数学建模及典型案例分析

李志林　欧宜贵　编著

化学工业出版社
·北京·

需要全本请访问 www.ertongbook.com

本书是根据“数学建模”课程教学和数学建模竞赛培训活动的需要，在作者多年从事相关教学和研究工作以及指导数学建模竞赛实践的基础上写成的。各章相关数学知识的介绍以适用为度，通过一些典型数学建模案例的分析，达到快速掌握数学建模一些常用的基本方法。计算机完成的典型案例的主要求解过程与作图大多数提供了 Matlab 源程序，使学习软件的使用与数学模型的求解紧密结合起来。

主要内容包括：数学建模导言、插值与拟合、微分方程建模方法、差分法建模、计算机模拟、层次分析方法、数据的统计描述与分析、回归分析方法、优化模型、确定型时间序列预测、随机型时间序列预测方法等。书末附录 A 为数学建模训练题，附录 B 为 Matlab 使用简介。

本书可作为高等学校数学建模课程的教材，尤其适合于作为数学建模竞赛的培训教材。

图书在版编目（CIP）数据

数学建模及典型案例分析/李志林，欧宜贵编著．北京：化学工业出版社，2006.12
ISBN 978-7-5025-9848-8

Ⅰ.数… Ⅱ.①李…②欧… Ⅲ.数学模型 Ⅳ.022

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）**第** 161413 **号**

责任编辑：唐旭华　　**文字编辑**：朱　磊
责任校对：蒋　宇　　**装帧设计**：王晓宇

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
720mm×1000mm　1/16　**印张** 12¾　**字数** 248 **千字**　2007 **年** 4 **月北京第** 1 **版第** 1 **次印刷**

购书咨询：010-64518888（**传真**：010-64519686）　**售后服务**：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：25.00 元

版权所有　违者必究

前　言

随着社会的不断发展，数学的应用已由传统的工程技术领域扩展渗透到自然科学和社会科学许多领域，并形成了许多交叉科学，如数理经济学、计量经济学、人口控制论、生物数学等。而应用数学方法解决实际问题，首要的和关键的一步就是建立实际问题的数学模型，因此掌握数学建模方法也就显得非常重要。计算机技术及数学软件的飞速发展和普及为数学模型的求解带来了极大的方便，使数学的应用更加广泛和实际可行。

一年一度的全国大学生数学建模竞赛已成为规模最大的大学生课外科技活动。真正投入数学建模学习和竞赛的同学，在如何应用数学方法处理实际问题与利用数学软件求解方面肯定有不少收获，在如何查找资料如何撰写论文等方面也会得到锻炼和提高，这对他们以后的学习和工作将是非常有益的。

数学建模是一门内容活泼、信息量大、涉及数学多个分支的课程。在实际应用中，不但需要掌握相关数学分支的原理和方法，还要有实际问题的背景知识，无论是对从事数学建模教学的老师还是对学生都是挑战。特别是对培训参加数学建模竞赛的各专业大学生的老师，由于教学科研任务繁重，希望找到一本能在较少的课时内使学生掌握数学建模的主要内容和方法的教材；而参加数学建模竞赛的同学不但有正常的课程学习任务，还由于专业分布广泛，对有关的数学知识不可能也没必要钻得很深，也希望找到一本介绍数学知识适可而止，以实用为度的参考书。正是为了满足这样的需求，编者在多年从事“数学模型”、“数学实验”课程的教学和组织指导数学建模竞赛工作的基础上，博览了国内外出版的一些相关资料，总结了编者多年从事数学建模教学和研究工作的经验，编写了本书。数学建模与其说是一门技术，不如说是一门艺术。与一门技术大致有章可循不同，艺术在某种意义下无法归纳出若干条普遍适用的准则或方法。尽管如此，还是有一些比较常用的基本的技术手段和方法，本书的目的正是希望通过一些典型数学建模案例的分析，快速掌握一些常用的基本方法。所有数学方法的介绍均立足于应用，尽可能利用软件的强大计算功能，以便可以集中精力和省出更多时间思考如何构建有“欣赏价值”的数学模型。此外，本书还有如下特点：所有典型案例的主要计算和作图均提供了 Matlab 源程序，使学习计算机软件的使用与数学模型的求解紧密结合起来。由于这些典型案例是数学建模中常用的，应用中只要稍加改动即可。系统介绍了常见统计量、参数估计、假设检验、方差分析及聚类分析的 Matlab 命令计算方法，而这些内容在概率统计课程的计算是相当繁杂的，因此，这些内容对概率统计课程的学习也有参考价值。另外还介绍了确定型时间序列预测、随机型时间序列预测等建模方法，这些方法在社会领域的研究中是常用的。

本书第1、2、5、7、8、10、11章及附录A由李志林编写，第3、4、6、9章及附录B由欧宜贵编写，最后由两人共同统稿完成。

本书的出版得到海南省教育厅科研基金（Hjsk200519）和海南大学教材出版基金资助，在此表示感谢。

限于编者的水平，书中不妥之处，敬请批评指正。

编　者

2006年9月

目　录

1　数学建模导言 …… 1
1.1　数学模型及其分类 …… 1
1.2　一个数学建模例子 …… 2
1.2.1　模型的假设 …… 2
1.2.2　模型的建立与求解 …… 3
1.2.3　对解以及问题的进一步讨论 …… 4
1.2.4　建模过程总结 …… 5
1.3　数学建模的基本方法和步骤 …… 5
1.3.1　数学建模的基本方法 …… 5
1.3.2　数学建模的一般步骤 …… 5
1.4　数学建模论文写作 …… 7
2　插值与拟合 …… 9
2.1　插值与拟合的基本概念 …… 9
2.1.1　插值与插值函数 …… 9
2.1.2　最小二乘拟合 …… 11
2.1.3　温度预测问题 …… 12
2.2　行驶汽车车距问题 …… 12
2.3　国土面积的数值计算 …… 15
3　微分方程建模方法 …… 17
3.1　微分方程建模思想和方法 …… 17
3.2　最优捕鱼策略问题 …… 22
3.3　广告模型 …… 25
4　差分法建模 …… 28
4.1　线性差分方程 …… 28
4.2　线性差分方程的平衡点及稳定性 …… 29
4.2.1　一阶线性方程的平衡点及稳定性 …… 29
4.2.2　二阶线性差分方程的平衡点及稳定性 …… 29
4.2.3　一阶非线性差分方程 …… 30
4.3　金融问题的差分方程模型 …… 30
4.4　养老保险模型 …… 31
4.5　减肥计划 …… 32
5　计算机模拟 …… 35
5.1　计算机模拟建模概述 …… 35
5.2　蒙特卡罗方法 …… 35
5.3　蒙特卡罗方法计算国土面积 …… 37
5.4　三人追逐轨迹问题 …… 38
5.4.1　问题的提出 …… 38
5.4.2　问题分析与模型的建立 …… 38
5.4.3　编程画出轨迹 …… 39
5.5　猎狗攻击问题 …… 40
5.5.1　模型的建立 …… 40
5.5.2　猎狗攻击问题的数值解 …… 40
6　层次分析法 …… 42
6.1　层次分析法的基本原理 …… 42
6.2　层次分析法的一般步骤 …… 44
6.3　城市空气质量分析 …… 46
6.4　层次分析法在求解某些优化问题中的应用 …… 52
7　数据的统计描述与分析 …… 55
7.1　随机变量的概率分布及数字特征 …… 55
7.1.1　统计量 …… 55
7.1.2　计算统计量的 Matlab 命令 …… 56
7.1.3　常见概率分布及数字特征 …… 56
7.2　报童的抉择 …… 57
7.2.1　问题的分析 …… 57
7.2.2　模型的假设 …… 58
7.2.3　模型的建立与求解 …… 58
7.2.4　结果的分析 …… 59
7.2.5　Matlab 实现 …… 59
7.3　参数估计 …… 60
7.4　假设检验 …… 61
7.4.1　参数假设检验 …… 61
7.4.2　总体分布的假设检验 …… 63
7.5　方差分析 …… 65
7.5.1　单因素试验方差分析 …… 65

需要全本请访问 www.ertongbook.com

7.5.2 双因素试验方差分析 …… 66
7.5.3 多因素试验方差分析 …… 67
7.6 聚类分析 …… 68
7.6.1 距离和相关系数计算方法的数学定义 …… 69
7.6.2 聚类分析的 Matlab 实现 …… 70
7.7 气象观测站如何调整 …… 71
7.7.1 模型的假设 …… 71
7.7.2 模型的建立与求解 …… 71
7.7.3 解的进一步讨论 …… 73
8 回归分析方法 …… 75
8.1 一元线性回归分析 …… 76
8.1.1 一元线性回归模型的建立及其 Matlab 实现 …… 76
8.1.2 身高与腿长 …… 77
8.2 多元线性回归分析 …… 78
8.2.1 多元线性回归模型的建模步骤及其 Matlab 实现 …… 78
8.2.2 某类研究学者的年薪 …… 78
8.2.3 逐步回归方法建模 …… 82
8.2.4 多项式回归 …… 83
8.3 非线性回归分析 …… 86
8.3.1 非线性最小二乘拟合 …… 86
8.3.2 非线性回归模型 …… 86
9 优化模型 …… 91
9.1 数学规划的一般形式 …… 91
9.2 数学规划问题举例 …… 92
9.2.1 下料问题 …… 92
9.2.2 装箱问题 …… 94
9.2.3 选址问题 …… 95
9.2.4 布点问题 …… 96
9.2.5 生产计划问题 …… 98
9.2.6 战术决策模型 …… 99
9.2.7 投资决策问题 …… 100
9.2.8 海洋运输问题 …… 101
9.3 动态规划及其应用 …… 102
9.3.1 动态规划模型简介 …… 102
9.3.2 动态规划的最优性原理和动态规划的基本方程 …… 102
9.3.3 动态规划应用举例 …… 103
9.4 多线材切割问题最优设计方案的数学模型 …… 112
9.5 钢管的订购和运输 …… 117
9.6 降落伞的选择 …… 123
10 确定型时间序列预测法 …… 128
10.1 移动平均法 …… 128
10.1.1 简单移动平均法 …… 128
10.1.2 加权移动平均法 …… 130
10.2 平均数趋势整理法 …… 130
10.3 SARS 疫情对旅游人数的影响 …… 132
10.3.1 问题的提出 …… 132
10.3.2 模型的分析与假设 …… 132
10.3.3 模型的建立与求解 …… 133
11 随机型时间序列预测方法 …… 136
11.1 基本概念 …… 136
11.2 随机时间序列预测模型构建方法 …… 137
11.3 上证指数波段预测实证研究 …… 141
11.3.1 数据的平稳化及模型选择 …… 141
11.3.2 模型预报 …… 142
附录 A 数学建模训练题 …… 144
附录 B Matlab 使用简介 …… 163
B1 Matlab 概述 …… 163
B2 Matlab 数值计算功能 …… 164
B3 Matlab 图形功能 …… 170
B4 程序设计 …… 175
B5 Matlab 的应用 …… 180
参考文献 …… 197

1　数学建模导言

1.1　数学模型及其分类

数学建模作为用数学方法解决问题的第一步，它与数学本身有着同样悠久的历史。一个羊倌看着他的羊群进入羊圈，为了确信他的羊没有丢失，他在每只羊进入羊圈时，则在旁边放一颗小石子，如果每天羊全部入圈而他那堆小石子刚好全部放完，则表示他的羊和以前一样多。究竟羊倌数的是石子还是羊，那是毫无区别的，因为羊的数目同石子的数目彼此相等。这实际上就使石子与羊“联系”起来，建立了一个使石子与羊一一对应的数学模型。

（1）什么是数学模型

人们在认识研究现实世界里的客观对象时，常常不是直接面对那个对象的原形，有些是不方便，有些甚至是不可能直接面对原形，因此，常常设计、构造它的各种各样的模型。如各式各样的玩具模型、展览厅里的三峡大坝模型、化学上的分子结构模型等。这些模型都是人们为了一定目的，对客观事物的某一部分进行简化、抽象、提炼出来的原形替代物，集中反映了原形中人们需要的那一部分特征，因而有利于人们对客观对象的认识。数学模型也是反映客观对象特征的，只不过它刻画的是事物在数量方面的特征或数学结构及其变化规律。

数学模型是人们为了认识客观对象在数量方面的特征、定量地分析对象的内在规律、用数学的语言和符号去近似地刻画要研究的那一部分现象时，所得到的一个数学表述。建立数学模型的过程称为数学建模。

（2）数学模型的重要作用

进入20世纪以来，数学以空前的广度和深度向一切领域渗透，作为数学的应用，数学建模也越来越受到人们的重视。在一般工程技术领域，数学模型仍是工程技术人员定量研究有关工程技术问题的重要工具；而随着数学与其他学科领域诸如经济、人口、生态、地质等所谓非物理领域的渗透，一些交叉学科如计量经济学、人口控制论、数学生态学、数学地质学等应运而生；计算机的发展给数学及作为数学应用的数学建模带来了前所未有的机遇和挑战。计算机改变了人类的生活方式、思考方式和研究方式，极大地提高了人们的计算能力、搜索和分析海量数据和信息的能力。今天数学和其他科学、工程和技术之间的联系，比以前更加紧密。很多科学前沿遇到的主要瓶颈是数学建模问题。计算建模正成为许多

学科的通行工具，而计算机只能读懂数学模型，因此“数学化”已成为研究中一个重要的步骤。

（3）数学模型的分类

了解数学模型的分类对于理解别人的数学模型或是给自己建立的数学模型命名都是有用的。数学模型可以按照不同的方式分类，常见有以下的几种。

① 按照模型的应用领域分。如：人口模型、环境模型、交通模型、水资源模型、生态模型、城镇规划模型等。

② 按照建立模型所使用的主要数学方法分。如初等模型、微分方程模型、差分方程模型、统计回归模型、数学规划模型、马氏链模型等。

③ 按是否考虑随机因素，可分为确定性模型和随机性模型。

④ 按应用离散方法或连续方法可分为离散模型和连续模型。

⑤ 按照人们对事物发展过程的了解程度分为白箱模型、灰箱模型和黑箱模型。

此外，根据模型的基本关系分为线性模型与非线性模型，根据是否考虑模型的变化可分为静态模型和动态模型等。

1.2 一个数学建模例子

数学建模面临的实际问题多种多样，建模的目的不同，分析的方法不同，采用的数学工具不同，所得模型的类型也就不同。数学建模常常要使数学知识与其他学科专业知识结合起来，因此，不同应用背景的数学模型也将是千差万别的。但从方法论的意义上看，除了不同数学模型的差异性之外，数学建模过程还是有一些基本的“套路”。本节通过一个数学建模例子，重点说明如何作出合理的、简化的假设，用数学语言确切地表述实际问题，以及建模的结果如何与所研究的客观对象联系起来等。

设河边点 O 的正对岸为点 A，河宽 $OA=h$（图 1.1），水流速度为 a，有一鸭子从点 A 游向点 O，设鸭子（在静水中）的游速为 b（$b>a$），且鸭子游动的方向始终朝着点 O。①设 $h=10\text{m}$，$a=1\text{m/s}$，$b=2\text{m/s}$，用数值解法求渡河所需时间、任意时刻鸭子的位置及游动曲线。②建立任意时刻鸭子的位置和鸭子游动的数学模型，求解析解。

1.2.1 模型的假设

为了使问题确定和简化，实际上已经作了如下假设：

① 假设河宽固定，设为 h，且两岸为平行直线；

② 鸭子游速为 b 及水流速度 a 均为常数；

③ 鸭子游动的方向始终指向 O。

1.2.2 模型的建立与求解

取 O 为坐标原点，河岸朝顺水方向为 x 轴，y 轴指向对岸，如图 1.1 所示。

设时刻 t 鸭子位于点 $P(x, y)$，设起点坐标$(x,y)=(0,h)$，终点坐标 $(0, 0)$，设 θ 为鸭子速度方向与 x 轴正向间的夹角，$\vec{b}=(b\cos\theta, b\sin\theta)=-\dfrac{b\overrightarrow{OP}}{|OP|}=\dfrac{b}{\sqrt{x^2+y^2}}(-x,-y)$，$\vec{a}=(a,0)$，$v=\vec{a}+\vec{b}$ 于是鸭子游动的迹线满足：

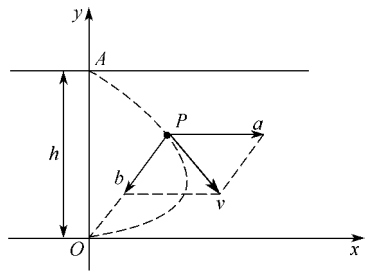


图 1.1　鸭子游动迹线示意图

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=b\cos\theta+a=a-\dfrac{bx}{\sqrt{x^2+y^2}}\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=b\sin\theta=\dfrac{-by}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}$$

$x(0)=0$，$y(0)=h$

(1) 模型的数值解

实际上，从上述方程不能求得 $x(t)$，$y(t)$ 的解析式，但在参数确定的情况下，可以通过数值解得到任意时刻鸭子的位置。设 $x=(x(1),x(2))^{\mathrm{T}}$，$x(1)=x$，$x(2)=y$，编写如下的函数 M 文件：

```
function dx=duhe(t,x)                    %建立名为 duhe 的函数 M 文件
a=1; b=2;
s=sqrt(x(1)^2+x(2)^2);
dx=[a-b*x(1)/s;-b*x(2)/s]; %以向量形式表示方程组
```

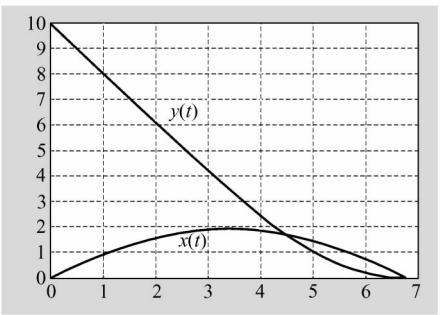
在编写运行程序时，须设定时间 t 的起点终点及步长，可大致估计静水中的渡河时间，并作试探。

```
ts=0:0.5:7;
x0=[0,10];                               % x,y 的初始值
[t,x]=ode45(@duhe,ts,x0);                % 调用 ode45 计算
[t,x]                                    % 输出 t,x(t),y(t)
plot(t,x),grid,                          % 按照数值输出作 x(t),y(t)的图形
gtext('x(t)'),gtext('y(t)'),pause        % 利用鼠标确定字符串位置
plot(x(:,1),x(:,2)),grid,                % 作 y(t)的图形
gtext('x'),gtext('y')
```

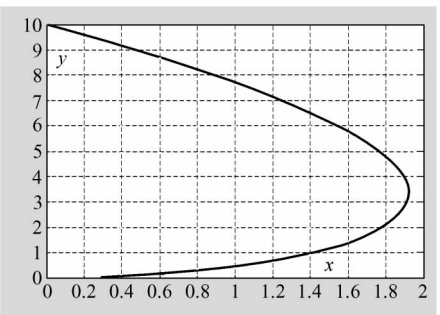
得到的数值结果 $x(t)$，$y(t)$ 为鸭子的位置列入表 1.1。$x(t)$，$y(t)$ 及 $y(x)$ 的图形见图 1.2(a) 和图 1.2(b)。

表 1.1　$h=10$，$a=1$，$b=2$ 时的数值解

t	$x(t)$	$y(t)$	t	$x(t)$	$y(t)$
0	0	10	3.6000	1.9206	3.0917
0.4000	0.3836	9.2002	4.0000	1.8663	2.4336
0.8000	0.7324	8.4019	4.4000	1.7465	1.8260
1.2000	1.0436	7.6070	4.8000	1.5607	1.2819
1.6000	1.3138	6.8177	5.2000	1.3115	0.8151
2.0000	1.5396	6.0370	5.6000	1.0044	0.4422
2.4000	1.7171	5.2687	6.0000	0.6509	0.1756
2.8000	1.8425	4.5175	6.4000	0.2654	0.0284
3.2000	1.9116	3.7894	6.8000	0.0000	0.0000



(a) $x(t), y(t)$ 的图形



(b) $y(x)$ 的图形

图 1.2　$x(t)$，$y(t)$的图形和 $y(x)$ 的图形

（2）模型的解析解

为了得到更精确的运动轨迹，还必须对模型作进一步分析以得到其解析解。鸭子运动速度为：

$$v=(v_x,v_y)=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)=\left(a-\frac{bx}{\sqrt{x^2+y^2}},-\frac{by}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

故有：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{v_x}{v_y}$$

由此得到微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{v_x}{v_y}=-\frac{a\sqrt{x^2+y^2}}{by}+\frac{x}{y},\ x(h)=0$$

求解此齐次微分方程得到鸭子游动的迹线方程为：

$$x=\frac{h}{2}\left[\left(\frac{y}{h}\right)^{1-\frac{a}{b}}-\left(\frac{y}{h}\right)^{1+\frac{a}{b}}\right],\quad 0\leqslant y\leqslant h$$

1.2.3　对解以及问题的进一步讨论

① 关于解可以作进一步分析：如果 $b<a$，由上述迹线方程当 $y\to 0$，得到

$x\to\infty$。因此，这种情况下鸭子是不可能到达对岸的，这与鸭子运动的力学分析结果是一致的。

② 很自然地，还可以探讨如下问题：如果鸭子上岸的地点不超过河对岸下游一定位置（比如与正对岸距离为 l），鸭子的速度大小和方向不变，问鸭子以怎样的游动方向才能以最少的时间到达上岸地点？鸭子能够按要求到达对岸速度应满足什么条件？如果水流速度变化，进一步可研究 2003 年全国数学建模竞赛 D 题：抢渡长江。

1.2.4 建模过程总结

这是一个微分方程应用题，整个解题过程已经包含了建立数学模型的基本内容，即

① 根据问题背景和建模目的作出必要的简化假设——鸭子速度和水速均为常数；

② 用字母和符号表示有关的量（如鸭子速度、水速、时间及位置坐标等）；

③ 利用相应的物理（或其他）规律——牛顿力学有关规律，列出微分方程；

④ 求解微分方程得到鸭子游动轨迹曲线解析解，此处我们还采用了数值解法得到了任意时刻鸭子的位置（坐标）；

⑤ 解的讨论及推广应用等。

1.3 数学建模的基本方法和步骤

1.3.1 数学建模的基本方法

数学建模方法大体上分为机理分析和测试分析两种。机理分析方法是根据对所研究客观对象特性的认识，找出反映内部机理的数量规律，建立的模型常有明确的物理意义或其他实际意义。上节例子用的就是机理分析方法。

在所研究对象内部机理不清楚时，常采用测试分析方法，通过对系统输入、输出数据的测量和统计分析，按照一定准则找出与数据拟合最好的模型。测试分析有一套完整的数学方法，最小二乘法、回归分析等就属于这类方法。

面对一个实际问题用哪一种方法建模，主要取决于人们对研究对象的了解程度和建模目的。有时要将两种方法结合起来，用机理分析建立模型的结构，用测试分析确定模型的参数。

1.3.2 数学建模的一般步骤

关于回归分析建模，确定型与随机型时间序列预测建模步骤和过程在本书相应章节中介绍，在此我们主要针对运用机理分析方法建模的一般过程介绍。建立

需要全本请访问 www.ertongbook.com

数学模型通常经过如下步骤。

（1）问题的分析

数学建模的第一步就应该对问题所给的条件和数据进行分析，明确要解决的问题。通过对问题的分析，明确问题中所给出的信息与哪些学科有关，判断可能用到的知识和方法，最好能确定解决问题的重点和关键所在。

（2）模型的假设

根据问题的复杂程度和建立与求解模型所使用的条件和方法，对所研究的问题进行必要的、合理的假设。合理假设在数学建模中除了起着简化问题的作用之外，还常常对求解方法和使用范围起着限制作用。模型假设的合理性是评价一个模型优劣的重要条件之一。提出假设既要起到简化问题突出主要因素的作用，又不能使问题过于简单和特殊，有时需要在建模过程中对已做的假设进行不断地补充和修改。

（3）模型的建立

建立数学模型除了要有较为广阔的应用数学方面的知识外，还需要有一些相关学科的专门知识。在建立模型之前，首先要明确建模的目的，要善于发挥想象力，注意使用类比法，分析对象与熟悉的其他对象的共性，借用已有的模型，并在此基础上加以修改和推广以便适用于你所研究的问题。根据所作假设和有关数据建立起问题中相关变量或因素之间的数学规律，可以是数学表达式、图形和表格，或者是一个算法等。

（4）模型的求解

对所建立的数学模型在求解过程中常常需要使用相关数学分支的求解方法。有些甚至没有现成的方法可用，还须对问题进行简化假设或对问题采取从特殊到一般的处理方法，包括数值方法等。当然掌握一两个数学工具软件（如 Matlab 等）的使用，对于求解是非常重要的，也将带来极大方便。

（5）模型的分析、检验和应用

对求解结果进行数学上的分析，如结果的误差分析，模型对数据的灵敏性分析等。还需要把所得解及其分析结果翻译回到实际问题，包括解是否合理适用，数学模型的解在实际问题中的意义是什么。模型的解对我们有何指导作用，模型如何应用等。如果经过检验模型还须改进则上述建模过程再来一次循环。

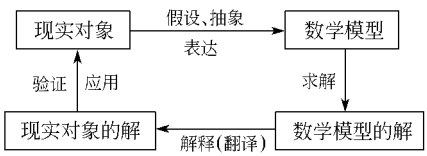


图 1.3　数学建模的全过程

这里归纳的是我们建立数学模型的一些常规步骤，实际上，有时各步之间界限并不分明，比如一个算法有时建模与求解是紧密联系在一起的，建模时也要灵活处理各步之间的关系。现把数学建模的全过程表示为如框图 1.3 所示。

1.4 数学建模论文写作

数学建模的目的是解决实际问题的，要使别人了解你的研究成果，我们的模型及其结论要以论文或报告的形式呈现出来。由于我们的论文不一定是给数学专业人士看的，因此，这种论文与专业论文既有相同之处，也应该有所区别。

从结构上看，一篇学术论文应包含 8 个必要的组成部分，即：题名、作者信息、摘要、关键词、引言、正文、结论和参考文献。正式发表的论文常常也要求有对应的英文题名、摘要、关键词等。

一年一度的大学生数学建模竞赛，已成为规模最大的大学生课外科技活动。数学建模竞赛的开展对于促进数学建模课程的教学及高校数学教学改革起到了积极的推动作用。而作为竞赛成绩评判的唯一依据——建模论文，其重要性是不言而喻的。

由于相当部分同学还缺少科技论文的写作经验，再加上这是一项由三个人在三天时间内完成的并不轻松的任务，本节根据一些参赛队的成功经验及我们指导数学建模竞赛的体会对如何撰写竞赛论文作些介绍。

数学建模竞赛章程规定，对论文的评价应“以假设的合理性、建模的创造性、结果的正确性和文字表述的清晰性”为主要标准。论文则应在反映建模全过程中突出以上特点。

数学建模竞赛实际上是团体赛，每个参赛队由三个人组战。前面我们介绍了数学建模的一般步骤，在建模过程中，队员应有所分工，因此，队员也应将自己负责的工作写出来，或请另一位队员共同完成文字排版工作。通常应由一位文字功底较好的同学作主笔组编论文统揽全局。组编论文前应有一个提纲，使整篇文章层次分明、重点突出、脉络清晰。下面介绍论文各部分应注意的一些问题。

（1）标题

论文标题或题目应该简短精练、高度概括、准确得体、恰如其分。在整篇论文中标题应该起到画龙点睛的作用，让人一看就能明白论文所表达的意思。

（2）摘要

摘要在数学建模论文中显得尤其重要，现在格式要求作为一整页放在正文前面，以便于阅读和评分。一篇论文一般在十页左右甚至更长，评委们不可能有很长的时间去细细阅读，但会认真阅读摘要，摘要应该起到总结和向导的作用。

摘要要求是用精练的语言概括说明使用什么方法、解决什么问题、得到什么结论。如果论文中有独特巧妙的建模方法或有值得说明的杰出工作，也应该在摘要中体现出来。一般科技论文的摘要要求不列举例证、不出现图表和公式、不自我评价。但由于对竞赛摘要只是限制不超过一页，因此字数可适当多些，有关结果如果能用一个表清楚列出的话也是可以的，但建议不要出现数学公式，因为数

学公式中符号代表的意思开始往往是不知道的。

由于是竞赛论文，因此作者姓名只在参加竞赛承诺那一页出现，阅卷时只有编号再也不会出现作者姓名。竞赛论文通常列出 3～5 个关键词，这些词一般与论文主要内容有关，由于标题起到画龙点睛的作用，因此，关键词也常与论文标题有关。

（1）问题重述

甲乙组均是两道题任选一题，问题重述不要照抄原题，只要在这一部分说明你们组研究什么问题，要达到什么目的即可。

（2）正文

一篇论文的主要部分就是正文，整个建模过程包括模型假设、模型的建立与求解及有关结果都将写在正文中。负责各部分工作的竞赛队员应随时将讨论要点、有关假设条件及工作过程记录下来以便写作时利用和参考。正文一般分为若干部分或称为逻辑段，每个逻辑段冠以恰当的标题。这些逻辑段通常与建模步骤和方法有关。但前面介绍的建模全过程的各个步骤是否出现则与论文结构及作者想突出的问题有关。根据以往阅卷的体会有一点值得指出，由于数学建模求解与计算机算法越来越密切，有些参赛论文在文章中只是提供一个程序，这是很难得到高分的，应该先阐述算法的原理和实现过程再提供程序。数学模型也不要一开始就代入数值，开始通常应该用符号表示。

（3）参考文献及附录

参考文献要按照要求格式提供。附录也是竞赛论文中常出现的部分。它虽然不在正文中但应成为正文的很好的补充，一些不是特别重要的程序或者某个定理的证明放在正文中则因为它不是解决问题的重点，但你认为它确实能在一定程度上说明你所做的创造性工作，因此，把它放在附录里，并在正文中相应处说明。当然与解决问题有着关键作用的算法就应放在正文中。

（4）论文修改校对

由于论文上交后再也没有修改机会，因此应注意论文最后的修改校对工作。

① 检查论文是否回答了赛题要求解决的所有问题。当然，如果时间允许，想到的赛题要求之外的相关问题（如果有意义）也可以研究或在论文中提出建设性意见。

② 书写打印论文通常在最后阶段，已经相当疲劳，特别容易出错，但也要尽量避免错别字，尤其是在大小标题、摘要等关键和显眼的地方不要出错。

③ 检查文章格式包括字体等是否符合要求；每个图应该有图题，表格应该有表题，并使整篇文章图、表按顺序编号。

2　插值与拟合

2.1　插值与拟合的基本概念

2.1.1　插值与插值函数

已知由 $g(x)$（可能未知或非常复杂）产生的一批离散数据，$(x_i,\ y_i)$，$i=0,\ 1,\ \cdots,\ n$，且 $n+1$ 个互异插值节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，在插值区间内寻找一个相对简单的函数 $f(x)$，使其满足下列插值条件：

$$f(x_i)=y_i,\quad i=0,1,\cdots,n$$

再利用已求得的 $f(x)$ 计算任一非插值节点 x^* 的近似值 $y^*=f(x^*)$，这就是插值。其中 $f(x)$ 称为插值函数，$g(x)$ 称为被插函数。

下面介绍几种常用的而且有现成 Matlab 命令的插值方法的数学原理。

(1) 分段线性插值

将两个相邻节点用直线连起来，如此形成的一条折线就是分段线性插值函数，记作 $I_n(x)$，它满足 $I_n(x_j)=y_j$，且 $I_n(x)$在每个小区间 $[x_j,\ x_{j+1}]$($j=0,\ 1,\ \cdots,\ n$) 上是线性函数。

$I_n(x)$可以表示为：

$$I_n(x)=\sum_{j=0}^{n}y_j l_j(x)$$

$$l_j(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}, & x_{j-1}\leqslant x\leqslant x_j,\ j=0\ \text{舍去}\\[2ex] \dfrac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}, & x_j\leqslant x\leqslant x_{j+1},\ j=n\ \text{舍去}\\[2ex] 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$I_n(x)$有良好的收敛性，即对于 $x\in[a,\ b]$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n(x)=g(x)$。

用 $I_n(x)$计算 x 点的插值时，只用到 x 左右的两个节点，计算量与节点个数 n 无关。但是 n 越大，分段越多，插值误差越小。Matlab 中有现成的分段线性插值命令：

```
y=interp1(x0,y0,x)
```

其中，x0，y0 为节点数组（同长度），x 为插值点数组，y 为插值数组。

(2) 三次样条插值

三次样条函数记作 $S(x)(a\leqslant x\leqslant b)$，要求它满足以下条件：

① 在每个小区间$[x_{i-1},x_i](i=1,\cdots,n)$上是三次多项式；

② 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上二阶导数连续；

③ $S(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots,n)$。

由条件①，不妨将 $S(x)$ 记为：

$$S(x)=\{S_i(x),x\in[x_{i-1},x_i](i=1,\cdots,n)\},\ S_i(x)=a_ix^3+b_ix^2+c_ix+d_i$$

其中，a_i，b_i，c_i，d_i 为待定系数，共 $4n$ 个。由条件②可得

$$\begin{cases}S_i(x_i)=S_{i+1}(x_i)\\S_i'(x_i)=S_{i+1}'(x_i),i=1,2,\cdots,n-1\\S_i''(x_i)=S_{i+1}''(x_i)\end{cases}$$

上式与条件③共有 $4n-2$ 个方程，为确定 $S(x)$ 的 $4n$ 个待定参数，还需两个条件。在实际应用中通常有以下三种类型的端点条件作为附加条件。

第一类　给定两端点的一阶导数 $S'(x_0)$，$S'(x_n)$。

第二类　给定两端点的二阶导数 $S''(x_0)$，$S''(x_n)$，最常用的是所谓的自然边界条件：$S''(x_0)=S''(x_n)=0$。

第三类　对于周期函数，即两端点已经满足 $S(x_0)=S(x_n)$时，令它们的一阶导数及二阶导数分别相等，即 $S'(x_0)=S'(x_n)$，$S''(x_0)=S''(x_n)$，称为周期条件。

这样，就构成了 $4n$ 元线性方程组，可以证明有唯一解，即 $S(x)$ 被唯一确定。

对于三次样条插值，Matlab 中有现成的命令

```
y=interp1(x0,y0,x,'spline')
```

或者

```
y=spline(x0,y0,x)
```

其中，x0，y0 为节点数组（同长度），x 为插值点数组，y 为插值数组，端点为自然边界条件。

Spline 命令还可以处理上述第一类端点条件，只需将输入数组 y0 改为 yy0=[a y0 b]，

其中，a，b 分别为 $S'(x_0)$，$S'(x_n)$。

（3）高维插值

Matlab 还给出了高维插值函数 interpN()，其中 N 可以为 2，3，…，例如 $N=2$ 时，为二维插值，调用格式为

```
Zi=interp2(x,y,z,xi,yi,'method')
```

其中，x，y，z 为插值节点，zi 为被插值点（xi，yi）处的插值结果。'method'表示采用的插值方法：'nearest'表示最邻近插值；'linear'表示线性插值；'cubic'表示三次插值。所有插值方法都要求 x，y 是单调的网格。

2.1.2 最小二乘拟合

已知一批离散的数据$(x_i, y_i)(i=0, 1, \cdots, n)$，$x_i$ 互不相同，寻求一个拟合函数 $y=f(x)$，使 $f(x_i)$ 与 y_i 的误差平方和在最小二乘意义下最小。在最小二乘意义下确定的 $f(x)$ 称为最小二乘拟合函数。

(1) 一元最小二乘法

给定平面上的点$(x_i, y_i)(i=0, 1, \cdots, n)$，进行曲线拟合有多种方法，最小二乘法是解决曲线拟合最常用的一种方法。最小二乘法的提法是：

求 $f(x)$，使 $\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - y_i]^2$ 达到最小。

拟合时选用一定形式的拟合函数，拟合函数可由一些简单的“基函数”（例如幂函数，三角函数等）$\varphi_0(x)$，$\varphi_1(x)$，$\cdots$，$\varphi_m(x)$ 来线性表示：

$$f(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_m\varphi_m(x)$$

现在要确定系数 c_0，c_1，$\cdots$，c_m，使 δ 达到极小。为此，将 $f(x)$ 的表达式代入 δ 中，δ 就成为 c_0，c_1，$\cdots$，c_m 的函数，令 δ 对 $c_i(i=1,2,\cdots,m)$的偏导数等于零，于是得到 $m+1$ 个方程组，由此求出 $c_i(i=1,2,\cdots,m)$。通常取基函数为 1，x，x^2，x^3，$\cdots$，x^m，这时拟合函数 $f(x)$ 为多项式函数。特别地，当 $m=1$ 时，$f(x)=a+bx$，称为一元线性拟合函数。

(2) 如何选择拟合函数

已知一组数据$(x_i,y_i)(i=0,1,\cdots,n)$，选择什么样的函数 $f(x)$ 呢？一是根据机理分析来确定函数形式，二是根据散点图直观判断函数 $f(x)$ 的形式。要比较两个模型哪个拟合效果更佳，则比较两个模型的残差平方和。残差平方和较小者更佳。

设 $\hat{y}_i$ 为拟合函数的值，y_i 为测量值，则残差 $e=\sum_i (y_i-\hat{y}_i)^2$。

(3) 曲面拟合简介

实际问题中可能遇到曲面拟合问题，可以将一元最小二乘方法的有关概念和结论推广到多元最小二乘方法。已知 m 个自变量 $(x_1,\cdots,x_m)$ 和一个因变量 y 的一组观测值 $(x_{1i},x_{2i},\cdots,x_{mi},y_i)(i=1,2,\cdots,n)$，要确定函数 $y=f(x_1,\cdots,x_m)$，使得

$$\min J = \sum_{i=1}^{n} [f(x_{1i},x_{2i},\cdots,x_{mi}) - y_i]^2$$

一般地，首先通过机理分析或数据的直观判断，去确定函数 $y=f(x_1,\cdots,x_m)$ 的结构，假定函数中含有未知参数 a_1，a_2，$\cdots$，a_k，然后，通过最小二乘原理具体确定参数 a_1，a_2，$\cdots$，a_k。

需要全本请访问 www.ertongbook.com