

考研圣手 复习宝典

数学高分指导

(线性代数、概率论与数理统计)
(第二版)

陆少华 主编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书根据国家教育部颁发的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》和近年考研数学试卷最新信息编写。全书共 13 章,包括:行列式,矩阵,向量,线性方程组,矩阵的特征值与特征向量,二次型,事件和概率,随机变量及其分布,多维随机变量及其联合(概率)分布,随机变量的数字特征,大数定律和中心极限定理,数理统计的基本概念,参数估计,假设检验。内容涵盖《考研大纲》中线性代数、概率论与数理统计的全部考点。每章均设置考点精要、重点和难点、高分攻略与解题技巧、例题精析等栏目,具有很强的实战性和针对性。

本书可供考研学生复习备考时使用,也适合在校大学生以及专升本学生学习和复习线性代数、概率论与数理统计时阅读参考。

前 言

考研圣手系列是依据国家教育部颁发的《全国硕士研究生入学统一考试数学、政治理论、英语考试大纲》，近几年考研试卷的最新信息以及作者历年评阅试卷积累的经验，由上海交通大学出版社策划、组织、编写的一套考研应试辅导力作。本系列包括《数学高分指导(高等数学)》、《数学高分指导(线性代数、概率论与数理统计)》、《政治理论高分指导》、《英语阅读理解高分指导》、《英语知识运用高分指导》、《英语写作高分指导》、《英语翻译高分指导》、《英语听力高分指导》八册，对数学、政治、英语等研究生考试课程作系统和提纲挈领式的总结、归纳和梳理，所编内容和选编的例题、练习题涵盖《考研大纲》中的全部考点，充分关注考试内容的重点，反映近年考研试卷的命题趋势和动向。

本系列具有以下特点：

1. 设置栏目，针对性强

为了帮助读者进行复习，提高学习效率，本系列设置了以下栏目：考点精要，高分攻略与解题技巧，例题精析等。凡有练习题或测试题的，书末均附有标准答案，方便读者自测时参考。

2. 题型齐全，形式新颖

本系列选编的例题是编者在筛选和科学测试历年考研试题的基础上精选出的，具有很强的参考性和实战性。对于典型例题，除了提供详尽正确的解题过程外，更有题解前的分析点拨以及题解后总结题型规律的评注，力求收到举一反三、融会贯通之功效。

3. 重视方法，启迪思维

解题既需要掌握常规的方法，更讲究特有的思路 and 技巧。本系列注重介绍学习方法和获取高分的秘笈，启迪解题思路与解题技巧，传授避错防错的对策和措施。

本系列的编者来自上海交通大学、复旦大学等上海一流高校，曾多

次参与考研阅卷评分等工作,具有丰富的考研命题规律研究和应试复习辅导经验。本系列主要面向考研学生,供他们复习备考时使用;同时一般在校大学生也可借助本系列作阶段或期末复习时使用,也适合专升本学生复习备考时阅读参考。

《数学高分指导(线性代数、概率论与数理统计)》由陆少华主编,周汉源、孙薇荣、谢国瑞、金嘉华、黄蔚等参加编写。

由于成书时间仓促,书中疏忽和错误之处,恳请广大读者和使用本书的老师、同学批评指正。

编 者

2004 年 7 月

目 录

12	行列式.....	1
	考点精要(1) 高分攻略与解题技巧(3) 例题精析(3)	
13	矩阵	27
	考点精要(27) 高分攻略与解题技巧 (39)例题精析(39)	
14	向量	70
	考点精要(70) 高分攻略与解题技巧(74) 例题精析(74)	
15	线性方程组.....	101
	考点精要(101) 高分攻略与解题技巧(104) 例题精析(104)	
16	矩阵的特征值与特征向量.....	127
	考点精要(127) 高分攻略与解题技巧(129) 例题精析(130)	
17	二次型.....	163
	考点精要(163) 高分攻略与解题技巧(165) 例题精析(166)	
18	事件和概率.....	190
	考点精要(190) 高分攻略与解题技巧(194) 例题精析(195)	
19	随机变量及其分布.....	215
	考点精要(215) 高分攻略与解题技巧(219) 例题精析(219)	

20	多维随机变量及其联合(概率)分布.....	233
	考点精要(233) 高分攻略与解题技巧(238) 例题精析(239)	
21	随机变量的数字特征.....	257
	考点精要(257) 高分攻略与解题技巧(259) 例题精析(260)	
22	大数定律和中心极限定理.....	280
	考点精要(280) 高分攻略与解题技巧(281) 例题精析(282)	
23	数理统计的基本概念.....	288
	考点精要(288) 高分攻略与解题技巧(291) 例题精析(291)	
24	参数估计.....	298
	考点精要(298) 高分攻略与解题技巧(300) 例题精析(300)	
25	假设检验.....	314
	考点精要(314) 高分攻略与解题技巧(316) 例题精析(316)	

12 行列式

【考点精要】

A. 行列式的基本性质

(1) 行列式转置其值不变。

(2) 有关初等变换的性质:

① 两行(或列)互换,行列式值改号。

② 一行(或列)扩大 k 倍,行列式值也扩大 k 倍。

③ 一行(或列)的 k 倍加到另一行(或列),行列式值不变。

(3) 两行(或列)成比例,行列式值为 0。

(4) 按行(或列)的展开公式:

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij},$$

这里, A 为 n 阶方阵, a_{ij} 是 A 的第 i 行, 第 j 列的元素, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$, $M \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ 是原行列式中划去第 i 行与第 j 列后留下的 $(n-1)$ 阶行列式。

(5) 若一行(或列)为两行(或列)之和,则行列式为两个行列式之和。

(6) 若 A, B 为同阶方阵,则

$$|AB| = |A| |B|.$$

B. 基础行列式

(1) 三角行列式(即对角线上或下全为 0 的行列式):

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & * & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & 0 & \\ & * & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n,$$

$$\begin{vmatrix} & & a_1 \\ * & a_2 & \\ \vdots & 0 & \\ a_n & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & a_1 \\ 0 & a_2 & \\ \vdots & * & \\ a_n & & \end{vmatrix} = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_1 a_2 \cdots a_n.$$

(2) 二线行列式(两线以外全是 0 的行列式):

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ b_1 & \cdots & a_i & \cdots & b_n \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & & b_1 & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & a_i & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & b_n & & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n,$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_1 & \\ & & & \ddots & \\ b_1 & \cdots & a_i & \cdots & b_n \\ & & & \ddots & \\ a_n & & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & b_1 & & a_1 \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & a_i & & \\ & & \vdots & & \\ & & a_n & & b_n \end{vmatrix} = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_1 a_2 \cdots a_n.$$

(3) 范德蒙行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)$$

(4) 若 A, B 为方阵, 则

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A| |B|.$$

重点: 行列式常用计算方法。

难点: 行列式的性质及带有文字的 n 阶行列式的计算。

【高分攻略与解题技巧】

行列式常用计算方法：

(1) 用初等变换化为三角行列式。

(2) 按行或列展开成低阶行列式。

(3) 化一行(或列)为两行(列)和,行列式化为同阶简易行列式(常为二行行列式)之和。常见形式为

$$\begin{aligned} & |\beta_1 + k_1\alpha, \beta_2 + k_2\alpha, \dots, \beta_n + k_n\alpha| \\ &= |\beta_1, \dots, \beta_n| \cdots + \sum_{i=1}^n k_i |\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \alpha, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n|. \end{aligned}$$

这里 $\beta_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, 即除 i 个分量外全为 0 的列向量。

(4) 利用性质(5)。

(5) 利用分块矩阵乘法(详见第 13 章分块矩阵运算)。

在行列式计算中,我们常在等号上方记录所进行的行运算,在等号下方记录所进行的列运算。

【例题精析】

12.1 计算下列三阶行列式的值：

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & 15 & 701 \\ 9 & 46 & 456 \\ 15 & 75 & 3507 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 3 & 5 & a \\ 2 & 3 & b \\ 5 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

分析 (1)是数字行列式,按常规,化为三角式求其值。(2)是含字母行列式,第三列有 0 元素,故按第三列展开求其值。

$$\text{解} \quad (1) \quad \text{原式} \xrightarrow[\text{(3)-5(1)}]{\text{(2)-3(1)}} \begin{vmatrix} 3 & 15 & 701 \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

$$(2) \text{ 原式} \xrightarrow{\text{按(3)展开}} (-1)^{1+3} a \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} b \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \\ = -a + 4b.$$

$$12.2 \text{ 求证} \begin{vmatrix} a+x & x+u & u+a \\ b+y & y+v & v+b \\ c+z & z+w & w+c \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & x & u \\ b & y & v \\ c & z & w \end{vmatrix}.$$

$$\text{证 左端} = \begin{vmatrix} a & x+u & u+a \\ b & y+v & v+b \\ c & z+w & w+c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x+u & u+a \\ y & y+v & v+b \\ z & z+w & w+c \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a & x & u+a \\ b & y & v+b \\ c & z & w+0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & u & u+a \\ c & w & w+c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x & u+a \\ y & y & v+b \\ z & z & w+c \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} x & u & u+a \\ y & v & v+b \\ z & w & w+c \end{vmatrix}.$$

继续上述过程,上面 4 个行列式的第三列都是两列和,从而左端成 8 个行列式的和,除首尾外,中间 6 个行列式都有两列相等,值都为 0。故

$$\text{左端} = \begin{vmatrix} a & x & u \\ b & y & v \\ c & z & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & u & a \\ y & v & b \\ z & w & c \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & x & u \\ b & y & v \\ c & z & w \end{vmatrix} = \text{右端}.$$

12.3 求四阶行列式:

$$I = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}.$$

分析 可用初等变换化为三角行列式,得解 1。用行列变换在某一个列制造多个 0,然后展开求其值,得解 2。把每一列看成两列和(其中一列元素全为 1),行列式表成 $16(2^4)$ 个行列式的和,其中 11 个行列式有两列全为 1,其值为 0;其余 5 个为二阶行列式,从而得解 3。

$$\begin{aligned}
 \text{解 1} \quad I & \xrightarrow{(1) \leftrightarrow (4)} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1-y \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1+x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{\substack{(2)-(1) \\ (3)-(1) \\ (4)-(1+x)(1)}}} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1-y \\ 0 & -x & 0 & y \\ 0 & 0 & y & y \\ 0 & -x & -x & -x+y+xy \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{\substack{(4)-(2) \\ y(3)}}} (-1)y \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1-y \\ 0 & -x & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -x & -x+xy \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{(4)+x(3)} (-1)y \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1-y \\ 0 & -x & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & xy \end{vmatrix} = x^2 y^2.
 \end{aligned}$$

解 2

$$\begin{aligned}
 I & \xrightarrow{\substack{(2)-(1) \\ (3)-(4)}}} \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ -x & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & y \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{\substack{(1)-(2) \\ (4)-(3)}}} \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -y \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{\text{按(1)展开}} x \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 1 & 1 & -y \end{vmatrix} = x^2 y^2.
 \end{aligned}$$

$$\text{解 3 } I = \begin{vmatrix} 1+x & 1+0 & 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 1-x & 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 & 1+y & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 & 1+0 & 1-y \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \text{常用计算方法(3)} \\ \hline \end{array} \begin{vmatrix} x & & & \\ & -x & & \\ & & y & \\ & & & -y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & -x & & \\ & & y & \\ & & & -y \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} x & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & y & \\ & & & -y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & & \\ & -x & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & -y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & & & 1 \\ & -x & & 1 \\ & & y & 1 \\ & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x^2 y^2 + xy^2 - xy^2 + x^2 y - x^2 y = x^2 y^2.$$

12.4 求证:

(1) 若 A 为 n 阶方阵, n 为奇数, 且 $A' = -A$, 则 $|A| = 0$ 。

(2) 若 n 阶方阵 A 的 i 行, j 列元素为 a_{ij} ; n 阶方阵 B 的 i 行, j 列元素为 $c^{i-j} a_{ij}$ ($c \neq 0$), 则 $|A| = |B|$ 。

证 (1) $|A| = |A'| = |-A| = (-1)^n |A| = -|A|$,

故 $|A| = 0$ 。

$$(2) \quad |B| = |c^{i-j} a_{ij}| \stackrel{c^i(i)}{=} cc^2 \cdots c^n |c^{-j} a_{ij}| \\ \stackrel{c^{-j}(j)}{=} cc^2 \cdots c^n c^{-1} c^{-2} \cdots c^{-n} |a_{ij}| = |A|。$$

12.5 求下列行列式的值:

$$(1) \begin{vmatrix} a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & b \\ b & & & a \end{vmatrix}_{(n)} ; \quad (2) \begin{vmatrix} a & & & b \\ & \ddots & & \ddots \\ & & a & b \\ & & b & a \\ & \ddots & & \ddots \\ b & & & a \end{vmatrix}_{(2n)}。$$

分析 (1) 的每行、每列都只有两个非 0 元, 故展开求其值, 但按哪

行(列)展开则应观察非 0 元的位置, 这里选第 n 行(或第 1 列)。(2) 可分两次展开求其值。

解 (1)

$$\text{原式} \xrightarrow{\text{按(1)展开}} a \begin{vmatrix} a & b & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & & b \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} b \begin{vmatrix} b & & & \\ a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a & b \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$= a^n + (-1)^{n+1} b^n.$$

(2)

$$\text{原式} \xrightarrow{\text{按(1)展开}} a \begin{vmatrix} a & & & & b & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ & & a & b & & \vdots \\ & & b & a & & \vdots \\ & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ b & & & & a & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{(2n-1)}$$

$$+ (-1)^{2n+1} b \begin{vmatrix} 0 & a & & & & b \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots \\ \vdots & & & a & b & \\ \vdots & & & b & a & \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots \\ 0 & b & & & & a \\ b & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{(2n-1)}$$

$$= (a^2 - b^2) \begin{vmatrix} a & & & & b \\ & \ddots & & & \ddots \\ & & a & b & \\ & & b & a & \\ & \ddots & & & \ddots \\ b & & & & a \end{vmatrix}_{(2n-2)}.$$

$$= \cdots = (a^2 - b^2)^n$$

12.6 求下列 n 阶行列式的值:

$$(1) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b_n & & & 1 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -b_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -b_n & b_n \end{vmatrix}.$$

分析 这两个行列式有一个共同特点:从第二行起每行仅含两个非 0 元素。(2)的两个非 0 元素之和为 0,故可把所有列加到第一列,然后展开求其值。(1)的两个非 0 元素虽然不相等,但一个是 1,它的若干倍加到第一列,可使其和为 0,从而化行列式为上三角行列式,求得其值。

解 (1)

$$\text{原式} = \frac{\begin{vmatrix} * & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{vmatrix}}{(1) - b_2(2) - \cdots - b_n(n)}$$

$$= * = a_1 - a_2 b_2 - \cdots - a_n b_n.$$

$$(2) \text{原式} = \frac{\begin{vmatrix} * & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ 0 & b_2 & & & \\ \vdots & -b_3 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -b_n & b_n \end{vmatrix}}{(1) + (2) + \cdots + (n)}$$

$$\stackrel{\text{按(1)展开}}{=} * \begin{vmatrix} b_2 & & & & \\ -b_3 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & -b_n & b_n \end{vmatrix}$$

$$= * (b_2 \cdots b_n) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) b_2 \cdots b_n.$$

12.7 求下列 n 阶行列式的值:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & x & a & \\ & a & \ddots & \\ & & & x \end{vmatrix}_{(n)} ; \quad (2) \begin{vmatrix} & & & 1 \\ & 2 & & 2 \\ & & 3 & \\ & \ddots & & 2 \\ n & & & \end{vmatrix}.$$

分析 这两个行列式有一个共同特点:有一行元素全相等,其余对角线外的元素全相等。在(1)中,可以把所有行(除第一行)减去第一行的 a 倍;在(2)中,可以把所有行(除第二行)减去第二行,于是两个行列式分别化为三角或二线行列式,从而得其值。

解 (1)

$$\text{原式} \stackrel{\substack{(i) - a(1) \\ i = 2, \dots, n}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & x-a & & \\ & & \ddots & \\ & & & x-a \end{vmatrix}_{(n)} = (x-a)^{n-1}.$$

$$(2) \text{原式} \stackrel{\substack{(i) - (2) \\ i \neq 2}}{=} \begin{vmatrix} & & & & -1 \\ & 2 & \cdots & \cdots & 2 & 2 \\ & & & 1 & & \\ & & & & 2 & \\ & & \ddots & & & \\ (n-2) & & & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} (-2)(n-2)! = (-1)^{1+\lceil \frac{n}{2} \rceil} 2(n-2)!.$$

12.8 求下列 n 阶行列式值:

$$(1) \begin{vmatrix} x & & & \\ & \ddots & a & \\ & a & \ddots & \\ & & & x \end{vmatrix}_{(n)} ; \quad (2) \begin{vmatrix} a_1-x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}.$$

分析 这两题都可用初等变换化为三角式,从而求其值。也可用一列化为两列和,利用常用计算方法(3)求其值。

解 1 (1)

$$\text{原式} \frac{(1)+(2)+\cdots+(n)}{\quad} \begin{vmatrix} (n-1)a+x & (n-1)a+x & \cdots & (n-1)a+x \\ & x & & \\ a & & \ddots & a \\ & & & x \end{vmatrix}$$

$$= [(n-1)a+x] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ x & & & a & \\ a & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & x \end{vmatrix}$$

$$\frac{(i)-a(1)}{i=2,\cdots,n} [(n-1)a+x] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x-a & & & \\ & \ddots & & \\ & & & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [(n-1)a+x](x-a)^{n-1}。$$

(2)

$$\text{原式} \frac{(1)+(2)+\cdots+(n)}{\quad} \begin{vmatrix} a_1 + \cdots + a_n - x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 + \cdots + a_n - x & a_2 - x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 + \cdots + a_n - x & a_2 & \cdots & a_n - x \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 + \cdots + a_n - x) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 - x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & \cdots & a_n - x \end{vmatrix}$$

$$\frac{i-a_i(1)}{i=2,\cdots,n} (a_1 + \cdots + a_n - x) \begin{vmatrix} 1 & & & \\ 1 & -x & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & -x \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 + \cdots + a_n - x)(-x)^{n-1}。$$

解 2 (1)

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} a + (x - a) & a + 0 & \cdots & a + 0 \\ a + 0 & a + (x - a) & \cdots & a + 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a + 0 & a + 0 & \cdots & a + (x - a) \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{常用计算方法(3)}}} \begin{vmatrix} x - a & & & \\ & x - a & & \\ & & \ddots & \\ & & & x - a \end{vmatrix}$$

$$+ \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x - a & & & a \\ & \ddots & & \vdots \\ & & a & \\ & & \vdots & \ddots \\ & & a & & x - a \end{vmatrix}$$

$$= (x - a)^n + na(x - a)^{n-1}。$$

(2)

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} a_1 + (-x) & a_2 + 0 & \cdots & a_n + 0 \\ a_1 + 0 & a_2 + (-x) & \cdots & a_n + 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 + 0 & a_2 + 0 & \cdots & a_n + (-x) \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{常用计算方法(3)}}} \begin{vmatrix} -x & & & \\ & -x & & \\ & & \ddots & \\ & & & -x \end{vmatrix}$$

$$+ \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} -x & & & a_i \\ & -x & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_i & \ddots \\ & & & a_i & & -x \end{vmatrix}$$

$$= (-x)^n + (-x)^{n-1}(a_1 + \cdots + a_n)。$$