备的数学,也就是我们要进行教学的数学就必须是作为整体的数学,而不是分散、孤立的各个分支,广泛应用的数学,而不仅是象牙塔里的严密体系,与计算技术及其他科学密切相关的数学,而不是纯而又纯的抽象理念。

数学教师所持有的数学观,与他在数学教学中的设计思想、与他在课堂讲授中的叙述方法以及他对学生的评价要求都有密切的联

系。通过数学教师传递给学生的任何一些关于数学及其性质的细微信息，都会对学生今后去认识数学以及数学在他们的生活阅历中的作用产生深刻影响，换句话说，数学教师的数学观往往会影响学生的数学观的形成。

三、建立现代的数学教学观

数学教师天天在教数学，可是我们有没有认真想过下面这些问题：“为什么要进行数学教学？”应当怎样去进行数学教学？或者说，“我是按照怎样的数学教学观在从事数学教学的？”如果对这些问题缺乏明确的认识，而处在不自觉的状态下，人们就往往会成为各种错误观念的俘虏，以致对数学教学工作产生消极影响。

这里其实涉及到很多根本性的认识，比如数学教育的目标是什么？是纯数学的——主要关注数学知识的传授，还是人本主义的——主要涉及人的理性思维和创造性才能的充分发展，还是实用主义的——主要关注实用的数学技能的掌握。再如数学学习与数学教学活动的本质是什么？是学生对于教师所授予的知识的被动的接受，还是以其已有的知识和经验为基础的、主动的建构过程，而这恰好就是应当怎样去进行数学教学的一个基本的出发点。由这些基本观念，也就决定了数学教学的内容，数学教学的模式与方法，数学课堂活动的准则，以及教师与学生各自的作用与地位等一系列问题的探讨与抉择，从而也就决定了数学教学的实施与效果。

数学教师在进行数学的思考的同时，也必须进行教学的思考，也就是说数学教师除了要具备数学思维之外，还应该培养教学思维。数学教师应该运用教育学、心理学的知识，将有关的数学内容放在教学背景下进行审视。这应该是两类知识的结合，也是数学观与教学观的交融渗透。

数学教学观应该是数学教师对关于数学本质以及学习数学的认知过程的一种认识，它不仅涉及数学的性质与特征，更涉及获得知识的认识过程，或者说学习数学的规律。除了思考教学内容的数学知识与方法的科学性以外，更必须确定对教学形式与方法的认识，同样

要以科学的方法确定传授数学知识的条件与实质。

恩斯特(P. Ernest)曾经根据数学哲学及数学教学的实验研究,提出了数学教师的三种数学观及其在教学上的相应表现,即分析了数学教师对数学本质的有意识或下意识的信念、概念、含义与规则的思考,以及他们在数学教学中的主要倾向与有关数学训练的选择,认为大致可以归结为以下三种类型:

(1) 问题解决观点。将数学看成是动态的、以问题为主导和核心的过程。数学是人类创造发明的一个连续发展的领域,在发展过程中生成各种模式,并提取成为知识。数学就是一个不断探索、不断求知、不断扩大知识总体的过程。数学不是一个已经完成的产品,其最终结果总是开放的,有待继续修正。

在数学教学中的表现,则反映为强调数学教学是一种活动,主张“学数学就是做数学”,不仅注意知识的结果,更加重视获得知识的过程,目的在于鼓励学生亲身经历并进入数学的生成发展过程。

(2) 柏拉图(Platon)观点。将数学看成是静态的、统一的知识实体。数学是水晶般清澈的王国,其中包含有相互联系的各种结构与真理,并由逻辑与内在涵义形成的纤维,共同将其装订而成一整体。因而,数学是如磐石般稳定的永远不变的产品。数学只能被发现,而不能被创造。

在数学教学中的表现,则反映为强调数学作为严谨的形式体系的整体结构,以概念为主导,注重概念的内涵,尤其重视推理的逻辑,强调关系,突出“为什么”,容许学生自己构造算法,但必须考虑其可行性与相容性,以符合数学的纯粹的形式法则。

(3) 工具主义观点。将数学看成是一个工具袋,由各种事实、规则与技能累积而成,由于某些外部目标的追求,而由那些熟练的工匠加以运用。因而,数学只是一些互不相关但却有用的规则与事实的集合。

在数学教学中的表现,则反映为教师按照传统的方式,突出对规则、步骤的演示,强调操练程序,不重视证明,甚至不容许超出课本中列出的算法,只要求学生能掌握根据教学目标规定的熟练技能。

实际上,数学教师的教学观不一定很明确地显示出属于哪种类型,却往往是以上三种互不相容的观点的混合,在不同时期与不同的内容中,相应地显现出某一方面的倾向。

传统的教育思想以机械反映论为基础,即认为认识无非是主体对于客观实在的简单的、被动的反映,于是数学学习也无非是一种“授予—吸收”的过程。皮亚杰提出的建构主义观点,则认为认识是主体在其中发挥了积极作用的过程,正是主体借助于自身已有的知识和经验(即认知结构)能动地建构起了关于客体的认识,从而,所有的知识就都是我们自己能动的认识活动的产物。因此,数学学习也是在一定社会环境中的主动建构过程。

根据建构主义的观点,学生在教学活动中处于主体地位,教师则应当成为学生学习活动的促进者,而并非单纯的知识传授者,而数学教学的基本任务也就在于促进和增强学习者内部的数学学习过程。从探索情境、发现问题、形成观念、寻找方法,直到检验判定、评价结果,都应该促使学生主动投入,积极思维;教师可以提出有趣的情境以刺激学生的动机,教师也可以提出适当的问题以启发学生的思考。在数学教学的过程中,教师不应成为“居高临下”的指导者,而应成为一个“平等的”参与者。教师也不应成为正确与错误的裁定者,而应成为一个鼓励者和有益的启发者,教师必须努力促使学生建立起良好的自我意识,学会自我检查,通过反思进行自我调整,并且鼓励学生相互间的思想交流,学会自我评价与相互评定,从而促使学生真正成为自觉投入且积极建构的学习活动中的主体。

承认数学教学过程中学生应有的主体地位,并非否定数学教师在教学过程中的重要作用;因为学生的数学思维不能自发地形成,任何创造活动都必须以一定的学习作为必要的基础,这实质上是一种文化继承行为。因此,数学教师必须在数学教学中发挥主导作用。首先,必须深入了解学生真实的数学思维活动,这样才能根据学生已有的数学知识进行启发与促进。其次,必须为学生的数学学习活动创造一个良好的学习环境,以帮助学生获得必要的数学经验和预备知识,这样才能为新的知识建构提供良好的基础。为了达到使数学

课堂能成为学生们相互交流、思想开放、协商争辩的理想场合,教师必须以身作则,并且应当通过经常向学生提出“做什么?”、“为什么要这样做?”和“如何做?”等一系列问题,起到一个质疑者的作用,以帮助学生思考、理解、猜测、交流并最终解决有关的数学问题。第三,必须重视对学生错误的纠正,以帮助学生进行自我反省,引起内在的观念冲突,这样才能提供适当的外部环境以促进学生内部的数学认知结构的更新,从而不断适应与发展新的建构过程。

我们的数学教学应该促使学生的学习活动向着下述方向转变:学生主动且独立地处理学习内容,并且越来越自主地学习,并能系统地形成学习目标;选择并使用适合于内容、条件及目标的学习策略;合理地使用学习工具与学习时间等等。换句话说,数学教师所进行的教学思考与所作出的教学决策,必须有利于促使学生从“学会数学”进而发展成为“会学数学”。

总之,数学教师必须特别注意自身观念的更新,不断改造陈旧的、传统的数学观与数学教学观,根据数学教育的基本矛盾,正确认识数学教育的价值及其时代特征,充分理解数学学习与教学活动的本质,以实现数学教学思想的根本性变革,其中最关键的就是不再把数学学习看作是学生对于教师所授予的数学知识的被动的接受,而是以学生已有的数学知识和经验为基础的、一个社会的建构过程。

参考文献

1. Rolf Biehler 等主编. 数学教学理论是一门科学. 上海教育出版社. 1998 年
2. Douglas A. Grouws 主编. 数学教与学研究手册. 上海教育

出版社, 1999 年

3. 郑毓信著. 数学教育哲学. 四川教育出版社, 1995 年

4. 施良方、崔允漷主编. 教学理论：课堂教学的原理、策略与研究. 华东师范大学出版社, 1999 年

第一章 现代数学教学理论概述

对数学课程发展的过程以及数学教学实践进行反思与改进,是数学教与学研究的主要目标,也是数学教与学研究的出发点。同时,这两个方面也是架设在关心数学教育的各种社会团体之间的一座桥梁,是社会各界注意数学教育的焦点所在。

这里首先要面对的问题是如何为学生准备数学。这一为学生准备数学的过程,实质上涉及到数学教学的内容、实施数学教学的过程,以及学生的认知发展规律与学生如何获得知识的方法等等。

要讨论为学生准备数学的过程,就必须面对尼斯(M. Niss)所提及的三个有关的基本问题:

(1) 合理性问题(理由问题)。为什么数学的某些特殊部分(对整个数学而言)要教给学生中的某个特殊群体?

这个问题要解决的是理由、目的和论据,问题的答案表达了数学教育的总体意义与目标,并且也依赖于和反映出对数学的社会功能、数学哲学、社会的经济和文化结构、社会状况和环境以及意识形态和政治主张等等的认识,因而必然会随时间地点的改变而变化。

(2) 可能性问题。是否有可能将相应部分的数学教给所考虑的那类学生?

这个问题既包含了数学的成分,也涉及了心理的因素。针对各类特殊的学生,他们究竟能学什么?是否能将根据目标、理由所确定的数学内容教给相应的那个群体?要在怎样的条件和环境下才有可能?实质上,这个问题涉及到为实现数学教育的总体意义和目标,以

及寻求数学教与学的特殊目的和对象,必须考虑的先决条件和边缘因素。

(3) 可行性问题(实施问题)。假如理由和可能性问题都已解决,那么接下来的问题就是如何采取具体措施,去实施数学内容的教学,换句话说,它关注的是‘怎么教?’和‘如何做?’这样的问题。

这个问题首先要设法建立从事数学教育的结构和组织框架,进一步还要为数学教学的实现提供各种有形与无形的资源(如设备、教师、课程内容、教学方法等),甚至还包括与评估的原理和方式有关的事项。对此问题的解决,会受到社会体制、学校机构以及管理方式等多方面因素的制约,也就更依赖于具体的环境并随之而改变。

严格说来,以上三个问题只有在一个非常理想化的理论背景下才可能依次得到圆满的解决,面对复杂的实际背景,我们只能以相对的观点、不同的侧面或是螺旋式的过程,以求得某种局部的平衡,并适应不同社会背景、意识形态的具体要求。

这里,不妨引用一下布鲁纳(J. S. Bruner)的那句名言:“任何学科的基本思想都能以某种恰当的方式教给任何年龄的任何一个人”。如果说,这一断言可以被理解为属于可能性问题,那么,“基本”这个词自然就与合理性问题有关,而“恰当的方式”自然又与可行性问题相连。也许这句名言就是一个公理,它默认了有关上述三个基本问题在相应范畴中的内涵与共识。

广大数学教师长期的数学教学实践为数学教学理论的宝库积累了丰富的经验,提供了充沛的资源;一代又一代的数学教学研究工作者则通过辛勤的数学教学研究实践,试图从不同的侧面、不同的视角来构建各种不同的数学教学理论框架,力求促使数学教学的理论与实践能够进入一个更高的境界。

下面就想对一些重要的、比较有代表性的现代数学教学理论的典型观点和思想作一个大概的介绍,希望对我们的数学教师能有所启示,能以更新的观念,并结合自己的数学教学实践,改进工作,提高质量,更好地实现素质教育的目标和要求。

第一节 “现实数学”原则

一、现实的数学

20 世纪 60 年代兴起的“新数学”运动，对全球的数学教育界产生了巨大影响。根据结构主义的观点，数学本身就是一个有组织的、封闭的演绎体系；因而，数学教育也就意味着应该以体系的结构作为学习过程的指导方针，洞察数学的结构就成了数学教育的最重要的根本；从而提出了数学教育的目的就在于训练学生的逻辑演绎思维与公理化方法，必须以集合论与现代公理为基础，提供给学生一个完善的演绎理论体系。

人们通过数学教学的实践，发现了结构主义的片面性。根据数学发展的历史，无论是数学的概念，还是数学的运算与规则，都是由于现实世界的实际需要而形成的。数学不是符号的游戏，而是现实世界中人类经验的总结。数学来源于现实，因而也必须扎根于现实，并且应用于现实。数学如果脱离了那些丰富多彩而又错综复杂的背景材料，将成为“无源之水，无本之木”。

另一方面，我们也认为数学是充满了各种关系的科学，通过与不同领域的多种形式的外部联系，不断地充实和丰富着数学的内容；与此同时，由于数学本身内在的联系，形成了自身独特的规律，进而发展成为严谨的形式逻辑演绎体系。因此，也应该让学生了解数学的整个体系——充满着各种各样内在联系与外部关系的整体结构。

学习数学就意味着能够做数学：熟练地运用数学的语言去解决问题、探索论据并寻求证明，而最重要的活动则应该是从给定的具体情境中，识别或提出一个数学概念。所以，要想引入一个新概念，却缺少足够的具体事实作为基础，或者反复介绍一个概念，却没有具体的应用，这都无法使学生产生求知的冲动；过早地形式化不可能有效果，而过早地抽象化也会引起学生的抵触情绪；因为他们希望知道这究竟有什么用处，又为什么是互相关联的。

从具体情境中提取适当的概念,从观察到的实例进行概括,再通过归纳、类比,在直觉的基础上形成猜想,这是数学思维的方式。而要引导个体思维发展的最好方法,按照发生认识论的原则,就是追溯群体智力发展的自然顺序,当然不必再去重复错误。

因此,数学教学的内容——为学生准备的数学——应该是与现实密切联系的数学,能够在实际中得到应用的数学,即“现实的数学”。如果过于强调了数学的抽象形式,忽视了生动的具体模型,过于集中于内在的逻辑联系,割断了与外部现实的密切关系,尤其是将数学与其他科学完全割裂开来,失掉了产生兴趣与刺激动机的最重要的源泉,必然会给数学教育带来极大的损害。

二、每个人的“数学现实”

数学应该是属于所有人的,我们必须将数学教给所有人。这是 80 年代国际数学教育界提出的新口号——“大众数学(Mathematics for All)”,其中包含有两层意思:一是数学教育必须照顾到所有人的需求,并使每个人都从数学教育中尽可能多地得到益处;二是指在数学学习中,不同的人可以达到不同的水平,但也应该存在一个人都能达到的水平。

实际上,对于少数数学家来说,抽象的形式体系,严密的逻辑结构,以及涉及内在联系的规律,也许是最为本质、最为完美也是最感兴趣的东西;可是对于大多数人而言,掌握数学与外部世界的密切关系,从而获得适应于当前社会的生存与生活、并进而能够改革社会促使其进一步发展的能力,将是更为重要的。数学教师有时会产生一种错觉,似乎他的学生都将成为未来的数学家,因此努力想以数学家的思维模式来培养学生。可事实却是,只有极少数学生将来会从事与数学关系密切的工作,因而需要这方面的思维训练与专业准备;对绝大多数的学生来说,他们更需要的是与他们未来的工作直接有关的内容,也许更强调的是数学的社会文化背景,以及数学在面对现实情境时所能发挥的解决问题的实际作用。

可是,如何理解“现实”不同的社会需要是否就是“现实”如

果将“现实”等同于实际的社会生产活动,这是一种片面的理解。根据英国的考克罗夫特(W. H. Cockcroft)报告,他们在进行了比较广泛的调查,分析了一些比较实际的资料之后提出,人们所需要的数学可以分为三种水平:

第一种是日常生活的需要。从个人消费、家庭开支到国家建设,处处都要涉及各种数字、图表、测量等问题,这些大多是比较简单的数学知识,但却是每个人都必须知道的。

第二种是不同的技术或者说是各种职业的需要。从工程技术人员、农业技师到各行业的服务人员,在相当广泛的不同领域内,从事各种不同性质工作的人,从各个不同方向,对数学知识提出了种种要求,当然其中也含有某些共同部分。

第三种是为进一步学习并从事高水平研究工作的需要,包括的范围很大,差别也很大。未来的科学家、企业家、管理学家等,都需要与各个领域相关的不同分支的数学知识,他们需要共同的基础及类似的数学思想方法,但却涉及到千变万化的具体内容。

数学教育当然应该为所有的人服务,应该满足全社会各种领域的人对数学的不同水平的需求。数学教育应该为不同的人提供不同的数学修养,从而为每个人培养适合于他所从事的不同专业所必需的数学态势,使其能顺利地处理有关的各种数学问题。

可是,怎样才能使我们为学生准备的数学确实符合上述要求,能面对千变万化的不同需求,能适应千差万别的不同态势呢?为此,荷兰的著名数学教育家弗赖登塔尔提出了一个重要的基本观点:

每个人都有自己生活、工作和思考着的特定客观世界以及反映这个客观世界的各种数学概念、它的运算方法、规律和有关的数学知识结构。这就是说,每个人都有自己的一套“数学现实”。从这个意义上说,所谓‘现实’不一定限于具体的事物,作为属于这个现实世界的数学本身,也是‘现实’的一部分,或者可以说,每个人也都有自己所接触到的特定的“数学现实”。大多数人的数学现实世界可能只限于数和简单的几何形状以及它们的运算,另一些人可能需要熟悉某些简单的函数和比较复杂的几何,至于一个数学家的数学现实可能就要