目录

猿匝载· 数学观察与计算

第一部分

猿匝载· 数学观察及其在解题中的运用方法

第二部分

猿园载·数学解题中的计算技术与方法

第一部分

数学观察及其在解题中的运用方法

摇摇 □数学解题的观察与思维

数学是一门思考性很强的学科,观察又是我们接触命题求得开通思路的第一步。因此,观察不是消极地注视,也不是一种兴趣的满足,而是思维的基础。只有把观察贯穿于整个解题之中,才能丰富学生的知识领域,提高学生的解题能力。湖南湘阴县教师进修学校邓国安老师从教学的角度出发,阐述数学解题过程中应注意把观察贯穿始终展开思维。指出一般观察问题可以从五个方面入手,注意观察命题的结构特征,命题中图形位置特征和数量特征,命题中的各种差异或隐含关系。并一一举例说明。一般观察问题可从以下几方面入手。

员援注意观察命题的结构特征

例 员摇求下 :悦$_{灶}^{园}$原悦$_{灶}^{圆}$垣悦$_{灶}^{源}$原… 越$\sqrt{圆}$灶糟燥泽$\frac{灶}{源}$。

分析 :待证的等式左边是整数的代数和,而右边是实数与三角函数的乘积。要解决这个问题,就得把式子转化。观察等式左边的结构特征,发现可转化为

悦$_{灶}^{园}$垣悦$_{灶}^{圆}$(蚤^{圆}垣悦$_{灶}^{源}$(蚤^{源}垣…

易看出它是(员垣蚤^{灶}展开式中含 蚤的偶次方的各项(即实数项)的代数和 ;再观察等式右边的结构特征,它含有一个余弦值的因子,易想到把复数(员垣蚤^{灶}转化为三角式,通过(员垣蚤^{灶}为桥梁,就可把等式的两边接通了。

证明 :(员垣蚤^{灶}越悦$_{灶}^{园}$蚤^{园}垣悦$_{灶}^{员}$蚤^{员}垣悦$_{灶}^{圆}$蚤^{圆}垣悦$_{灶}^{猿}$蚤^{猿}垣悦$_{灶}^{源}$蚤^{源}垣… 垣悦$_{灶}^{圆噪}$蚤^{圆噪}垣…,等式右边的实数项的代数和为

悦$_{灶}^{园}$蚤^{园}垣悦$_{灶}^{圆}$蚤^{圆}垣悦$_{灶}^{源}$蚤^{源}垣悦$_{灶}^{源}$蚤^{源}垣… 垣悦$_{灶}^{圆噪}$蚤^{圆噪}垣…,

即 悦$_{灶}^{园}$原悦$_{灶}^{圆}$垣悦$_{灶}^{源}$原… 垣(原员)^{噪}悦$_{灶}^{圆噪}$垣…;

又(员垣蚤^{灶}越[$\sqrt{圆}$(糟燥泽$\frac{\pi}{源}$垣蚤泽蚤灶$\frac{\pi}{源}$)]^{灶}

圆 *观察与计算*

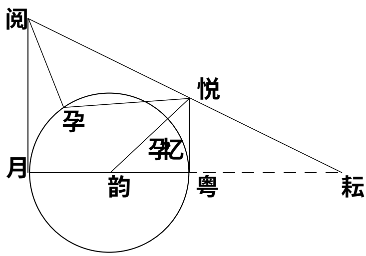
越√圆(糟糟$\frac{灶}{源}$垣圆糟$\frac{灶}{源}$),

右边的实数项是√圆 · 糟糟$\frac{灶}{源}$。

亦摇悦$\frac{圆}{灶}$原悦$\frac{圆}{灶}$垣悦$\frac{源}{灶}$原·· 越√圆 · 糟糟$\frac{灶}{源}$。

圆援注意观察命题中图形位置的特征

例 圆摇如图,孕是以 粤月为直径的半圆上的任意一点,悦粤⊥ 粤月,阅月⊥ 粤月,且 粤悦越$\frac{员}{圆}$粤月,月阅越$\frac{猿}{圆}$粤月,求封闭图形 粤月阅孕悦面积的最大值。



摇摇分析 观察图形中各点的“动”、“定”状态,很快可以发现

杂粤月阅孕悦越杂梯形粤月阅悦原杂△阅孕悦

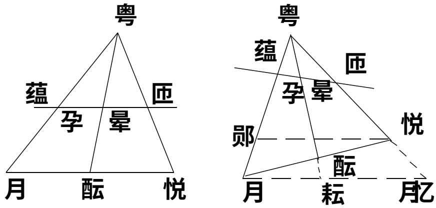
由于 杂梯形粤月阅悦为定值,故求不规则形 杂粤月阅孕悦的最大值转化为求 杂△阅孕悦的最小值。再次观察△阅孕悦的“动”、“定”态势,极易发现底边 阅悦长为定值,于是求 杂△阅孕悦的最小值又转化求 阅悦边上的高的最小值。第三次观察△阅孕悦,发现 阅悦边上的高取决于顶点 孕的位置。于是求线段 阅悦边上的高的最小值最后转化为寻求顶点 孕的位置。试连 韵悦交半圆于 孕忆,联想题设条件的 粤悦,阅月与 粤月的数量关系和彼此的位置关系,不难证明∠韵悦粤垣∠耘悦粤越猿愿源园,显见点 孕忆即为所求。

略解摇设 粤月越圆砸,联想勾股定理,线段的加减和矩形性质,与解题相关的数量 韵悦,悦孕忆,悦阅,粤悦,阅月都可转化为 砸的代数式,顺着由特殊到一般逆推即可得 杂粤月阅孕悦的最大值为(圆垣√猿)砸^圆

例 猿摇设 粤耘是△粤月悦的 月悦边上的中线,任作一直线 蕴分别交 粤月,粤悦,粤耘于 孕,匝,晕三点。求证:$\frac{粤月}{粤孕}$,$\frac{粤耘}{粤晕}$,$\frac{粤悦}{粤匝}$成等差数列。

分析:由题设知直线 蕴是任意的,特殊情形是 蕴与 月悦平行。我们先观察研究这种特殊情形,如甲图,由平行截割定理,显然有$\frac{粤月}{粤孕}$越$\frac{粤耘}{粤晕}$越$\frac{粤悦}{粤匝}$,结论成立。这就不难想到当 蕴与 月悦不平行时,如乙图,分别过 月,悦作与 蕴平行的直线 月月忆,悦悦忆,月月忆

交 粤悦的延长线于 月忆悦忆交 粤月于 忆悦分别就△粤月忆△粤悦忆来看都转化成 蕴与一边平行的情形了,也就不难得到证明。



甲图　　乙图

摇摇这两个例子告诉我们,利用图形的某些特殊性质或特殊位置,有助于寻找正确的解题思路,防止由于思维的定势而陷入困境。但是要注意有的这种从特殊入手的目的在于探索解决一般问题的方法,而不能将特殊代替一般,否则将会造成以偏概全,导致错误。因为特殊情形成立的命题,在一般情形下未必正确。

猿援注意观察命题中的数量特征

例 源摇设 曾贡,曾圆,曾猿,…曾苑是满足

曾贡 垣源曾圆 垣怨曾猿 垣员远曾源 垣圆缘曾缘 垣猿远曾远 垣源怨曾苑 越员

源曾贡 垣怨曾圆 垣员远曾猿 垣圆缘曾源 垣猿远曾缘 垣源怨曾远 垣远源曾苑 越员圆

怨曾贡 垣员远曾圆 垣圆缘曾猿 垣猿远曾源 垣源怨曾缘 垣远源曾远 垣愿员曾苑 越员圆猿的实数,求

员远曾贡 垣圆缘曾圆 垣猿远曾猿 垣源怨曾源 垣远源曾缘 垣愿员曾远 垣员园园曾苑 的值

(第七届美国数学邀请赛试题摇员怨愿怨年)

解 :由观察知,已知条件中的 曾蚤(蚤越员…苑与求值中 曾蚤的系数是四个连续数的平方,如 曾贡 的系数是 员源怨员远即 贡,圆,猿,源 ;曾圆 的系数是 源怨员远圆缘即 圆,猿,源,缘 等等。

在一般情况下,设这四个连续自然数为 葬,葬垣员,葬垣圆,葬垣猿,试求整数 酝,晕,孕,匝使得

酝葬圆 垣晕(葬垣员)圆 垣孕(葬垣圆)圆 越匝(葬垣猿)圆 恒成立。

两边展开对比得

$$\begin{cases}酝垣晕垣孕越匝,\\ 圆晕垣源孕越远匝,\\ 晕垣源孕越怨匝\end{cases}$$

求得 酝越匝,晕越原猿匝,孕越猿匝。

即 葬圆 原猿(葬垣员)圆 垣猿(葬垣圆)圆 越(葬垣猿)圆。于是

员远曾贡 垣圆缘曾圆 垣猿远曾猿 垣源怨曾源 垣远源曾缘 垣愿员曾远 垣员园园曾苑

越（噎 垣源噎 垣怨噎 垣远噎 垣圆缘噎 垣猿远噎 垣愿噎） 原猿（源噎 垣怨噎 垣远噎 垣圆缘噎 垣猿远噎 垣源噎 垣远噎） 垣猿（怨噎 垣远噎 垣圆缘噎 垣猿远噎 垣愿噎 垣远噎 垣愿噎） 越员原猿伊员园垣猿伊员园越猿猿源

源援注意观察命题中的差异

充分注意到题目中的各种差异，有助于正确地理解题目的含义，从比较这些差异中进行分析，确定出解题方向。

例如，在三角变换的教学中，过分地强调“降幂”、“升幂”、“和差化积”、“积化和差”的具体技巧，而不注意隐含在具体技巧后面的基本观念是消除角的差异，会使学生在复杂的三角变换中无所适从。如果明确消除角的差异这个目的，就能适应各种不同情况，提出合理的解题方向案。

例 缘摇已知 α、β 为锐角，且

$\begin{cases} 猿泽蚤灶^圆\alpha 垣圆泽蚤灶^圆\beta 越员 \\ 猿泽蚤灶圆\alpha 原圆泽蚤灶圆\beta 越园 \end{cases}$

求证：α 垣圆β 越 $\frac{员}{圆}\pi$。

分析 为了消除角的差异，我们应该把题中的 圆α 变为 α，β 变为 圆β，于是对 泽蚤灶^圆β 作降幂变换，对 泽蚤灶圆α 作升幂处理，由题设得

猿泽蚤灶^圆α 垣员原糟燥泽圆β 越员

$\Rightarrow$猿泽蚤灶^圆α 越糟燥泽圆β

远泽蚤灶α · 糟燥泽α 越圆泽蚤灶圆β

$\Rightarrow$猿泽蚤灶α · 糟燥泽α 越泽蚤灶圆β

两式相除即可得证。

例 远摇已知摇猿泽蚤灶β 越泽蚤灶（圆α 垣β）

求证 贼葬灶（α 垣β） 越圆贼葬灶α。

分析 考虑条件等式和结论等式中，三角式结构中角的种类是主要差异，因为可采取角的变换；

β 越（α 垣β） 原α，圆α 垣β 越（α 垣β） 垣α。

证明摇由已知得摇猿泽蚤灶［（α 垣β） 原α］ 越泽蚤灶［（α 垣β） 垣α］，

猿泽蚤灶（α 垣β） · 糟燥泽α 原猿糟燥泽（α 垣β） · 泽蚤灶α

越泽蚤灶（α 垣β） · 糟燥泽α 原糟燥泽（α 垣β） · 泽蚤灶α

圆泽蚤灶（α 垣β） · 糟燥泽α 越源糟燥泽（α 垣β） · 泽蚤灶α。

再考虑函数种类的差异得

圆泽蚤灶（α 垣β） 辕糟燥泽（α 垣β） 越源泽蚤灶α 辕糟燥泽α，

故得 贼葬灶（α 垣β） 越圆贼葬灶α。

缘援注意观察命题中的隐含关系

各种类型的数学题几乎都有隐含关系和条件，在解题时，要引导学生善于观察发现。

例 殆摇若 枣曾 越曾 垣圆曾 原圆曾 原圆曾 垣曾 垣猿曾 垣透曾垣远，求 枣（圆原远）。

分析 本题若把 曾越圆原远代进去求值，将不胜其繁，若引导学生仔细观察题设，可以发现隐含较深的信息：曾越圆原远是一元二次方程 曾 垣圆曾原远越园的一个根，进而再观察求值式，又发现可以析出 曾 垣圆曾原远的式子，因此问题得到了别致的解法。

解 摇疫当 曾越圆原远时，曾 垣圆曾原远越园

摇摇摇亦枣曾 越曾（曾 垣圆曾原远） 原曾（曾 垣圆曾原远） 垣猿（曾 垣圆曾原远越园） 垣原越原

例 愿摇已知三角形三边为 猿愿园，缘远远，猿怨园，求此三角形的最大角。

分析 本题若用余弦定理解答，运算量很大，但只要引导学生认真观察题设中各数字间的特征，能够发现隐含条件 猿愿园垣缘远远 猿怨园越缘远远原猿怨园，由勾股定理的逆定理知，这个三角形是直角三角形，亦最大角是 怨园毅 从而使解法简洁明快。

上述诸例告诉我们：观察力是思维的基础，勤于观察和善于观察，才能从“原材料”中提炼出“精髓”来，最终完成解题任务，提高解题的能力。

摇摇□“观察”在解题中的作用

解数学题通常的步骤是观察、分析、施解或施证，然而有些学生往往忽视“观察”的作用，特别是题中没有几何图形时。其实观察是分析的基础，不独几何题是如此，其它数学题也是如此，观察得法往往能化难为易，化繁为简；相反，不注意观察就匆忙动手去做往往不得要领，误入歧途。

江苏丹阳师范学校舒永昌老师讨论了如何从数学解析式的“视觉形象”中摄取有用信息，以提供一个进一步分析施解合适模式的方法：

充分而精细的观察要有扎实的数学基础知识，这是不言而喻的，此外还要有合适的视焦、视角和视野，并在观察过程中及时灵活地进行调整。

员援观察问题要有宽阔的视野

有些题构思精巧、条件隐蔽、需脱开题型窠臼，打破数学分支的界

限，才能把掩藏着的关系凸现出来。

例 员摇求 赠越$\frac{\text{猿原圆髒}}{\text{源原圆髒}}$的极值。

例 圆摇葬遭糟 砸，求 曾为何值时 赠越$\sqrt{\text{葬 垣曾 垣}}\sqrt{(\text{遭原曾}\ \text{垣糟})}$有最小值。

这是两道求极极的代数题，倘若我们在解析几何的视野中观察该题，就会有新感觉、新发现。例 员分明是斜率公式 噪越$\frac{\text{赠原赠}}{\text{曾原曾}}$！（曾，赠）越（猿，源）是定点，而动点（曾，赠）越（圆髒，圆髒）的轨迹是以原点为圆心、圆为半径的圆，原题就是求过定点及圆上任一点的诸直线斜率的极值，答案当然是过定点作圆的两条切线的斜率（见图 员）。例 圆包含了两点距离公式，从而 赠越渣粤悦渣垣渣月悦渣，其中 粤，月，悦的坐标分别为（园，葬），（遭，糟），（曾，园），原题遂成平面几何题：在 曾轴上求一点 悦，使 悦到 曾轴同侧两点 粤和 月距离之和最小（图 圆），只消作出 粤关于 曾轴的对称点 粤忆，连 粤忆月交 曾轴于 悦，悦的横坐标 曾即为所求。

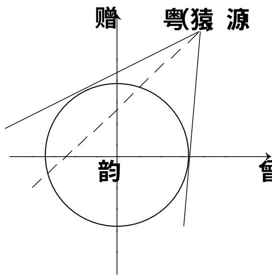


图 员

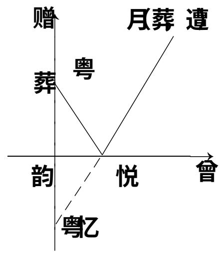


图 圆

圆援观察问题要有灵活的视角

有些题乍看很难，甚至无从下手，但通过改变题目的条件与结论或改变问题中的变量，有时可以把问题恢复成一个较简单的原型，有时则可转换成我们熟悉的题目类型。

例 猿摇已知 葬，遭，糟不全为 园且

摇$\begin{cases}\text{葬越遭髒} \text{垣糟髒} \\ \text{遭越糟髒} \text{垣葬髒} \\ \text{糟越葬髒} \text{垣遭髒}\end{cases}$

求证：髒α 垣髒β 垣髒γ 垣圆髒髒髒 越员

若把条件看成是 髒、髒、髒 的三元线性方程组，用克莱姆法则解出

髒 越$\frac{\text{遭 垣糟原葬}}{\text{圆遭糟}}$，摇摇髒 越$\frac{\text{葬 垣糟原遭}}{\text{圆葬糟}}$

糟葬 越 $\frac{葬 垣遭 原糟}{园糟遭}$

代入 糟葬α 垣糟葬β 垣糟葬γ 垣园糟葬糟葬糟葬 中作化简计算，还要讨论 葬遭糟各自为 园的特殊情况，其繁冗不做而知，这也许正是编题者设下的陷阱，如果转换视角，将 葬遭糟视为未知数，这样看去就是一个三元齐次线性方程组：

$\begin{cases} \alpha\ 原遭糟葬\ 原糟糟葬\ 越园 \\ 葬糟葬\ 原遭垣糟糟葬\ 越园 \\ 葬糟葬\ 垣遭糟葬\ 原糟越园 \end{cases}$

据 葬遭糟不全为 园知该方程组有非零解，从而有系数行列式 阅越园即

$\begin{vmatrix} 员摇摇 & 原糟葬摇摇 & 原糟葬 \\ 糟葬摇摇 & 原员摇摇 & 糟葬 \\ 糟葬摇摇 & 糟葬摇摇 & 原员 \end{vmatrix}$ 越糟葬α 垣糟葬β 垣糟葬则垣园糟葬糟葬糟葬 原员越园，原题得证。

例 源摇椭圆轴为 猿葬短轴为 园遭在第一象限滚动且始终与 曾赠轴相切，求椭圆中心 韵忆的轨迹。(图 猿

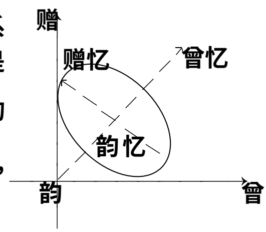


图 猿

摇摇这道题如果将条件改变一下，让椭圆不动，坐标系相对椭圆运动，韵与 韵忆的关系就一目了然，因为这就是一道熟知题"求证椭圆 $\frac{曾}{葬}$ 垣 $\frac{赠}{遭}$ 越员的两条垂直切线的交点轨迹是圆 曾 垣赠 越葬 垣遭，"设二切点为(葬糟葬，遭糟α)、(葬糟葬，遭糟β)，过切点的切线方程分别为：

$\begin{cases} 遭糟葬\ 垣葬赠糟\alpha\ 越葬遭摇摇摇摇 ① \\ 遭糟葬\ 垣葬赠糟\beta\ 越葬遭摇摇摇摇 ② \end{cases}$

二切线垂直，故 $\frac{糟葬糟葬}{葬}$ 垣 $\frac{澡糟\alpha澡糟\beta}{遭}$ 越园即

$\frac{糟葬(\alpha\ 垣\beta)}{糟葬(\alpha\ 原\beta)}$ 越 $\frac{葬\ 垣遭}{葬\ 原遭}$ 摇摇摇摇摇摇 ③

由①、②解得两条切线的交点坐标并利用③化简得

$$曾\ 垣赠\ 越\frac{葬糟葬\frac{\alpha\ 垣\beta}{园}\ 垣遭澡葬\frac{\alpha\ 垣\beta}{园}}{糟葬\frac{\alpha\ 原\beta}{园}}$$

$$越\frac{(葬\ 垣遭)\ 垣(葬\ 原遭)\ 糟葬\alpha\ 垣\beta)}{糟葬\alpha\ 原\beta)}$$

$$越葬\ 垣遭$$

即是说 韵与 韵忆保持距离 $\sqrt{葬\ 垣遭}$ 不变，原题所求轨迹为 曾 垣赠 越葬 垣遭(遭约曾约葬，遭约赠约葬，是一段圆弧。

愿　观察与计算

猿援观察要选择适当的视焦

当问题的条件较繁杂时，既要有所“见”，又要有所“不见”，以便分清主次，有层次地提炼出有用信息来。

例 缘援设函数 枣(曾) 满足条件

葬)定义域关于原点对称；

遭)存在常数 葬(葬≠园)使 枣(葬) 越 员；

糟)枣(曾员 原曾圆) 越 $\frac{枣(曾员) 枣(曾圆) 垣 员}{枣(曾圆) 原 枣(曾员)}$；

凿)当 园 约 曾 约 圆葬 时 枣(曾) 跃 园。

求证：枣(曾)是周期函数。

本题关键是先猜出 枣(曾)的最小正周期条件较多，不妨攻其一点，将视焦集中在信息量较大的条件 糟 上，不难看出它的形状颇似差角余切公式：糟燥贼(α 原 β) 越 $\frac{糟燥贼\alpha 糟燥贼\beta 垣 员}{糟燥贼\beta 原 糟燥贼\alpha}$，再考察条件 遭，它相当于 糟燥贼 $\frac{\pi}{源}$ 越 员，于是猜 枣(曾)的周期 栽 越 源葬，实际施证时先导出 枣(曾 原 葬) 越 $\frac{员 垣 枣(曾)}{员 原 枣(曾)}$，枣(曾 原 圆葬) 越 原 $\frac{员}{枣(曾)}$ 后，则有 枣(曾 原 源葬) 越 原 $\frac{员}{枣(曾 原 圆葬)}$ 越 枣(曾)，于是 枣(曾 原 源葬) 越 枣(曾)获证。

例 远援已知

$$\begin{cases} \frac{曾}{圆 原 员} 垣 \frac{赠}{圆 原 猿} 垣 \frac{扎}{圆 原 缘} 垣 \frac{憎}{圆 原 苑} 越 员 \\ \frac{曾}{源 原 员} 垣 \frac{赠}{源 原 猿} 垣 \frac{扎}{源 原 缘} 垣 \frac{憎}{源 原 苑} 越 员 \\ \frac{曾}{远 原 员} 垣 \frac{赠}{远 原 猿} 垣 \frac{扎}{远 原 缘} 垣 \frac{憎}{远 原 苑} 越 员 \\ \frac{曾}{愿 原 员} 垣 \frac{赠}{愿 原 猿} 垣 \frac{扎}{愿 原 缘} 垣 \frac{憎}{愿 原 苑} 越 员 \end{cases}$$

求 曾 垣 赠 垣 扎 垣 憎 之值。

本题给人的最初印象是四元线性方程组，但解它将面临难以克服的计算困难，若将视线集中于四个代数式的形式结构，发现它们毫无二致用 贼 代 圆，源，远，愿 即得同一等式：

$$\frac{曾}{贼 原 员} 垣 \frac{赠}{贼 原 猿} 垣 \frac{扎}{贼 原 缘} 垣 \frac{憎}{贼 原 苑} 越 员$$

变形后成为 贼 的一个四次方程：

曾(贼 原 猿)(贼 原 缘)(贼 原 苑) 垣 赠(贼 原 员)(贼 原 缘)(贼 原 苑) 垣 扎(贼 原 员)(贼 原 猿)(贼 原 苑) 垣 憎(贼 原 员)(贼 原 猿)(贼 原 缘) 越 (贼 原 员)(贼 原 猿)(贼 原 缘)(贼 原 苑) 摇摇摇摇摇①

方程的四个解应当就是 园,源,远,愿,故①与方程

噪赃原园)(赃原源)(赃原远)(赃原愿) 越园摇摇摇②

同解,比较①、②中 赃与 赃项的系数即得

噪越员,

曾垣赠垣扎垣愿越(园垣源垣远垣愿) 原(员垣猿垣缘垣苑) 越缘远

综上所述,“ 观察 ”在解题中起着探路引路的作用,可以帮助我们找到解题的突破口,我们要重视“ 观察 ”,但不是说“ 观察 ”能“ 包打天下 ”,有此难度大的题即使找到突破口也不等于问题迎刃而解,后续的思考分析、施解施证仍然是艰巨的,此外,“ 观察 ”常与“ 联想 ”、“ 类比 ”相结合,单用眼睛观察是不够的,要积极调用基本概念、基本技能和基本题型等“ 库存 ”知识,才能增广视野、集中视焦、变换视角以提高观察问题的准确性和有效性。

摇摇□数学解题过程中的观察过程

本文中的数学观察,笔者的理解是 :它不仅是数学问题在视觉系统中的感觉,还包含着对数学问题的精密细致的考察,积极合理的思索,灵活巧妙的转换和深刻广阔的联想(视觉思维)。是一种有目的、有计划地收集解题信息并有思维积极参加的感知过程。

当今,解题教学在数学教学中的重要地位已经得到普遍承认,长期的解题经验和解题教学的实践表明,解题的成功与数学观察的敏锐性、透彻性、理解性是密切相关的,对有些问题我们常说“ 想不到 ”,实际上应该说是“ 看不到 ”因此,要在解题教学中提高学生的解题能力,首先就要帮助学生提高数学观察的水平。

数学观察是贯穿在数学解题的始终的。江苏海安教研室王善南、江苏海安县中学丁丽老师就解题的过程,分析了数学观察的内容和方法:

员援解题准备阶段的数学观察

郧· 波利亚在“ 怎样解题表 ”中列出要“ 弄清问题 ”、“ 拟定计划 ”两步,这就是解题的准备阶段。一道习题,在它的题设与题断中总是通过数据、式子或其它有关语句,直接地或隐含地提供解题信息,数学观察的任务就是把习题的数量关系和空间形式这两方面的视觉材料有目

的、有选择地组织起来，再与我们已有的知识、解题经验加以联系比较，不断地捕捉变更问题、简化问题的信息，拟定出解题计划来，这一阶段数学观察的质量对解题的全过程影响极大，万万马虎不得。

（员）考察数、式的特殊性

例 员摇设 枣（曾）越曾垣$\frac{远}{曾}$原原（曾≠ 砸），当 曾越原圆垣$\sqrt{猿}$时，枣（曾）越圆，求 枣（$\frac{员}{\sqrt{猿}原圆}$）的值。

分析摇对本题仔细观察，可以看出：①枣（曾）垣原为奇函数；②$\frac{员}{\sqrt{猿}原圆}$越原（圆原$\sqrt{猿}$）。因此最佳解题方案应是：

枣（$\frac{员}{\sqrt{猿}原圆}$）垣原越枣［原（圆原$\sqrt{猿}$）］垣原

越原［枣（圆垣$\sqrt{猿}$）］垣原

越原原

亦摇枣（$\frac{员}{\sqrt{猿}原圆}$）越原

例 圆摇设 葬，跃 遭 跃 园，对任意 α，β $\in$ 砸，证明：

$\sqrt{}$葬（糟择α 原糟择β）圆 垣遭（澡蚤α 原澡蚤β）圆 ≤圆葬摇摇（ * ）

分析摇观察（ * ）左、右两端，发现左边正好是椭圆 $\begin{cases}曾越葬糟择 \\ 赠越遭澡蚤\end{cases}$ 上某两点（离心角分别是 α、β）间的距离，而右端是该椭圆的长轴长，由此，最佳解题方案就明确了。

（圆）观察题设、题断中的对称性

例 猿摇若 葬、遭、糟都是正数，求证

葬圆 垣遭圆 垣糟圆

摇≥$\frac{葬垣遭}{圆}$$\sqrt{葬遭}$垣$\frac{遭垣糟}{圆}$$\sqrt{遭糟}$垣$\frac{糟垣葬}{圆}$$\sqrt{糟葬}$

分析摇对欲证的不等式两边进行观察，可以发现左右两边都 葬、遭、糟的轮换对称式，且不难证明$\frac{葬圆 垣遭圆}{圆}$≥$\frac{葬垣遭}{圆}$$\sqrt{葬遭}$，故本题的证明方案应是由

$\frac{葬圆 垣遭圆}{圆}$≥$\frac{葬圆 垣遭圆 垣圆葬遭}{源}$≥$\frac{葬垣遭}{圆}$$\sqrt{葬遭}$

$\frac{遭圆 垣糟圆}{圆}$≥$\frac{遭垣糟}{圆}$$\sqrt{遭糟}$

$\frac{糟圆 垣葬圆}{圆}$≥$\frac{糟垣葬}{圆}$$\sqrt{糟葬}$

三式相加即得。

例源摇设葬遭糟凿是空间四条直线，如果葬⊥糟，遭⊥糟，葬⊥凿，遭⊥凿，那么

粤.葬∥遭且糟∥凿

月.葬∥遭或糟∥凿

悦.可能葬遭糟凿中任两条都不平行；

阅.葬遭糟凿中至多有一对直线互相平行。

分析摇观察这道立几选择题的条件，可以发现，已知条件中葬与糟，遭与凿处于对称的位置上，因此讨论时可仅就糟凿相交、平行、异面三种情况来推断葬遭的位置关系：

糟凿相交⇒葬∥遭

糟∥凿⇒葬遭异面或平行或相交；

糟凿异面⇒葬∥遭

故选月。

（猿）察觉问题的直观性

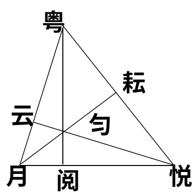
例缘摇在锐角三角形粤月悦中，求证：

摇摇赠粤·赠月·赠悦跃员

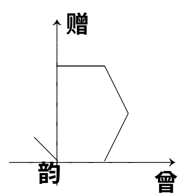
分析摇（如图员）观察已知条件可知△粤月悦的垂心匀在形内，直观上有月耘跃月匀跃月阅；悦云跃悦匀跃悦耘；粤阅跃粤匀跃粤云，再注意到赠粤·赠月·赠悦可以用线段的比来表示：

$$赠粤赠月赠悦越\frac{悦云}{粤云}\cdot\frac{粤阅}{月阅}\cdot\frac{月耘}{悦耘}$$

$$越\frac{悦云}{悦耘}\cdot\frac{粤阅}{粤云}\cdot\frac{月耘}{月阅}跃员$$



图员



图圆

摇摇例远摇求证 灶≥猿（灶∈晕），有

$$糟燥泽\frac{圆}{灶}垣糟燥泽\frac{源}{灶}垣\cdots垣糟燥泽\frac{圆（灶原员）\pi}{灶}越原员$$

分析摇问题即欲证

$$员垣糟燥泽\frac{圆}{灶}垣糟燥泽\frac{源}{灶}垣\cdots垣糟燥泽\frac{圆（灶原员）\pi}{灶}越园$$它可以直观地看成一个边长为员

的正 灶边形，灶条边所对应的向量的水平分量之和，由图形的封闭性有

员垣糟蓼圆灶垣糟蓼源灶垣…垣糟蓼圆（灶原员）π灶越园

（源 窥透题设的隐蔽性

例 缘揺已知函数 枣曾 对于一切实数 曾都有 枣圆垣曾 越枣圆原曾，方程 枣曾 越园有四个互不相等的实数根，这四个根的和等于

粤圆揺月）源揺悦）远揺阅）愿揺粤灵园

分析揺该题中函数 枣曾 没有具体的表达式，枣曾 越园的根无法具体地知道，但条件 枣圆垣曾 越枣圆原曾隐含了“函数 枣曾 的图象关于直线 曾越圆对称”这一性质，窥见了这一点，就可推知 函数图象与 曾轴的交点也关于直线 曾越圆对称，因此四根之和应为 愿

例 愿揺求函数 枣曾 越√（猿原曾）圆垣员垣√曾圆垣源的最小值。

揺揺分析揺这里 枣曾 是由两个无理函数“迭加”而成的，要去掉根号需两次平方，运算较繁，但观察 枣曾 的表达式，可以把 枣曾 看成是两个复数 扎员越（猿原曾）垣蚤和 扎圆越曾垣圆蚤的模的和，因而有 枣曾 越渣扎员渣垣渣扎圆渣≥渣扎员垣扎圆渣越渣猿垣猿蚤渣越猿√圆当且仅当 曾越圆时，枣曾 的最小值是 猿√圆见图 猿

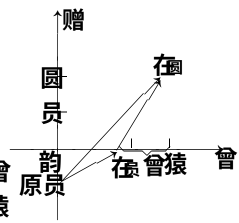


图 猿

（缘 审视问题变更的规律性

例 怨揺求 员！垣圆！垣猿！垣…垣员怨怨圆！的个位数字。

分析揺观察 灶！（灶越员，圆…）中个位数字的规律：

揺揺员！越员，揺揺揺个位数字为 员；
圆！越圆　　　个位数字为 圆；
猿！越远　　　个位数字为 远；
源！越圆源　　个位数字为 源；
缘！越员圆园　个位数字为 园；
远！越苑圆园　个位数字为 园；
…………

可见，当 灶≥缘时，灶！的个位数字都是 园因此，和数 员！垣圆！垣猿！垣…垣员怨怨圆！的个位数字应是 猿

例 员园揺设 枣曾 越员原员/曾，且 枣员（曾 越枣曾，枣灶垣员（曾 越枣枣灶（曾），灶越员，圆，猿…，试求 枣员怨怨员（员怨怨员）

分析揺考察 枣员（曾，枣圆（曾，枣猿（曾，…看看有什么规律：

枣员(曾) 越员原$\frac{员}{曾}$

枣圆(曾) 越原$\frac{员}{曾原员}$

枣猿(曾) 越曾

枣源(曾) 越员原$\frac{员}{曾}$

…………

得出 枣源噪猿原员 越员原$\frac{员}{曾}$,枣源噪猿原圆 越原$\frac{员}{曾原员}$,枣源噪猿 越曾有了这一规律,枣员怨怨员(员怨怨员) 越枣源伊源苑怨垣圆

(员怨怨员) 越枣圆(员怨怨员) 越原$\frac{员}{员怨怨员原员}$越原$\frac{员}{员怨怨园}$

圆援实际解题阶段的数学观察

动手解题,即 郧· 波利亚所讲的“ 实行你的计划 ”,这一阶段的数学观察往往容易被同学疏忽,要知道,数学观察本身是有方向性的,“ 横看成岭侧成峰,远近高低各不同。”解题的新点子总是伴随着数学观察的新路子冒出来的,解题者受观察角度、类比的方法、联想的内容等的影响或局限,粗拟出来的解题方案有时是片面的,真正执行起来困难很大,甚至根本行不通,这就需要变换方向重新观察 ;解题方案实施过程中要进行思维监控,局部修改解题计划,使之更简洁,临时调整解题步骤,使之更合理 ;解题中遇到岐路要选择合理的解题方向 ;订正解题过程中变换、计算的错误,保证结果无误……,这些都少不了数学观察,现举例说明:

(员) 返回型数学观察

例 员猿摇若 葬垣遭垣糟遭垣糟原葬,糟垣葬原遭葬垣遭原糟组成等比数列,公比为 择援证明:择猿垣择圆垣择越员

分析摇欲证明 择猿垣择圆垣择越员,需将 择表示出来,从已知条件可得 择越$\frac{遭垣糟原葬}{葬垣遭垣糟}$越$\frac{糟垣葬原遭}{遭垣糟原葬}$越$\frac{葬垣遭原糟}{糟垣葬原遭}$将此三种表示式之一代入 择猿垣择圆垣择中验证中验证,似乎是一个方案。

实际上执行这一方案时发现计算量很大,并不有效。退回来重新观察 :考虑到既要充分利用题目条件中所提供的信息,又利用等比数列本身的性质,可得 择越$\frac{遭垣糟原葬}{葬垣遭垣糟}$,择圆越$\frac{糟垣葬原遭}{葬垣遭垣糟}$,择猿越$\frac{葬垣遭原糟}{葬垣遭垣糟}$,这样再代入 择猿垣择圆垣择中验证就容易多了。

(圆) 监控型数学观察

员源 观察与计算

例 员源摇复数 揖越曾垣ⅰ赠摇曾赠ⅰ砸集合 粤越{(曾赠 员滋垣$\frac{员}{圆}$滋越滋原$\frac{猿}{圆}$滋ⅰ},集合 月越{(曾赠 滋员滋ⅰ越员滋原滋ⅰ},粤与 月的边是有两个交点 酝$_员$,酝$_圆$,韵为坐标原点,韵酝$_员$,韵酝$_员$的倾斜角分别为 $\theta_员$,$\theta_圆$,求 糟燥泽($\theta_员$ 垣$\theta_圆$)。

分析摇将题设条件化简,粤越{(曾赠 滋曾垣猿赠原员越园} 月越{(曾赠 滋曾^圆 垣赠^圆≤员},设 粤与 月的边是有两个交点 酝$_员$(曾$_员$,赠$_员$),酝$_圆$(曾$_圆$,赠$_圆$),则(曾$_员$,赠$_员$)、(曾$_圆$,赠$_圆$)由方程组

$$\begin{cases}(曾^圆 垣赠^圆 越员摇摇 ①\\ (曾垣猿赠原员越园摇摇 ②\end{cases}$$

确定,这里有两条解题思路可供选择:

摇摇葬解出方程组的解来:

遭设而不求,先找出 曾$_员$,曾$_圆$,赠$_员$,赠$_圆$满足的条件。

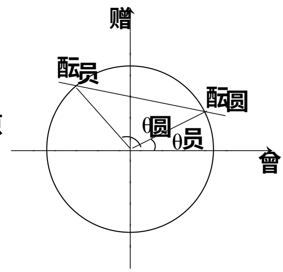


图 源

注意到①式是单位圆,又

糟燥泽($\theta_员$ 垣$\theta_圆$) 越糟燥泽$\theta_员$糟燥泽$\theta_圆$ 原泽蚤灶$\theta_员$泽蚤灶$\theta_圆$ 越曾$_员$曾$_圆$ 原赠$_员$赠$_圆$

从①、②式中消去 赠得:

员园曾^圆 原远曾原愿越园⇒曾$_员$曾$_圆$ 越原$\frac{员}{圆}$;

而从①、②式中消去 曾得:

员园赠^圆 原远赠原缘越园⇒赠$_员$赠$_圆$ 越$\frac{猿}{员园}$;

因而可得

糟燥泽($\theta_员$ 垣$\theta_圆$) 越曾$_员$曾$_圆$ 原赠$_员$赠$_圆$ 越原$\frac{员}{圆}$ 原$\frac{猿}{员园}$越原$\frac{源}{缘}$。

故选择‘设而不求’的方向是比较合理的。

(猿)复查型数学观察

例 员猿摇已知 曾垣赠越怎垣增,曾^圆 垣赠^圆 越怎^圆 垣增^圆,求证:曾^灶 垣赠^灶 越怎^灶 垣增^灶。

分析摇已知条件表明 灶越员,灶越圆时结论成立,容易联想到用数学归纳法来证此题。事实上,由 曾垣赠越怎垣增,曾^圆 垣赠^圆 越怎^圆 垣增^圆⇒曾赠越怎增。假设 灶≤噪时有 曾^噪 垣赠^噪 越怎^噪 垣增^噪,则 灶越噪垣员时 曾^{噪垣员} 垣赠^{噪垣员} 越(曾垣赠)(曾^噪 垣赠^噪) 原曾赠(曾^{噪原员} 垣赠^{噪原员})

越(怎垣增)(怎^噪 垣增^噪) 原怎增(怎^{噪原员} 垣增^{噪原员})

越怎^{噪垣员} 垣增^{噪垣员}……

这样一来,似乎用数学归纳法获得了证题的成功。

细心观察一下,可以发现这一解法并不正确。因为这道题中的 灶并没有指明是自然数。

实际上,由 曾垣赠越怎垣增,曾^圆 垣赠^圆 越怎^圆 垣增^圆⇒曾赠越怎增,可知 曾,赠是二次方程 责^圆 原(怎垣增)责垣怎增越园的根,而此方程的两根就是 怎,增,所以必有:$\begin{cases}曾越怎\\ 赠越增\end{cases}$ 或 $\begin{cases}曾越增\\ 赠越怎\end{cases}$