大学数学系列丛书

数学建模基础

王兵团　主编

清 华 大 学 出 版 社
北京交通大学出版社
· 北京 ·

内 容 简 介

本书侧重数学建模知识的了解和数学建模能力及意识的培养，由浅入深，便于学生自学和教师教学。书中的内容主要以初、中等数学建模问题为主，不追求高深全的数学建模内容，以求达到降低数学建模的学习起点和通俗易懂的目的。读者只要学过微积分、线性代数和了解简单的概率统计知识就可以学习本书。

本书可作为高等学校各专业的专科生、高职生、本科生、研究生及工程技术人员学习数学建模课程的教材或参考书。

摇图书在版编目（悦陨）数据

摇数学建模基础／王兵团主编援—北京：清华大学出版社；北京交通大学出版社，圆园园员
摇（大学数学系列丛书）
摇陨杂月晕苑—愿员园园圆—源员圆—载

摇Ⅰ援数…摇Ⅱ援王…摇Ⅲ援数学模型-高等学校-教材摇Ⅳ援韵员圆

摇中国版本图书馆悦陨孕数据核字（圆园园源）第员远猿源员号

责任编辑：黎摇丹
出 版 者：清 华 大 学 出 版 社摇摇邮编：员园园园愿源摇摇电话：园员园－远圆苑苑远怨远怨
北京交通大学出版社摇摇邮编：员园园园源源摇摇电话：园员园－缘员远愿远源员源
印 刷 者：北京东光印刷厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开摇摇本：苑愿苑伊员园怨圆摇员／员远摇摇印张：圆员援缘摇摇字数：猿缘愿千字
版摇摇次：圆园园源年员月第员版摇摇圆园园源年员月第员次印刷
书摇摇号：陨杂月晕苑—愿员园园圆—源员圆—载／韵·圆圆
印摇摇数：员～源园园园册摇摇定价：圆愿援园园元

总序

摇摇随着人类进入 圆贝世纪，科学技术的发展日益迅猛。在当今这个信息时代中，各种竞争的关键就是科学技术的竞争，科学技术的竞争突出地体现在人才的竞争上，而人才的竞争其实就是教育的竞争。当前的知识经济时代，将对人类知识和科学技术的发展、经济增长因素和方式乃至社会生活，引发新的、深刻的变化。在知识经济时代，国家的竞争能力和综合国力的强弱，不仅取决于其拥有的自然资源，更重要的是取决于科学技术和知识更新的发展水平，尤其是知识创新与技术创新的能力。知识经济的第一资源是智力资源，拥有智力资源的是人才，人才来自教育。要提高民族的创新能力，归根到底要提高全体民众的教育水平，培养大批具有创新意识、创新精神和创新能力的人才。

在我国的高等教育中，数学教育起着举足轻重的作用。许多专家指出，数学教育在人类的精神营养中，确实有“精神钙质”的作用，因为数学对一个人的思想方法、知识结构与创造能力的形成起着不可缺少的作用。很难想像，一个数学知识贫瘠的人，会在科学上有所建树。因此，全面提高我国理工科大学中非数学专业大学生的数学水平，将关系到我国各行各业高级专门人才的素质和能力，关系到我国未来科学技术的发展水平和在世界上的竞争力，是国家百年树人基业中的重要一环。

正是基于以上的考虑，我们借鉴了我国近几年高等学校教学改革，特别是数学教学改革的经验，借鉴近几年我校数学教学改革的一些实践与做法，组织一批在大学数学公共课教学中有丰富教学经验的教师，在精心筹划、多方面研讨的基础上，编写了这一套“大学数学系列丛书”。

本系列丛书在大学数学的三门重要的基础课教材——《微积分》、《线性代数与解析几何》、《概率论与数理统计》上下了很大的功夫。不仅按照教学的基本要求仔细编写了各章内容，而且在各章中也融入了当前教学改革的一些经验；同时注意编写了与主教材配套的辅导教材，这样可以帮助学生更好地理解主教材中的内容和学习方法。在辅导教材的编写上，注重对主教材内容知识的扩展，同时也帮助学生掌握好各门课程的学习方法。但是，我们反对将主教材中的习题在辅导教材中简单地给出题解的做法。我们认为，这种做法是对大学生的学习积极

性和创造性的扼杀。另外，为了适应目前大学数学教学改革的需要，我们编写了《数学实验基础》和《数学建模基础》两本教材。我们认为，数学实验、数学建模与传统大学数学教学内容相结合，将会极大地丰富数学教学内容，增强大学生学习数学、应用数学的兴趣与积极性，为他们在将来的工作中运用数学解决实际问题打下一个良好的基础。同时，数学实验课与数学建模课的开设，将会给传统的数学教学方法带来更有意义的改革。另外，为了配合我校的“高等数学方法”选修课及参加北京市大学生（非数学专业）数学竞赛培训的需要，我们还编写了《高等数学方法导引》教材，使大学生中有“数学才赋”的同学能更进一步地掌握高等数学的解题方法。

本系列丛书在编写过程中，得到了北京交通大学教务处的大力支持。在教材的出版中，得到了北京交通大学出版社郑光信社长和贾慧娟副社长的热情帮助。在此，编委会向他们表示衷心的感谢。

本系列丛书适用于高等院校的理工科专业和经济管理类专业的数学教学，也可以作为相关专业学生的自学教材和培训教材。

本系列丛书的编写是大学数学基础课教学中的一种探索，欢迎读者在教材的使用与阅读中不吝赐教，我们将在今后对其进行修订，使其更加完善。

“大学数学系列丛书”编委会

圆园园源年 员员月

“大学数学系列丛书”编写委员会成员名单

前言

摇摇数学建模是利用数学工具解决实际问题的主要手段，是联系数学与实际问题的桥梁，其中得到的数学结构就是数学模型。通过对数学模型的求解可以获得相应实际问题的解决方案或对相应实际问题有更深入的了解。数学建模在科学技术发展中的重要作用越来越受到社会的普遍重视，并已经成为现代科学技术工作者必备的重要能力之一。

数学建模教学的目的是培养学生认识问题、解决问题的能力，它涉及对问题积极思考的习惯、理论联系实际并善于发现问题的能力、能在口头和文字上清楚表达自己思想、熟练使用计算机的技能和培养集体合作的团队精神等，所有这些对提高学生的素质都是很有帮助的，并且非常符合当今提倡素质教育的要求。我们认为学生科研素质的提高是一个不断积累完善的过程，具有循序渐进的特点。既然数学建模教学可以达到提高学生科研素质的目的，那么就应该让学生较早接触数学建模的知识，了解数学建模的方法，这样可以使学生在校期间有更多的时间锻炼自己的科研素质。在这种思想的指导下，我们在总结多年教授数学建模课程和辅导大学生数学建模竞赛培训工作的基础上编写了本书。为使学生能顺利并较早地开始学习数学建模课程，全书编写侧重数学建模知识的了解和数学建模能力及意识的培养，由浅入深，便于学生自学和教师教学。本书的内容主要以初、中等数学建模问题为主，不追求高深全的数学建模内容，以求达到降低数学建模的学习起点和通俗易懂的目的。虽然书中内容涉及微积分、线性代数、概率统计、计算方法、运筹学和离散数学等知识，但读者只要学过微积分、线性代数和了解简单的概率统计知识就可以学习本书，因此利用本书可以使学生在大学第二学年就能学习数学建模课程，而不必等到第三、四学年才开始学习数学建模课程。

全书共分为 远章，内容涉及数学建模基础知识、数值模型、微分方程模型、随机模型、运筹学模型和离散模型。此外，为使学生了解和参加国际国内的数学建模竞赛，本书在附录 粤中介绍了数学建模竞赛的相关内容；在附录 月中给出了北京交通大学学生参加数学建模竞赛获得一等奖的部分获奖论文；在附录 悦中介绍了求解数学规划问题的 蕴晕郧韵的数学软件；在附录阅中介绍了与英文文献查找相关的一些内容。附录中的获奖论文没有经过删减，也没有给出点评，目的是让想参加数学建模竞赛的同学通过阅读获奖论文原文了解数学建

模竞赛论文的整体情况，自己思考总结并从这些获奖原文中得到启发。本书把 酝葬贼造葬遭 和 酝葬躁造藻 数学软件作为处理数学建模问题的计算机平台，读者如果想了解有关 酝葬贼造葬遭 和 酝葬躁造藻 数学软件使用方面的知识，可以参考有关的书籍。

本书第 员、圆章和附录由王兵团编写，第 猿章由王晓霞和刘迎东编写，第 源章由研究生王笛编写，第 缘章由袁岗编写，第 远章由武清编写。范秉理老师编写了第 圆章快速傅里叶变换问题一节的内容。此外，杨景、陈远旭、张辉同学也参与了本书的编写工作。

本书的一些建模问题是我们在开设数学建模选修课和辅导学生数学建模竞赛时多次讲授的问题，实践表明它们都是初学数学建模的学生很感兴趣的建模问题。由于水平有限，书中难免有不当之处，恳请广大读者指正。

王兵团

于北京交通大学理学院

[illegible]

第 1 章　数学建模入门

1.1　数学建模的概念

数学建模，简单地讲就是用数学知识和方法解决实际问题援建模过程中，首先要把实际问题用数学语言描述为一些大家所熟悉的数学问题，然后通过对这些数学问题的求解以获得相应实际问题的解决方案或对相应实际问题有更深入的了解援

数学建模问题不是一个纯数学的问题援以 圆园园员年全国大学生数学建模竞赛考题为例，此年出了两个赛题，让参赛队在其中任选一个来做，这两个赛题是“血管的三维重建问题和公交车调度问题”援第一个赛题是生物医学方面的问题，而第二个赛题是交通问题援再看看以前各届国内外数学建模试题，更是五花八门，涉及动物保护、施肥方案、抓走私船的策略、应急设施的选址等内容援实际上，熟悉科学研究的人会发现数学建模正是科学研究工作者及在读研究生完成毕业论文要做的工作援

由于数学建模具有可以培养学生解决实际问题能力的特点，而且在建模过程中要用到很多数学和计算机应用方面的知识，这对在校大学生学好数学和计算机课程、提高解决实际问题的能力是非常有益的援因此，了解和学习数学建模知识对渴望提高自身科研素质的读者无疑是很有帮助的援

要学习数学建模，应该了解如下与数学建模有关的概念援

(员 原型(孕则燥贼燥贼赠责藻摇人们在现实世界中关心、研究或从事生产、管理的实际对象称为原型援原型包括研究对象、实际问题等援

(圆 模型(酝燥凿藻造摇为某个目的将原型的某一部分信息进行简缩、提炼而构成的原型替代物称为模型援模型有直观模型、物理模型、思维模型、计算模型、数学模型等援一个原型可以有多个不同的模型援

(猿 数学模型摇由数字、字母或其他数学符号组成，描述实际对象数量规律的数学公式、图形或算法称为数学模型援

现实对象与数学模型具有如图 员员所示的关系援

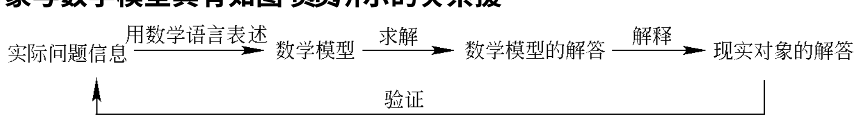

图 员员

1.2　数学建模的方法和步骤

数学建模乍听起来似乎很高深，但实际上并非如此援例如，在中学的数学课程中做应用题列出的数学式子就是简单的数学模型，而做题的过程就是在进行简单的数学建模援下面用一道代数应用题的求解过程来说明数学建模的步骤援

[例] 摇一个笼子里装有鸡和兔若干只，已知它们共有 愿个头和 圆圆只脚，问该笼子中有多少只鸡和多少只兔？

解摇设笼中有鸡 曾只，兔 赠只，由已知条件有

$$\begin{cases}曾垣赠越愿 \\ 圆曾垣源赠越圆圆\end{cases}$$

求解以上二元方程组，得 曾越缘，赠越猿，即该笼子中有鸡 缘只，兔 猿只援将此结果代入原题进行验证可知所求结果正确援

根据例题可以得出数学建模的大致步骤为：

① 根据问题的背景和建模的目的做出假设（本题隐含的假设是鸡、兔正常，畸形的鸡、兔除外）；

② 用字母表示要求的未知量；

③ 根据已知的常识列出数学式子或图形（本题中的常识为鸡、兔都有一个头且鸡有 圆只脚，兔有 源只脚）；

④ 求出数学式子的解答；

⑤ 验证所得结果的正确性援

如果想对某个实际问题进行数学建模，通常要先了解该问题的实际背景和建模目的，尽量弄清楚要建模的问题属于哪一类学科，然后通过互联网或图书馆查找、搜集与建模要求有关的资料和信息，为接下来的数学建模做准备，这一过程称为模型准备援由于人们所掌握的专业知识是有限的，而实际问题往往是多样的、复杂的，所以模型准备对做好数学建模问题是非常重要的援

一个实际问题往往会涉及很多因素，如果把涉及的所有因素都考虑到，既不可能也没必要，而且还会使问题复杂化而导致建模失败援要想把实际问题变为数学问题，需要对其进行必要的、合理的简化和假设，这一过程称为模型假设援在明确建模目的和掌握相关资料的基础上，略去一些次要因素，以主要矛盾为主来对该实际问题进行适当的简化，并提出合理的假设，这样可以为数学建模带来方便，进而使问题得到解决援一般地，所得建模的结果依赖于对应模型的假设，模型假设到何种程度取决于经验和具体问题援在整个建模过程中，模型假设可以通过模型的不断修改得到逐步完善援

有了模型假设，就可以选择适当的数学工具并根据已有的知识和搜集的信息来描述变量之间的关系或其他数学结构（如数学公式、定理、算法等）了，这一过程称为模型构成援在进

行模型构成时，可以使用各种各样的数学理论和方法，必要时还需要创造新的数学理论和方法，但要注意的是在保证精度的条件下尽量用简单的数学方法援要求建模者对所有数学学科都精通是做不到的，但做到了解这些学科能解决哪一类问题和大致上怎样解决对开阔思路是很有帮助的援此外，根据不同对象的一些相似性，借用某些学科中的数学模型，也是模型构成中常使用的方法援模型构成是数学建模的关键援

在模型构成中建立的数学模型可以采用解方程、推理、图解、计算机模拟、定理证明等各种传统的和现代的数学方法进行求解，其中有些工作可以用计算机软件来完成援建模的目的是解释自然现象、寻找规律以解决实际问题援要达到此目的，还需对获得的结果进行数学分析，如分析变量之间的依赖关系和稳定状况等，这一过程称为模型求解与分析援

把模型的分析结果与研究的实际问题做比较，以检验模型的合理性，这一过程称为模型检验援模型检验对建模的成败是很重要的，如果检验结果不符合实际，应该修改、补充假设或改换其他数学方法，重新做模型构成援通常，一个模型要经过多次反复修改才能得到满意的结果援

利用建模中获得的正确模型对研究的实际问题给出预报或对类似实际问题进行分析、解释和预报以供决策者参考，这一过程称为模型应用援

以上数学建模的一般步骤可以用图 员圆加以说明援

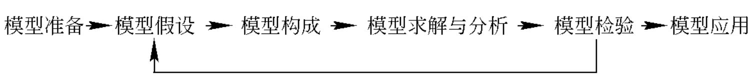

图 员圆

需要指出的是，上述数学建模一般步骤中的每个过程不必在每个建模问题中都出现，而且有时各个过程之间没有明显的界限，因此在建模时不必在形式上按部就班，只要反映出建模的特点即可援

1.3 基本数学建模示例

1.3.1 椅子的摆放问题

椅子能在不平的地面上放稳吗？下面用数学建模的方法解决此问题援

模型准备

仔细分析本问题的实质发现本问题与椅子脚、地面及椅子脚和地面是否接触有关援如果把椅子脚看成平面上的点，并引入椅子脚和地面距离的函数关系就可以将问题与平面几何和连续函数联系起来，从而可以用几何知识和连续函数知识来进行数学建模援

模型假设

为了讨论问题方便，对问题进行简化，先做出如下三个假设援

(员) 椅子的四条腿一样长，椅子脚与地面接触可以视为一个点，且四脚连线是正方形(对椅子的假设)援

(圆) 地面高度是连续变化的，沿任何方向都不出现间断(对地面的假设)援

(猿) 椅子放在地面上至少有三只脚同时着地(对椅子和地面之间关系的假设)援

模型构成

根据上述假设进行本问题的模型构成援用变量表示椅子的位置，引入平面图形及坐标系如图 员援猿所示援图中 粤、月、悦、阅为椅子的四只脚，坐标系原点选为椅子中心，坐标轴选为椅子四只脚的对角线援于是由假设(圆)，椅子的移动位置可以由正方形沿坐标原点旋转的角度 θ 来惟一表示，而且椅子脚与地面的垂直距离就成为 θ 的函数援注意到正方形的中心对称性，可以用椅子的相对两个脚与地面的距离之和来表示这对应两个脚与地面的距离关系，这样用一个函数就可以描述椅子两个脚是否着地的情况援本题引入两个函数即可描述椅子四个脚是否着地的情况援

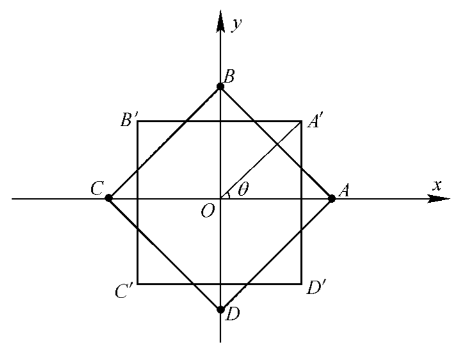

图 员援猿

记函数 枣(θ) 为椅子脚 粤、悦与地面的垂直距离之和，函数 早(θ) 为椅子脚 月、阅与地面的垂直距离之和，则有 枣(θ) ≥园，早(θ) ≥园，且它们都是 θ 的连续函数援由假设(猿)，对任意的 θ，枣(θ)、早(θ) 至少有一个为零，不妨设当 θ 越园时，枣(园)跃园，早(园)越园，故问题可以归为证明如下数学命题援

数学命题(问题的数学模型)摇已知 枣(θ)、早(θ) 都是 θ 的非负连续函数，对任意的 θ，有 枣(θ)早(θ) 越园，且 枣(园)跃园，早(园)越园，则存在 θ园，使得 枣(θ园)越早(θ园)越园援

模型求解

证明：将椅子旋转 怨园毅，对角线 粤悦与 月阅互换，故 枣(园)跃园，早(园)越园变为 枣$\left(\frac{\pi}{圆}\right)$越园，早$\left(\frac{\pi}{圆}\right)$跃园援构造函数 澡($\theta$)越枣($\theta$)原早($\theta$)，则有 澡(园)跃园，澡$\left(\frac{\pi}{圆}\right)$约园，且 澡($\theta$) 也是连续函数援

显然，澡(θ) 在闭区间$\left[园，\frac{\pi}{圆}\right]$上连续援由连续函数的零点定理知，必存在一个 θ园∈$\left(园，\frac{\pi}{圆}\right)$，使

得 澡($\theta_{园}$) 越园 即存在 $\theta_{园}\in\left(园, \frac{\pi}{圆}\right)$，使得 枣($\theta_{园}$) 越早($\theta_{园}$) 援由于对任意的 θ，有 枣(θ) 早(θ) 越园 特别有 枣($\theta_{园}$) 早($\theta_{园}$) 越园 于是 枣($\theta_{园}$)、早($\theta_{园}$) 至少有一个为零，从而有 枣($\theta_{园}$) 越早($\theta_{园}$) 越园援证毕援

简评摇问题初看起来似乎与数学没有什么关系，不易用数学建模来解决，但通过如上处理把问题变为一个数学定理的证明，使其可以用数学建模来解决，从中可以看到数学建模的重要作用援本题给出的启示是：对于一些表面上与数学没有关系的实际问题也可以用数学建模的方法来解决，此类问题建模的着眼点是寻找、分析问题中出现的主要对象及其隐含的数量关系，通过适当简化与假设将其变为数学问题援

1.3.2 双层玻璃的功效问题

北方城镇的窗户玻璃是双层的，这样做的目的是使室内保温，试用数学建模的方法给出双层玻璃能减少热量损失的定量分析结果援

模型准备

本问题与热量的传播形式、温度有关援检索有关的资料得到与热量传播有关的一个结果——热传导物理定律，即厚度为 凿的均匀介质，两侧温度差为 Δ栽，则单位时间内由温度高的一侧向温度低的一侧通过单位面积的热量 匝与 Δ栽成正比，与 凿成反比，即

$$\text{匝越噪}\frac{\Delta \text{栽}}{\text{凿}}$$

其中，噪为热传导系数援

模型假设

根据以上定律做如下假设援

(员) 室内的热量传播只有传导形式 (不考虑对流、辐射) 援

(圆) 室内温度与室外温度保持不变 (即单位时间通过窗户单位面积的热量是常数) 援

(猿) 玻璃厚度一定，玻璃材料均匀 (热传导系数是常数) 援

模型构成

如图 员源所示，其中的符号表示为：

凿——玻璃厚度；

栽员——室内温度；

栽圆——室外温度；

栽葬——靠近内层玻璃的温度；

栽遭——靠近外层玻璃的温度；

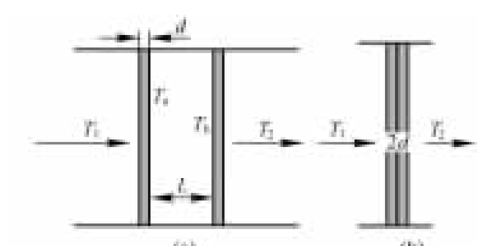

图 员源

蕴——玻璃之间的距离；

噪$_{贡}$——玻璃热传导系数；

噪$_{圈}$——空气热传导系数援

对中间有缝隙的双层玻璃，由热量守恒定律应有：穿过内层玻璃的热量等于穿过中间空气层的热量，等于穿过外层玻璃的热量援所以根据热传导物理定律，得

匝越噪$_{贡}$ $\frac{栽_{贡}原栽_{葬}}{凿}$ 越噪$_{圈}$ $\frac{栽_{葬}原栽_{遭}}{蕴}$ 越噪$_{贡}$ $\frac{栽_{遭}原栽_{圈}}{凿}$

消去不易测量的 栽$_{葬}$、栽$_{遭}$，有

匝越噪$_{贡}$ $\frac{栽_{贡}原栽_{圈}}{凿(泽垣圆)}$

其中

泽越枣 $\frac{噪_{贡}}{噪_{圈}}$，澡越 $\frac{蕴}{凿}$

对中间无缝隙的双层玻璃，可以视做厚度为 圆凿的单层玻璃，故根据热传导物理定律，有

匝忆越噪$_{贡}$ $\frac{栽_{贡}原栽_{圈}}{圆凿}$

而

$\frac{匝}{匝忆}$ 越 $\frac{圆}{泽垣圆}$

即有 匝约匝忆

此式说明双层玻璃比单层玻璃保温援

为得到定量结果，考虑 泽的值，查资料有

常用玻璃摇噪$_{贡}$越园援源～园援愿园园原猿 辕（皂· 噪）

静止的干燥空气摇噪$_{圈}$越园援园圆缘园原猿 辕（皂· 噪）

若取最保守的估计，有

$\frac{噪_{贡}}{噪_{圈}}$ 越员远，摇 $\frac{匝}{匝忆}$ 越 $\frac{员}{愿澡垣员}$，摇澡越 $\frac{蕴}{凿}$

由于 $\frac{匝}{匝忆}$ 可以反映双层玻璃在减少热量损失的功效，在最保守估计的情形考察它的取值情况援

从图 员缘中可知，此函数无极小值，且当 澡从零变大时，$\frac{匝}{匝忆}$ 迅速下降，但 澡超过 源后下降变慢援从节约材料方面考虑，澡不宜选择过大，以免浪费材料援如果取 澡≈源，有

$\frac{匝}{匝忆}$ ≈猿豫

这说明在最保守估计下，玻璃之间的距离约为玻璃厚度的 源

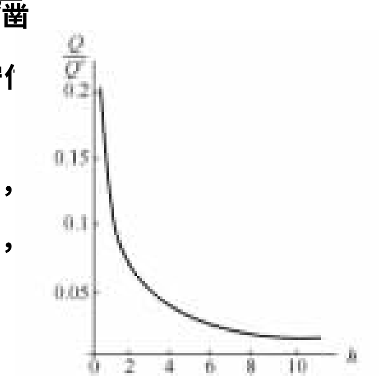

图 员缘

倍时，双层玻璃比单层玻璃避免热量损失可达 怨缘豫援

简评摇本问题给出的启示是：对于不太熟悉的问题，可以根据实际问题涉及的概念着手去搜索有利于进行数学建模的结论来建模，此时建模中的假设要以相应有用结论成立的条件给出援此外，本题通过对减少热量损失功效的处理给出了处理没有函数极值的求极值问题的一个解决方法援

1.3.3 搭积木问题

将一块积木作为基础，在它上面叠放其他积木，问上下积木之间的“向右前伸”可以达到多少？

模型准备

这个问题涉及重心的概念援关于重心的结果有：设 曾赠平面上有 灶个质点，它们的坐标分别为 ($\text{曾}_{\text{员}}$，$\text{赠}_{\text{员}}$)，($\text{曾}_{\text{圆}}$，$\text{赠}_{\text{圆}}$)，…，($\text{曾}_{\text{灶}}$，$\text{赠}_{\text{灶}}$)，对应的质量分别为 $\text{皂}_{\text{员}}$，$\text{皂}_{\text{圆}}$，…，$\text{皂}_{\text{灶}}$，则该质点系的重心坐标 ($\bar{\text{曾}}$，$\bar{\text{赠}}$)满足的关系式为

$$\bar{\text{曾}}\text{越}\frac{\sum\limits_{\text{蚤越员}}^{\text{灶}}\text{皂}_{\text{蚤}}\text{曾}_{\text{蚤}}}{\sum\limits_{\text{蚤越员}}^{\text{灶}}\text{皂}_{\text{蚤}}},\quad \bar{\text{赠}}\text{越}\frac{\sum\limits_{\text{蚤越员}}^{\text{灶}}\text{皂}_{\text{蚤}}\text{赠}_{\text{蚤}}}{\sum\limits_{\text{蚤越员}}^{\text{灶}}\text{皂}_{\text{蚤}}}$$

此外，每个刚性的物体都有重心援重心的意义在于：当物体 粤被物体 月支撑时，只要它的重心位于物体 月的正上方，粤就会获得很好的平衡；如果 粤的重心超出了 月的边缘，粤就会落下来援对于均匀密度的物体，其实际重心就是几何中心援

因为本问题主要与重心的水平位置（重心的 曾坐标）有关，与垂直位置（重心的 赠坐标）无关，所以只要研究重心的水平坐标即可援

模型假设

(员) 所有积木的长度和重量均为一个单位援

(圆) 参与叠放的积木有足够多援

(猿) 每块积木的密度都是均匀的，密度系数相同援

(源) 最底层的积木可以完全水平且平稳地放在地面上援

模型构成

员 考虑两块积木的叠放情况

对只有两块积木的叠放，注意到此时叠放后的积木平衡主要取决于上面的积木，而下面的积木只起到支撑作用援假设在叠放平衡的前提下，上面积木超过下面积木右端的最大前伸距离 曾，选择下面积木的最右端为坐标原点，建立如图 员远所示的坐标系援因为积木是均匀的，所以它的重心在其中心位置，且其质量可

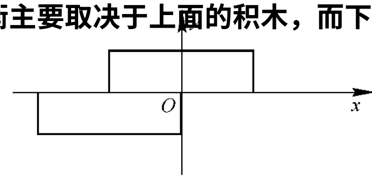

图 员远

以认为是集中在重心的，于是每个积木可以认为是质量为 员且其坐标在重心位置的质点援因为下面的积木总是稳定的，要想上面的积木与下面的积木离开最大的位移且不掉下来，则上面的积木重心应该恰好在底下积木的最右端位置援因此可以得到上面积木在位移最大且不掉下来的中心坐标为 $\text{曾越}\frac{\text{员}}{\text{圆}}$(因为积木的长度是 员)，于是上面的积木可以向右前伸的最大距离为 $\frac{\text{员}}{\text{圆}}$援

圆　考虑 灶垣员块积木的叠放情况

两块积木的情况解决了，如果再加一块积木，叠放情况如何呢？如果增加的积木放在原来两块积木的上边，那么此积木是不能再向右前伸了(为什么)，除非再移动底下的积木，但这样会使问题复杂化，因为这里讨论的是建模问题，不是怎样搭积木的问题援为了便于问题的讨论，把前两块搭好的积木看做一个整体且不再移动它们之间的相对位置，而把增加的积木插入在最底下的积木下方，于是问题又归结为两块积木的叠放问题，不过这次是质量不同的两块积木的叠放问题援这个处理可以推广到 灶垣员块积木的叠放问题，即假设已经叠放好灶(灶跃员) 块积木后，再加一块积木的叠放问题援

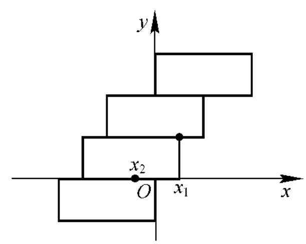

图 员苑

下面就 灶垣员(灶跃员) 块积木的叠放问题来讨论援假设增加的一块积木插入最底层，选择底层积木的最右端为坐标原点建立如图坐标系(如图 员苑所示)援考虑上面的 灶块积木的重心关系，把上面的 灶块积木分成两部分：从最高层开始的前灶原员块积木，记它们的水平重心为 $\text{曾}_{\text{员}}$，总质量为 灶原员；与最底层积木相连的第 灶块积木，记它的水平重心为 $\text{曾}_{\text{圆}}$，质量为 员援

此外，把上面的 灶块积木看做一个整体，并记它的重心水平坐标为 $\bar{\text{曾}}$ 显然灶块积木的质量为 灶援那么，在保证平衡的前提下，上面 灶块积木的水平重心应该恰好在最底层积木的右端，即有 $\bar{\text{曾}}\text{越园}$援假设第 灶块积木超过最底层积木右端的最大前伸距离为 扎，同样在保证平衡的前提下，从最高层开始的前 灶原员块积木总重心的水平坐标为 扎，即有 $\text{曾}_{\text{员}}\text{越扎}$，而第 灶块积木的水平重心在距第 灶块积木左端的 $\frac{\text{员}}{\text{圆}}$ 处，于是在图 员苑的坐标系下，第 灶块积木的水平重心坐标为 $\text{曾}_{\text{圆}}\text{越扎原}\frac{\text{员}}{\text{圆}}$援故由重心的关系，有

$$\bar{\text{曾}}\text{越}\frac{\text{曾}_{\text{员}}\cdot(\text{灶原员})\text{垣}\text{曾}_{\text{圆}}\cdot\text{员}}{\text{灶}}\text{越}\frac{\text{扎}\cdot(\text{灶原员})\text{垣}\left(\text{扎原}\frac{\text{员}}{\text{圆}}\right)}{\text{灶}}\text{越园}$$

$$\text{扎}\cdot(\text{灶原员})\text{垣}\left(\text{扎原}\frac{\text{员}}{\text{圆}}\right)\text{越园}\Rightarrow\text{扎越}\frac{\text{员}}{\text{圆灶}}$$

于是对 猿块积木(即 灶越圆)的叠放有，第 猿块积木的右端到第 员块积木的右端距离最远

可以前伸

$$\frac{员}{圆}垣\frac{员}{源}$$

对 源块积木 (即 灶越猿) 的叠放有，第 源块积木的右端到第 员块积木的右端距离最远可以前伸

$$\frac{员}{圆}垣\frac{员}{源}垣\frac{员}{远}$$

对 灶垣员块积木的叠放，设从第 灶垣员块积木的右端到第 员块积木的右端最远距离为 $凿_{灶垣员}$，则有

$$凿_{灶垣员}越\frac{员}{圆}垣\frac{员}{源}垣\cdots垣\frac{员}{圆灶}$$

所以当 灶→肆时，有 $凿_{灶垣员}$→肆援这说明随着积木数量的无限增加，最顶层的积木可以前伸到无限远的地方援

简评摇本问题给出的启示是：当问题涉及较多对象时，对考虑的问题进行合理的分类往往会使问题变得清晰援此外，一些看似不可能的事情其实并非不可能援

1.3.4 四足动物的身长与体重关系问题

四足动物的身 (不包括头尾) 长与其体重有什么关系？这个问题有一定的实际意义援例如，生猪收购站的人员或养猪专业户，如果能从生猪的身长估计它的重量可以给他们带来很大方便援

模型准备

四足动物的生理构造因种类不同而有所差异，如果陷入生物学对复杂生理结构的研究，将很难得到有价值的模型援为此可以在较粗浅假设的基础上，建立动物的身长和体重的比例关系援本问题与体积和弹性力学有关，搜集与此有关的资料得到弹性力学中两端固定的弹性梁的一个结果：长度为 蕴的圆柱形弹性梁在自身重力 枣的作用下，弹性梁的最大弯曲 增与重力 枣和梁的长度 蕴的立方成正比，与梁的截面面积 泽和梁的直径 凿的平方成反比，即

$$增\propto\frac{枣蕴^{猿}}{泽凿^{圆}}$$

利用这个结果，采用类比的方法给出以下假设援

模型假设

(员) 设四足动物的躯干 (不包括头、尾) 是长度为 蕴、断面直径为 凿的圆柱体，其体积为 皂援

(圆) 四足动物的躯干 (不包括头、尾) 重量与其体重相同，记为 枣援

(猿) 四足动物可看做一根支撑在四肢上的弹性梁，其腰部的最大下垂对应弹性梁的最大弯曲，记为 增援

模型构成

根据弹性理论结果及重量与体积成正比关系，有

$$枣 \propto 皂,\ 皂 \propto 濡蕴$$

由正比关系的传递性，得

$$增 \propto \frac{濡蕴}{濡酌} 越 \frac{蕴}{酌} \Rightarrow \frac{增}{蕴} \propto \frac{蕴}{酌}$$

上式多一个变量 增 为替代变量 增 注意到 $\frac{增}{蕴}$ 是动物躯干的相对下垂度，从生物进化的观点讨论相对下垂度：若 $\frac{增}{蕴}$ 太大，四肢将无法支撑，此种动物必被淘汰；若 $\frac{增}{蕴}$ 太小，四肢的材料和尺寸超过了支撑躯体的需要，无疑是一种浪费，也不符合进化理论援因此从生物学的角度可以确定，对于每一种生存下来的动物，经过长期进化后，其相对下垂度 $\frac{增}{蕴}$ 已经达到其最合适的数值，应该接近一个常数（当然，不同种类的动物，常数值不同）援于是可以得出 酌 ∝ 蕴，再由 枣 ∝ 濡蕴 和 泽 ∝ 酌 得 枣 ∝ 蕴，由此得到四足动物体重与躯干长度的关系为

$$枣越噪蕴$$

此关系式即为本问题的数学模型援

模型应用

如果对于某一种四足动物，如生猪，可以根据统计数据确定公式中的比例常数 噪 从而可得到用该类动物的躯体长度估计其体重的公式援

简评摇发挥想像力，利用类比方法对问题进行大胆的假设和简化是数学建模的一个重要方法，但使用此方法时要注意对所得的数学模型进行检验援此外，从一系列的比例关系着手推导模型可以使推导问题大大简化援

1.3.5 圆杆堆垛问题

把若干不同半径的圆柱形钢杆水平地堆放在一个长方体箱子里，若已知每根杆的半径和最底层各杆的中心坐标，怎样求出其他杆的中心坐标？

模型准备

本问题是一个解析几何问题，利用解析几何的有关结论即可求解援

模型假设

（员） 箱中最底层的杆接触箱底或紧靠箱壁援

（圆） 除最底层外，箱中的每一根圆杆都恰有两根杆支撑援