

新专题教程 高中数学 7

数学建模

袁震东 赵小平 吴长江 编著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新专题教程. 高中数学. 7. 数学建模/袁震东, 赵小平, 吴长江编著. —上海: 华东师范大学出版社, 2005. 6

ISBN 7-5617-4245-2

I. 新... II. ①袁... ②赵... ③吴... III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 066232 号

新专题教程 高中数学 7·数学建模

主 编 袁震东
策划组稿 郑国雄 倪 明 徐惟简
责任编辑 审校部编辑工作组
特约编辑 平 萍
封面设计 黄惠敏
版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社
市场部 电话 021-62865537
门市(邮购)电话 021-62869887
门市地址 华东师大校内先锋路口

业务电话 上海地区 021-62232873
华东 中南地区 021-62458734
华北 东北地区 021-62571961
西南 西北地区 021-62232893

业务传真 021-62860410 62602316

<http://www.ecnupress.com.cn>

社 址 上海市中山北路 3663 号
邮编 200062

印 刷 者 上海市印刷三厂
开 本 787×1092 16 开
印 张 4.25
字 数 73 千字
版 次 2005 年 9 月第一版
印 次 2005 年 9 月第一次
印 数 3 100
书 号 ISBN 7-5617-4245-2/G·2453
定 价 7.00 元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题, 请寄回本社市场部调换或电话 021-62865537 联系)

为什么从上海到华盛顿不是按地图上上海与华盛顿之间的直线路径飞行,而是先向东北方向按弧形路径飞行?为什么诺贝尔奖的基金增长必须按复利来计算?这些问题,用数学方法和数学模型来解释,不仅清楚而且有数量作依据,具有说服力。

有人说数学是科学的皇冠,因为数学十分抽象和十分严密。同时,数学又是科学的仆人,它不仅为自然科学的各部门学科服务,也为经济学、社会科学和生产、日常生活提供服务。

数学模型是实现这种服务的桥梁,数学建模就是讨论如何建立这种“桥梁”的问题。只有建立了适当的数学模型,才有可能用数学工具去解决我们所遇到的实际问题。众所周知,如果你想学会骑自行车,那么你必须亲自去尝试骑车,即使开始时免不了跌跤;如果你要学会游泳,那么你必须亲自下水去尝试,即使开始时灌几口水。同样的道理,如果你要学会数学建模,你就得尝试用数学方法解决实际问题。

正如体育教练要做示范动作一样,本书给出一些数学建模的范例,目的在于引导学生去学习数学建模,了解数学建模的一般步骤和方法。我们希望同学们喜欢这些范例,甚至可进一步引起大家对数学的兴趣。通过范例的学习,你们今后在用数学工具解决实际问题时少走弯路。如果真是这样,那么我们写书的目的就达到了。

目前写给中学生看的数学建模书很少,我们作此尝试,定有许多不足,甚至错误,欢迎读者批评指正。

袁震东



总 序

高中数学 7 · 数学建模

新课标、新理念、新教法在中小学中被越来越多地采用,学生和教师热切地盼望着市场上有更多与之相适应的教学辅导用书,使教学能更好地体现新课标、新理念、新教法。国家教育部为了适应各地区的实际情况,体现各种教学思想,形成百花齐放的良好教育氛围,鼓励有条件的地区和出版社,出版各具特色的版本教材。在众多的教材中,虽然教材的形式不同,内容编排的顺序不同,但教材的知识内容和能力要求是相同的;全面提高学生综合素养的教学理念是相同的;使学生积极、主动地参与教学过程的教学方法是相同的。《新专题教程》就是按新课标所列的内容专题及其相应的教学要求,在“新教学理念,新教学方法”的指导下编写而成。

《新专题教程》丛书始终坚持以“完整、系统、深入、细致”为编写特色。作者在图书编写过程中,通过“内容解读”,力求从国家课程标准中的知识内容,提炼出相应的能力要求,并对重点知识进行深入、细致的讲解,对难点知识用实例的方法进行释疑,使学生在学习中,能够牢牢地抓住学习的关键,解决学习中的困难;通过“方法举例”,提炼出运用知识解决问题的类型,并对解决问题的思维方法和解决问题的基本技能,进行深入、细致的介绍和总结,使学生在知识学习的基础上,充分了解和掌握运用知识解决问题的方法,切实提高学生的学习效果。



总 序

高中数学 7 · 数学建模

为了达到丛书的编写目的,我们在全国范围内,组织了
许多特高级教师和教学专家主持参与编写。他们将多年来的
教学经验和研究成果,无所保留地贡献给了广大的读者,
贡献给了教育改革。

同学,当你看了本套丛书的介绍后,丛书的编写特点不
知是否符合你的需要。我们真诚地希望:

如果你是一个学习成绩较好的学生,愿你在用了本套丛
书后,使你的学习能够更上一层楼。

如果你是一个学习上存在一定困难的学生,愿本套丛书
能够有效地帮助你解决学习中的困难,提高你的学习成绩。

如果你是一个毕业班的学生,愿本套丛书能够成为你复
习迎考的助手。

愿,本套丛书能解决你学习中的所有需要,能解决你学
习中遇到的所有问题。

愿,21世纪《新专题教程》,给您一个智慧的人生。

华东师范大学出版社



CONTENTS

目 录

高中数学 7 · 数学建模

专题 1 从列方程解应用题到数学建模 1

专题 2 函数建模——容器中水的深度与注水时间的关系 6

专题 3 几何建模(一)——飞机飞行的最短路径 12

专题 4 几何建模(二)——追截走私船问题 17

专题 5 有关复利的数学模型 20

专题 6 最值模型 26

专题 7 命运的数学公式 30

专题 8 中奖概率 33



CONTENTS

目 录

高中
数学
7
·
数学
建模

专题 9 对策模型——嫌疑犯的选择 36

专题 10 水污染治理方案的比较 39

专题 11 “连环送”中的折扣问题 42

专题 12 水库鼻坝高度与挑角的确定 46

专题 13 双瓶输液中的浓度问题 51

附录 数学建模与中学数学 55



从列方程解应用题到数学建模

可以发现,在我们的周围存在着许多可用数学方法来解决的实际问题,例如:如果有多条道路通往学校,走哪一条路径费时最少的问题;旅行社如何组织旅游团才能获得最大利润的问题;飞机飞行路线问题;追截走私船问题;电话号码增号问题;人口发展问题等等.

有些实际问题可以化为应用题,可以用在初中学过的列方程解应用题的方法来解决,即根据题意设未知量、找出等量关系、列方程、解方程、检验、答题.但多数实际问题与应用题不同,需要用数学建模来求解.数学模型是运用数学工具对实际问题的数学刻画,它的呈现形式可以是函数、方程,也可以是计算程序乃至图表和图象等.数学建模是研究如何用合适的数学工具建立数学模型,解决实际问题的全过程,它与列方程解应用题有下列四个不同之处:

(1) 列方程解应用题中的问题,多数是经过加工的,问题中的条件是充分的,问题中的数据是给定的.然而数学建模中的问题是现实世界中的实际问题,条件往往是不充分的,也有些条件对于问题的求解是多余的,问题中的数据是不完整的,甚至是要解题者自己收集、整理的.

(2) 由于问题中的条件不充分,解数学建模问题时常常需要作一定的假设或假定,在列方程解应用题的过程中是不容许作假设的.

(3) 数学建模过程中的验证和讨论是不可或缺的步骤,而且数学建模中的验证和讨论比解应用题中的验证和讨论要复杂得多.在数学建模中获得模型和解之后,不仅要验证方程有没有增根,而且还要验证解与实际问题是否相符,与所作的假设有没有矛盾.如果有矛盾,必须重新作假设、建立模型,再解模型、验证,直到获得满意的结果为止.

(4) 数学建模问题往往是开放性(open ended)的,其解不是惟一的.下面举例说明.

数学建模不仅要找出实际问题的数学模型,而且包括用数学模型解决实际问题的全过程.

旅客与旅行社是一种契约关系. 旅客交付旅费后, 旅行社根据合同, 负责支付旅客的车费、景点门票及在途中供给一定的食品等.

阅读数学建模例题时, 边读边算将更有收获!

由于 20 名旅客的旅费恰好抵消旅行社的固定成本. 因此旅行社盈利或亏损可以从第 21 名旅客算起.

直接计算指直接代入①、②式计算, 不需化简.

【问题陈述】

旅行社组团问题. 某旅行社组织 20~80 人的旅行团. 旅客为 20 名时, 每位旅客收费为 200 元; 当旅客超过 20 名时, 可以适当少收旅客的旅费, 例如每增加 1 名旅客少缴 2 元. 旅行社组织一次旅行的固定成本为 4 000 元, 另外供给每位旅客 30 元的食品. 旅行社希望知道: 旅行社的利润与旅客人数的关系, 何时获得的利润最大, 何时亏本?

【建模过程】

分析: 在这个问题中, 有些条件是不清楚的, 例如: 当旅客超过 20 名时, 每增加 1 名旅客少缴 2 元, 是指每位旅客少缴 2 元, 还是指增加的那 1 名少缴 2 元? 为此我们作如下假设.

假设 1: 当旅客超过 20 名时, 每增加 1 名旅客少缴 2 元, 指第 21 名收取 198 元, 第 22 名收取 196 元, 余者类推(当然, 如果指每位旅客少缴 2 元, 也可以, 见本专题作业).

假设 2: 旅客根据收费情况平均分摊旅费.

建立模型

设旅客有 x 名, 那么 $20 \leq x \leq 80$. 设 y 表示旅行社组织 1 次旅行所得的利润. 显然, 当只有 20 名旅客时, 由于每位旅客只收 200 元, 20 名共收取 4 000 元, 恰好等于旅行社组织 1 次旅行的固定成本. 此时, 旅行社还要供给每人 30 元食品, 因此要亏本 600 元.

当 $x > 20$ 时, 旅行社的利润为

$$y = 198 + 196 + \cdots + [200 - 2(x - 20)] - 30x, \text{ 即}$$

$$y = \sum_{k=1}^{x-20} (200 - 2k) - 30x. \quad \textcircled{1}$$

旅客平均分摊的旅费为

$$\frac{4\,000 + 198 + 196 + \cdots + [200 - 2(x - 20)]}{x}. \quad \textcircled{2}$$

解模型

对于不同的 x 值, 经过直接计算, 把计算结果列于下表. (x 表示旅客数, y 表示利润, p 表示平均每位旅客交付的旅费)

x (名)	20	25	30	35	40	45	50
y (元)	-600	220	990	1 710	2 380	3 000	3 570
p (元)	200	198.80	196.33	193.14	189.50	185.56	181.40
x (名)	55	60	65	70	75	80	
y (元)	4 090	4 560	4 980	5 350	5 670	5 940	
p (元)	177.09	172.67	168.15	163.57	158.93	154.25	

从上表可知,最大利润为 5 940 元.

验证和讨论

利用等差数列求和公式可得

$$y = \frac{198 + [200 - 2(x - 20)]}{2}(x - 20) - 30x, \text{化简得}$$

$$y = -x^2 + 209x - 4\,380. \quad \textcircled{3}$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } y &= -(x - 104.5)^2 + 10\,920.25 - 4\,380 \\ &= -(x - 104.5)^2 + 6\,540.25, \end{aligned}$$

所以它的最值点在 $x = 104.5$ 处,可见最值点不在 $[20, 80]$ 范围内.但它在 $[20, 80]$ 内是增函数,因此 $x = 80$ 时获最大利润.当旅客人数少于 24 人时旅行社将亏本,因为此时

$$y = 198 + 196 + 194 - 23 \times 30 < 0.$$

由数学建模的例子看到,数学建模的一般步骤可归结为下列四步:

1. 分析问题、作假设.由于实际问题的复杂性,所以要分析数学建模的目的和具体目标,分析已知条件是什么,所求的问题是什么.为简化问题,一般要对有关陈述作假设,使问题更加明确.分析问题还包括变量的设置、单位的选用等.

2. 建立数学模型.根据问题的要求和假设,利用恰当的数学方法建立各个量之间的数学关系.在能达到预期目标的前提下,应采用尽可能简单的数学方法建立容易求解的数学模型,以便让更多的人接受和使用这种模型.

3. 解数学模型.大多数数学模型的求解需要通过计算机

③式所示的函数在 $[20, 80]$ 内是增函数,可以从它的图象获知.

旅行团有 24 名旅客时,开始盈利,此时

$$\begin{aligned} y &= 198 + 196 + 194 + \\ &\quad 192 - 24 \times 30 \\ &= 60 > 0. \end{aligned}$$

计算,一般需要根据算法画出框图、编制程序、上机实现.求解还包括画图、列表,必要时还要给出证明及制作计算机软件等.

4. 验证、讨论并修正模型.根据已经建立的数学模型的特点和求解结果,验证、讨论数学模型的适用范围、算法的精度和各种数据计算结果的可信程度等,并根据验证、讨论的情况进行修正.

上述四个步骤可以根据实际问题的具体情况灵活运用.有时可以合在一起,边分析边寻找数学模型,即1和2合在一起,有时可以省略某些步骤.

【建模心得】

1. 数学模型的概念

数学模型是指解决实际问题时所用的一种数学框架,它是实际问题的一种数学刻画.数学模型可以是函数、方程、计算机程序乃至图表或图形.

2. 数学建模的含义

数学建模是分析实际问题、作假设、建立数学模型、解模型、验证讨论,直至找到合适的数学模型的全过程.

3. 数学建模的元素

除了把一般语言化为数学公式或方程这一元素外,数学建模还包括下列四个元素:

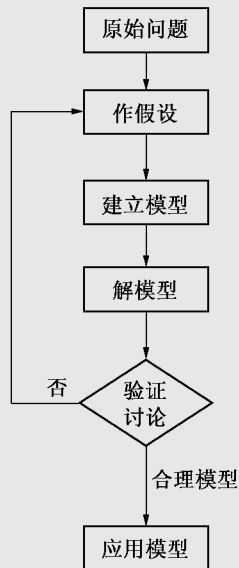
- (1) 所遇到的实际问题中条件、数据的不完整性;
- (2) 一般需要作假设或假定;
- (3) 验证和讨论是数学建模不可缺少的步骤;
- (4) 有时问题的解是不惟一的.

一个数学建模问题可以包含上述所有的元素,也可以只包含其中某一些元素.

4. 数学建模的主要步骤

- (1) 分析问题、作假设;
- (2) 建立数学模型;
- (3) 解数学模型;

数学建模过程可以表示成下列框图:



(4) 验证、讨论并修正模型(重新作假设、建立模型、解模型、验证讨论).

【练习作业】

1. 如果在本专题例题的数学建模过程中假设: 当旅客超过 20 名时, 每增加一名旅客每名旅客的旅费均少缴 2 元, 问题的解将如何?
2. 如果在本专题的例题中, 供给每位旅客的食品费改为 20 元, 问题的解将如何?

专题 2

函数建模——容器中水的深度与注水时间的关系

【问题陈述】

打开水龙头,让水均匀地注入一个容器内,随着注水时间 t 的增加,容器内水面的高度 h 会不断地增加,直至水满溢出. 现有四个不同形状的容器(见图 2-1),分别建立容器中水面高度 h 与时间 t 的函数关系.

这里 h 表示容器内贮水部分水的深度.

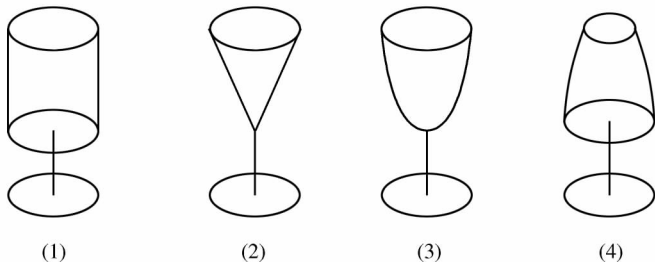


图 2-1

【建模过程】

为了建立水面高度 h 与时间 t 的函数关系,先作如下假设.

假设 1: 水龙头放水的速度是均匀的,每单位时间放出 m ml 水.

假设 2: 当时间 $t = 0$ 时,容器内水的深度 $h = 0$.

假设 3: i) 对于容器(1)和(2),我们可以解决它们的一般情形,所以设它们的可装水部分的高都为 H (cm),最上端的圆半径为 R (cm);

ii) 对于容器(3)和(4),我们只能解决它们的具体情形. 现测量得它们的可装水部分的高为 10 (cm),容器(3)最上端的圆半径为 3 (cm),容器(4)的最上端和最下端的圆半径分别为 2 (cm)和 4 (cm),而水龙头的注水速度为每秒 10 ml.

水均匀地注入容器即注水速度等于常数.

建立模型

设时间为 t 时,容器的水面高度为 h . 根据假设 1 可知,当时间为 t 时,注入容器的水为 $mt(\text{ml})$. 按图 2-1,分 4 种情况建模.

1. 容器(1) 当水面高度为 h 时,圆柱形容器内的水量为 $R^2\pi h$. 由 $R^2\pi h = mt$, 解得

$$h = \frac{m}{R^2\pi} \cdot t.$$

可见,对于圆柱形的容器,容器内水面的高度 h 与注水时间 t 构成正比例函数关系. 考虑到容器的最大高度为 H , 所以水面高度 h 关于时间 t 的关系可表示为分段函数

$$h = \begin{cases} \frac{m}{R^2\pi} \cdot t, & 0 \leq t \leq \frac{R^2\pi H}{m}, \\ H, & t > \frac{R^2\pi H}{m}. \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

2. 容器(2) 当水面高为 h 时,相应水面的圆半径为 $\frac{Rh}{H}$, 圆锥形容器内的水量为 $\frac{R^2\pi h^3}{3H^2}$. 由 $\frac{R^2\pi h^3}{3H^2} = mt$, 解得

$$h = \sqrt[3]{\frac{3mH^2}{R^2\pi} \cdot t}.$$

考虑到容器的最大高度为 H , 所以水面高度 h 与时间 t 的关系可表示为分段函数

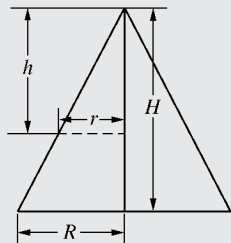
$$h = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{3mH^2}{R^2\pi} \cdot t}, & 0 \leq t \leq \frac{R^2\pi H}{3m}, \\ H, & t > \frac{R^2\pi H}{3m}. \end{cases} \quad \textcircled{2}$$

3. 容器(3) 我们依次测得时间 t 和水面高度 h 的对应数据如表 2-1 所示:

表 2-1

t	2	4	6	8	10	12	14
h	2.7	5.3	6.5	7.6	8.4	9.2	10.0

对于容器(2),过圆锥顶点垂直于底面的截面图形为



根据表 2-1 中的数据, 在以时间 t 为横坐标, 水面高度 h 为纵坐标的平面直角坐标系中作出散点图 (见图 2-2).

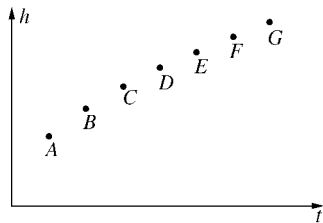


图 2-2

由图 2-2 可以发现, 数据点的散布大体上呈现为以 t 轴为对称轴的抛物线状, 且

a 称为待定参数.

$t = 0$ 时 $h = 0$. 故设相应的曲线方程为 $t = a \cdot h^2 (t \geq 0, h \geq 0)$. 由于 t 是 h^2 的一次函数, 于是我们计算与 t 对应的 h^2 的值 (见表 2-2).

表 2-2

t	2	4	6	8	10	12	14
h^2	7.29	28.09	42.25	57.76	70.56	84.64	100

由数据组 t 和 h^2 , 利用最小二乘法求出 a 的估计值

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^7 t_i h_i^2 - 7 \bar{t} \cdot \bar{h}^2}{\sum_{i=1}^7 h_i^4 - 7(\bar{h}^2)^2},$$

设时间与水面高度的变化曲线为 $t = ah^2$, 那么使得 $\sum_{i=1}^7 (t_i - ah_i^2)$ 达到最小值的 \hat{a} 叫做 a 的最小二乘估计.

其中 $(t_i, h_i) (i = 1, 2, \dots, 7)$ 分别是第 i 对测量值, \bar{t} 是关于 t 的 7 个测量值的算术平均数, \bar{h}^2 是关于 h 的 7 个测量值的平方的算术平均数. 我们先分别计算得 $\bar{t} = 8$, $\bar{h}^2 = 55.80$, $\sum_{i=1}^7 t_i h_i^2 = 3963.80$, $\sum_{i=1}^7 h_i^4 = 28106.12$, 然后计算得 $\hat{a} \approx 0.133$, 即

$$t = 0.133 \cdot h^2 \quad (0 \leq h \leq 10).$$

即 h 关于 t 的函数为

$$h = \begin{cases} 2.74\sqrt{t}, & 0 \leq t \leq 13.3, \\ 10, & t > 13.3. \end{cases} \quad \textcircled{3}$$

在坐标系中画出 $\textcircled{3}$ 式的图象 (见图 2-3), 与原测得的数据拟合得很好, 因此可知, h 关于 t 的函数关系可近似地表示

为③式.

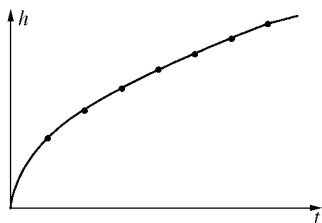


图 2-3

4. 容器(4) 我们依次测得时间 t 和水面高度 h 的对应数据如表 2-3 所示:

表 2-3

t	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
h	0.1	0.3	0.5	1	1	1.3	2.2	3.3	5	7.2	9.7

根据表 2-3 中的数据, 在平面直角坐标系中作出散点图(见图 2-4).

由图 2-4 可以发现, 数据点的散布大体上呈幂函数的图象, 不妨设 $h = a_1 \cdot t^2$ 或 $h = a_2 \cdot t^3$ ($t \geq 0, h \geq 0$), 即 h 是 t^2 或 t^3 的一次函数, 所以我们计算 t^2 和 t^3 的值如表 2-4 所示:

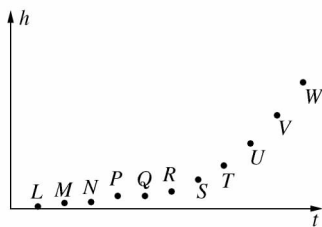


图 2-4

表 2-4

t^2	4	16	36	64	100	144	196	256	324	400	484
t^3	8	64	216	512	1 000	1 728	2 744	4 096	5 832	8 000	10 648

利用最小二乘法计算得 $\hat{a}_1 \approx 0.02$, 即

$$h = \begin{cases} 0.02t^2, & 0 \leq t \leq 22.36, \\ 10, & t > 22.36. \end{cases} \quad \textcircled{4}$$

同理计算得 $\hat{a}_2 \approx 0.0009$, 即

采用 $a_1 t^2$ 还是 $a_2 t^3$ 作为函数模型? 这里要利用尝试法来解决.

$$h = \begin{cases} 0.0009t^3, & 0 \leq t \leq 22.31, \\ 10, & t > 22.31. \end{cases} \quad (5)$$

从④式和⑤式的图象(见图2-5)可以看出,⑤式的拟合效果较④式更好.

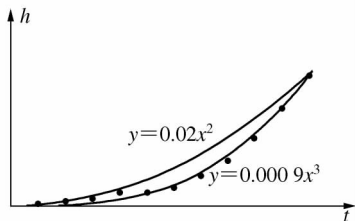


图 2-5

【建模心得】

两种建模方法:

1. 机理建模;
2. 数据建模.

1. 利用物理、化学、生物或社会科学的原理导出数学模型的方法称为机理建模. 在本专题中对于容器(1)和(2), 我们采用了机理建模的方法导出其数学模型. 有时用机理建模过于复杂或有困难, 也可以通过实验, 收集数据, 用数据来建立模型, 这种建模方法称为数据建模(有时也称为统计建模). 对于容器(3)和(4), 我们采用了数据建模的方法获得模型.

在复杂对象的机理建模过程中, 有时必须忽略一些次要的因素, 从而造成一定的建模误差. 在数据建模中, 由于实验数据的测量误差和计算误差也使模型带有误差. 但只要模型误差在实际应用允许的范围内, 这样的数学模型就仍然是可以应用的. 现实世界中, 完全没有误差的数学模型是罕见的.

2. 对于一组观测数据 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, n$), 假设 x 、 y 之间有线性关系, 即

$$y = ax + b.$$

记 $\hat{y}_i = ax_i + b$, $y_i - \hat{y}_i$ 称为在数据点 x_i 上的离差, 最小二乘法实质上是在各数据点上的离差的平方和

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

达到最小时, 使 $y = ax + b$ 拟合观察值 (x_i, y_i) 的一种方法. a 和 b 的最小二乘估计为