新版

数学辅导与训练

高中一年级用雪

黄汉禹　杨安澜　主编

上海科学技术出版社　上海教育出版社

内 容 提 要

《数学辅导与训练》一书依据上海市数学学科课程标准编写而成．全书分学习要求、解题指导、疑难分析、基本训练、自我评估、本章测试等组成．该书通过提示各个知识要点，指导各类题的解法，让学生牢固掌握数学基础知识，提高学生分析问题和解决问题的能力．

责任编辑：周玉刚

★新　　版★

数学辅导与训练

（高中一年级用）

黄汉禹　杨安澜主编

上海科学技术出版社出版、发行

（上海瑞金二路 450 号）（邮政编码 200020）

新华书店上海发行所经销　上海 XXXX 印刷厂印刷

开本 787×1092　1/16　印张 XXX　字数 XXX 000

2002 年 4 月第 1 版　2002 年 4 月第 1 次印刷

印数：1—XXX 000

ISBN 7－5323－6428－3/G・1447

定价：XXX.XX 元

编写说明

本书以1998年修订的学科课程标准和教材使用意见(高中部分)为依据,内容紧密配合课本,旨在帮助学生克服学习上的困难,增长阅读能力和自学能力,提高学科素质,及时消化所学的知识内容(包括基本概念、基本理论、基本要求,以及有关的重点、难点),并为学有余力的学生提供一些深、宽度略高于课程标准的学习资料.

由上海中小学课程教材改革委员组织编写的、供国家发达地区使用的中、小学数学教材,经过多年试用,越来越被广大教师、家长和社会认同与接受.由于这套教材的成功,数学编写组曾于1994年获得了“苏步青教育奖”,在社会上取得了良好的信誉.为更好地体现这套教材的精神,本辅导与练习每章按节在结构上由学习要求、知识要点、解题指导、疑难分析及基本训练等部分组成.

[学习要求] 根据数学学科课程标准,简明扼要、恰如其分地分条列出教学要求。

[解题指导] 精选例题,力求使每个例题都有其显明的目的性.每个例题视其难易,可设有分析、解(包括多种典型解法)、解后适当而恰如其分地提出“注意”、“说明”、“思考”、“研究”等项目.这里“注意”是指解题的注意事项,指出其容易出错或疏忽的地方;“说明”是指通过本例阐明解题的一般规律,告诉学生解题的基本方法;“思考”是指当本例题的条件和结论作适当改变时,命题将起何变化,也在解题方法上提出思考性问题;“研究”是更高层次上的“思考”,使学生对某些数学规律能自我发现.

[疑难分析] 将解题中的疑难所在作简明扼要的概括分析.

[基本训练] 通过解题指导和疑难分析之后,让学生进行必要的、基本的解题训练,以使有关的数学知识和数学思想方法及时得到落实.

[自我评估] 经过整个单元学习之后,为让学生及时了解自己的学习状况,特编制自我评估测试题,以使学生随时把握自己的学习水平.

本书各章还进行简明扼要的小结,每章最后又有本章测试,可以进一步帮助学生巩固所学知识,加深理解,熟练技能,全面掌握本章的数学基本概念、基础知识、数学思想方法及其应用.

本书由上海中学、市西中学、控江中学等三所市重点中学的教师编写,作者们对书稿的体例反复斟酌,力求充分体现以培养创新能力为核心的素质教育精

神．全书渗透了三校丰富的教学经验，一定程度上揭示了市重点中学数学教学的真谛．编写过程中始终得到三校领导的大力支持，在此我们表示深深的谢意．本书由黄汉禹、杨安澜主编，邹一心、周玉刚主审，李兆民通阅了全稿．本书第一、二、三、四、七章由陆纯舟编写，第五、六章由曾国光、严捷编写，参加本书编写的还有施有兰、周怀浠、沈涛、乐浠等．限于编者的水平，书中难免有不足之处，恳请广大师生、家长多提宝贵意见．

上海科学技术出版社
上 海 教 育 出 版 社
2002 年 2 月

目录

第一章 集合与命题

一、集　　合

［学习要求］

1．理解集合的基本概念，掌握元素与集合的从属关系，能正确使用集合的术语和符号；

2．掌握集合的表示法；

3．理解集合与集合间的关系，熟练掌握集合的交、并、补三种运算；

*4．了解求两个有限集并集的元素个数的计算方法．

［知识要点］

1．“把某些能确切指定的对象看作整体，这个整体叫做一个集合”．把某些……看作……是人为之意，确切指定，说明集合对象的确定性，所以对于给定的集合，其元素各不相同的且是确定的．

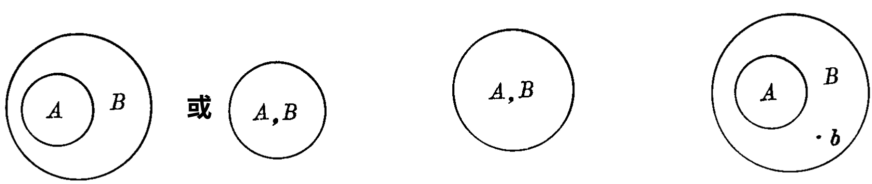
2．由有限个元素组成的集合称为有限集，由无限个元素组成的集合称为无限集．集合的表示方法可分为列举法和描述法，列举法通常适用于元素不太多的有限集，将元素一一列举出来，写在大括号内．无限集或元素较多的有限集一般用描述法．列举法能比较具体看清集合中的元素，而描述法能看清元素的特性．

3．常用数集的专用字母，因应用极其广泛，应牢牢记住：如自然数集 $\mathbf{N}$，整数集 $\mathbf{Z}$，有理数集 $\mathbf{Q}$，实数集 $\mathbf{R}$，以及负实数 $\mathbf{R}^-$、负整数 $\mathbf{Z}^-$、正有理数 $\mathbf{Q}^+$ 等记号．

4．不含任何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$.

5．元素与集合之间关系是从属关系，元素要么从属于集合，要么不属于集合，如 $a\in A$ 表示元素 a 属于集合 A，$a\notin A$，表示元素 a 不属于集合 A.

6．集合与集合之间关系是包含关系与不包含关系，包含关系有：包含、相等、真包含，其符号分别为“$\subseteq$”、“$=$”、“$\subset$”如 $A\subseteq B$、$A=B$、$A\subset B$ 分别称为集合 A 是集合 B 的子集，集合 A 与集合 B 相等、集合 A 是集合 B 的真子集，如图 1-1 所示．



$A\subseteq B$　任一元素 $a\in A$，则 $a\in B$

$A=B$　任一元素 $a\in A$，则 $a\in B$；任一元素 $b\in B$，则 $b\in A$

$A\subseteq B$ 且至少有一 $b\in B$，但 $b\notin A$，则 $A\subset B$

图　1-1

7. **集合的运算　交集、并集、补集**

教材不仅用文字给出了它们的定义，还给出表达式：

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\},$$
$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\},$$
$$\overline{A}=\{x\mid x\in I \text{ 且 } x\notin A\}.$$

这里应注意“且”和“或”，$A\cap B$ 的任何一个元素都是 A、B 的公共元素，所以 $A\cap B$ 必定是 A 与 B 的公共子集．它们的特性如下：$A\cap B=B\cap A$；$A\cap A=A$；$A\cap\varnothing=\varnothing$；$A\cap B\subseteq A$；$A\cap B\subseteq B$.

$A\cup B$ **可能成三种情况：**$x\in A$ **但** $x\notin B$；$x\in B$ **但** $x\notin A$；$x\in A$ **且** $x\in B$，$A\cup B$ **是由所有至少属于** A、B **两者之一的元素组成的集合．它们的特性如下：**$A\cup B=B\cup A$；$A\cup A=A$；$A\cup\varnothing=A$. $A\subseteq A\cup B$；$B\subseteq A\cup B$.

全集是个相对性的概念，它含有与所研究的问题有关的各集的全部元素，$\overline{A}$表示从全集中除去属于 A 的元素后余下的元素所组成的集合，即$\overline{A}$是 A 的补集．

*8. **有限集 A 的元素个数用 $n(A)$ 表示，两个有限集并集的元素个数公式为** $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$.

［**解题指导**］

例 1　将下列集合用列举法表示出来：

(1) **集合** $A=\{y\mid y=x^2-1,|x|\leqslant 2,x\in\mathbf{Z}\}$；

(2) **集合** $B=\{(x,y)\mid y=x^2-1,|x|\leqslant 2,x\in\mathbf{Z}\}$.

分析　(1) **集合 A 的元素是 y，它满足关系式 $y=x^2-1$，且当 $|x|\leqslant 2,x\in\mathbf{Z}$ 时的 y 值；**(2) **集合 B 的元素是点，它满足关系式 $y=x^2-1$，且当 $|x|\leqslant 2,x\in\mathbf{Z}$ 时所对应的点集．**

解　(1)　∵　$|x|\leqslant 2,x\in\mathbf{Z}$，　∴　$x=\pm 2,\pm 1,0$，**当** $x=\pm 2,\pm 1,0$ **时**，y **值为** $3,0,-1$，∴　**集合** $A=\{3,0,-1\}$.

(2) **同**(1) $x=\pm 2,\pm 1,0$ **时**，$y=3,0,-1$，　∴　**集合** $B=\{(2,3),(-2,3),(-1,0),(1,0),(0,-1)\}$.

例 2　已知集合 $A=\{$**小于** 6 **的正整数**$\}$，**集合** $B=\{$**小于** 10 **的质数**$\}$，**集合** $C=\{$24 **和** 36 **的正公约数**$\}$.

(1) **试用列举法表示集合** $M=\{y\mid y\in A \text{ 且 } y\in C\}$；

(2) **试用列举法表示集合** $N=\{y\mid y\in B \text{ 且 } y\notin C\}$.

解　(1) **由已知条件知，集合** $A=\{1,2,3,4,5\}$，**集合** $B=\{2,3,5,7\}$，**集合** $C=\{1,2,3,4,6,12\}$，∴　**集合** $M=\{1,2,3,4\}$.

(2) **同理得集合** $N=\{5,7\}$.

注意　**教材多处涉及整数的有关性质，通过本例看到，认真复习整数、奇数、偶数、质数的概念及其性质，以及倍数、约数、整除、最大公约数、最小公倍数等基本概念是重要的．**

［**基础训练**］

1. 下列对象看作整体，是否表示集合？说明理由．

(1) **所有老人；**　　　　(2) **比 0 小的自然数；**

(3) **所有花布；**　　　　(4) **所有质数．**

2. 下列集合表示同一集合的是哪些？

(1) $A=\{2,3\}, B=\{(2,3)\}$;

(2) $A=\{1\}, B=\{x|x^2-2x+1=0\}$;

(3) $A=\{y|y=x^2-1\}, B=\{s|s=t^2-1\}$;

(4) $A=\{(1,-3)\}, B=\{(-3,1)\}$.

3. 同"$\in$"、"$\notin$"表示元素与集合之间的关系.

(1) $(3,2)$____$\{3,2\}$;　　(2) 2____{**质数**};

(3) $\varnothing$____$\{x|x^2+1=0\}$;　　(4) **质数**____{**奇数**}.

例 3　若满足$\{a、b\}\subset A\subseteq\{a、b、c、d\}$,**求集合** A.

分析　∵　$\{a、b\}\subset A$,　∴　**集合** A **含有** $a、b$ **元素**,

又　∵　$A\subseteq\{a、b、c、d\}$,　∴　**集合** A **既含有** $a、b$ **元素又是集合**$\{a、b、c、d\}$**的子集**.

解　$A=\{a、b、c\}, A=\{a、b、d\}, A=\{a、b、c、d\}$.

说明　**两集合之间有"包含"与"不包含"两大关系,为了描述两集合之间的关系,教材介绍了子集、真子集等概念,规定了"包含"、"真包含"的涵义及其符号,上述题目对加深理解与掌握"包含","真包含"的涵义起到积极作用.**

[疑难分析]

集合及其有关概念和它们相互之间的区别与联系是本节的重点.然而由于集合概念逻辑性强,符号又较多,所以初学集合时比较难于理解和掌握,故它是一个难点.

例 4　若 $A\subseteq B, A\subseteq C, B=\{0,1,2,3,4\}, C=\{0,2,4,8\}$,**试求同时满足上述条件的集合** A.

解　∵　$A\subseteq B$,　∴　$A=\varnothing,\{0\},\{2\},\{4\},\{0,2\},\{0,4\},\{2,4\},\{0,2,4\}\cdots$

又　∵　$A\subseteq C$,　∴　$A=\varnothing,\{0\},\{2\},\{4\},\{0,2\},\{0,4\},\{2,4\},\{0,2,4\},\cdots$.

∵　$A\subseteq B, A\subseteq C$ **同时满足**,　∴　$A=\varnothing,\{0\},\{2\},\{4\},\{0,2\},\{0,4\},\{2,4\},\{0,2,4\}$.

说明　**解集合有关问题,要掌握集合的以下三点知识:**

(1) **首先要理解集合的重要特性,即确定性、互异性:一是集合的元素是"确定"的,而且是人为"指定"的;二是集合中的元素是各不相同的;**

(2) **空集是一个数学概念,不是一个实体,它是为了方便而引入的,对它需注意:**$\varnothing$**与** 0;$\varnothing$**与**$\{0\}$;$\varnothing$**与**$\{\varnothing\}$**等的区别,它们都有着不同的涵义.**

(3) **子集与真子集是描述了集合与集合之间的关系,**$A\subseteq B$ **包含了两种可能:一是** $A=B$;**二是** $A\subset B$,**且两者只居其一.在学习集合时,对符号的使用应特别注意,元素与集合之间的从属关系的表示只能用"$\in$"或"$\notin$",集合与集合之间的包含关系只能用"$\supseteq$"或"$\subseteq$",真包含用"$\supset$"或"$\subset$",相等用"$=$",相互不能混淆.**

[基础训练]

1. 用适当的符号($\in$、$\notin$、$=$、$\supset$、$\subset$)**填空:**

14____$\mathbf{Q}$, 3.14____$\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}$____$\mathbf{R}$, $\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$____$\{x|x=2k-1,k\in\mathbf{Z}\}$.

2. 下列五个关系式:(1) $\varnothing\subset\{0\}$; (2) $0\in\varnothing$; (3) $a\in\{a\}$; (4) $\{a,b\}\neq\{b,a\}$; (5) $0\notin\varnothing$,**正确的是**________.

3. 设集合 $M=\{x|3<x<4\}$,**下列关系:**

(1) $\pi\notin M$; (2) $\pi\in M$; (3) $\pi\subset M$; (4) $\{\pi\}\subset M$ **中,正确的是**________.

4. 下列四个关系式:

(1) $a\subset\{a\}$; (2) $\{a\}\in\{a,b\}$; (3) $\{a\}\subseteq\{a\}$; (4) $\varnothing\notin\{a,b\}$,**正确的是**________.

5. 下列四组集合中：

(1) $M=\{(1,2)\}, P=\{(2,1)\}$；　　(2) $M=\{2,3\}, P=\{(2,3)\}$；

(3) $M=\{3,4\}, P=\{4,3\}$；　　(4) $M=\{0\}, P=\varnothing$.

其中 $M=P$ 的是第______组.

6. 满足条件 $\{x \mid x^2+1=0, x\in\mathbf{R}\}\subset M\subseteq\left\{27,\dfrac{1}{27}\right\}$ 的集 M 的可能情况是__________.

7. 解下列各题：

(1) 试用列举法表示集合 $A=\{(x,y) \mid x+y=5, x\in\mathbf{N}, y\in\mathbf{N}\}$；

(2) 试用列举法表示集合 $A=\left\{x \,\middle|\, \dfrac{12}{5-x}\in\mathbf{N}, x\in\mathbf{Z}\right\}$；

(3) 试写出满足 $\{1,2\}\subseteq P\subseteq\{1,2,3,4,5\}$ 的集合 P 的所有可能情况.

例 5　设集合 $A=\{x \mid x^2-1=0, x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x \mid x^2-2ax+b=0, x\in\mathbf{R}\}$，若 $B\subseteq A$，且 $B\neq\varnothing$，求 a、b 的值.

分析　注意到集合 $A=\{-1,1\}$，∵ $B\subseteq A$ 且 $B\neq\varnothing$，∴ 集合 B 有三种可能① $B=\{1\}$；② $B=\{-1\}$；③ $B=\{-1,1\}$，这表明集合 B 中的二次方程的解有三种可能（想一想：为什么？），于是可按这三种情况加以讨论.

解　∵ $A=\{-1,1\}$，又 ∵ $B\subseteq A$ 且 $B\neq\varnothing$，

∴ 集合 B 可能是 $\{1\}$；$\{-1\}$；$\{-1,1\}$.

当 $B=\{1\}$ 时，方程 $x^2-2ax+b=0$ 有相等的实根 1.

∴ $\begin{cases}\Delta=4a^2-4b=0,\\ 1-2a\cdot1+b=0,\end{cases}$ 解方程组，得 $\begin{cases}a=1,\\ b=1.\end{cases}$

当 $B=\{-1\}$ 时，方程 $x^2-2ax+b=0$ 有相等的实根 -1，

∴ $\begin{cases}\Delta=4a^2-4b=0,\\ (-1)^2-2a(-1)+b=0,\end{cases}$ 解方程，得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=1.\end{cases}$

当 $B=\{-1,1\}$ 时，方程 $x^2-2ax+b=0$ 有两个不相等的实根 -1 与 1，

∴ $\begin{cases}(-1)^2+2a+b=0,\\ 1^2-2a+b=0,\end{cases}$ 解方程组，得 $\begin{cases}a=0,\\ b=-1.\end{cases}$

综上所述 a、b 值分别为 $\begin{cases}a=1,\\ b=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-1,\\ b=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=0,\\ b=-1.\end{cases}$

例 6　设集合 $A=\{x \mid 2a<x\leqslant4\}$，$B=\{x \mid 2\leqslant x\leqslant 3a+1\}$ 若 $B\subseteq A$，且 $B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

解　∵ $B\subseteq A$，且 $B\neq\varnothing$，∴ 集合 B 是集合 A 的非空子集，满足的条件是：

$$\begin{cases}3a+1\geqslant2, & ①\\ 2a<4, & ②\\ 2a<2, & ③\\ 3a+1\leqslant4. & ④\end{cases}$$

解不等式组，得 $\dfrac{1}{3}\leqslant a<1$.

注意　不等式①，②是给定集合中的元素的公共属性在有意义条件下字母的取值范围，③，④是由条件 $B\subseteq A$ 确定的.

说明　由上述两例可见，应掌握：(1) 根据 $B\subseteq A$ 的含义，当集合 B 有 n 种可能情况时，应分类讨论；

(2) 当集合 A 与集合 B 的元素在某个数值范围时，可借助数轴列出不等关系式．

［疑难分析］

涉及解集合的元素是字母的值或某个范围时，难就难在需分若干种情况进行讨论，其次解方程或不等式．虽然在初中时有的已学过，但具体运算时稍不注意就会出错，特别解不等式组，应该取每个不等式解集的交集，这里用好数轴是关键的一步．

［基础训练］

1. 设集合 $A=\{x \mid x<-1$ 或 $x>2\}$，$B=\{x \mid 4x+p<0\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 P 的取值范围．
2. 已知集合 $A=\{x \mid x^2+x-6=0\}$，$B=\{x \mid ax+1=0\}$，若 $B\subset A$，求实数 a 的值．
3. 设集合 $A=\{x \mid 1<x<2\}$，$B=\{x \mid x<a\}$，如果 $A\subset B$，求实数 a 的取值范围．

例 7 (1) 设集合 $P=\{y \mid y=x^2-1, x\in\mathbf{R}\}$，$Q=\{y \mid y=-2x^2+2, x\in\mathbf{R}\}$，求 $P\cap Q$.

(2) 设集合 $P=\{(x,y) \mid y=x^2-1, x\in\mathbf{R}\}$，$Q=\{(x,y) \mid y=-2x^2+2, x\in\mathbf{R}\}$，求 $P\cap Q$.

解 (1) 集合 P 中值域的范围是 $y\geqslant -1$，而集合 Q 中值域的范围是 $y\leqslant 2$，

$\therefore\quad P\cap Q=\{y \mid -1\leqslant y\leqslant 2\}$.

(2) 集合 P 是抛物线 $y=x^2-1$ 上的点的全体，而集合 Q 是抛物线 $y=-2x^2+2$ 上的点的全体，P 和 Q 的交集是两条抛物线的公共部分，即是两抛物线的交点．解方程组 $\begin{cases} y=x^2-1, \\ y=-2x^2+2 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_1=-1, \\ y_1=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2=1, \\ y_2=0 \end{cases}$ $\therefore\quad P\cap Q=\{(-1,0),(1,0)\}$.

注意 在讨论两集合运算时，首先看清组成集合的元素是什么；其次运算的结果仍要用集合的记号来表示．

例 8 (1) 设集合 $A=\{(x,y) \mid 4x+2y=1\}$，

$B=\{(x,y) \mid x+2ay=b\}$，求 $A\cap B$；

(2) 设集合 $A=\{x \mid -2<x<4, x\in\mathbf{R}\}$，集合 $B=\{x \mid x^2-3ax+2a^2=0\}$.

求① 实数 a 在什么范围内取值时 $B\neq\varnothing$，且 $A\cap B=B$？

② 实数 a 在什么范围内取值时 $A\cap B=\varnothing$？

分析 此题含有字母，解的时候注意对字母的不同取值情况加以讨论．

解 (1) x,y 同时满足方程组

$$\begin{cases} 4x+2y=1, & ① \\ x+2ay=b. & ② \end{cases}$$

由②×4−①，得 $(8a-2)y=4b-1$.

当 $\begin{cases} 8a-2=0, \\ 4b-1=0 \end{cases} \Rightarrow a=\dfrac{1}{4}$，且 $b=\dfrac{1}{4}$ 时，$y\in\mathbf{R}, x\in\mathbf{R}$，$\therefore\quad A\cap B=A$.

当 $\begin{cases} 8a-2=0, \\ 4b-1\neq 0 \end{cases} \Rightarrow a=\dfrac{1}{4}$，且 $b\neq\dfrac{1}{4}$ 时，$y\in\varnothing$，$\therefore\quad A\cap B=\varnothing$.

当 $8a-2\neq 0 \Rightarrow a\neq\dfrac{1}{4}$ 时，$y=\dfrac{4b-1}{8a-2}$，代入①，$x=\dfrac{a-b}{4a-1}$，

$$\therefore\quad A\cap B=\left\{\left(\frac{a-b}{4a-1},\frac{4b-1}{8a-2}\right)\right\}.$$

综上所述，当 $a=\dfrac{1}{4}$，且 $b=\dfrac{1}{4}$ 时，$A\cap B=A$；当 $a=\dfrac{1}{4}$，且 $b\neq\dfrac{1}{4}$ 时，$A\cap B=\varnothing$；当 $a\neq\dfrac{1}{4}$ 时，$A\cap B=\left\{\left(\dfrac{a-b}{4a-1},\dfrac{4b-1}{8a-2}\right)\right\}$.

注意 当 $a\neq\frac{1}{4}$ 时，$A\cap B$ 是单元集合，集合内小括号不能漏掉.

(2) **分析** ① 由题设 $B\neq\varnothing$，且 $A\cap B=B$，则 $B\subset A$，② $A\cap B=\varnothing$，B 可能是空集.

解 ① $B=\{a,2a\}$. ∵ $B\neq\varnothing$，且 $A\cap B=B$， ∴ $B\subset A$，

∴ $\begin{cases}-2<a<4,\\-2<2a<4\end{cases}\Rightarrow -1<a<2.$

② 当 B 为 $\varnothing$ 时，即方程无实数解，$\Delta=9a^2-8a^2<0$. $\Rightarrow a^2<0$，不可能.

又 ∵ $A\cap B=\varnothing$， ∴ $\begin{cases}a\geqslant4,\\2a\geqslant4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a\leqslant-2,\\2a\leqslant-2.\end{cases}$ 解不等式组，得 $a\geqslant2$ 或 $a\leqslant-1$.

综上所述，当 $a\in\{a\mid-1<a<2\}$ 时，$B\neq\varnothing$，且 $A\cap B=B$；

当 $a\leqslant-1$ 或 $a\geqslant2$ 时，$A\cap B=\varnothing$.

说明 (1) 有时集合运算转化为集合之间的关系，如 $B\neq\varnothing$ 且 $A\cap B=B$，转化为 $B\subset A$，即 B 中的元素全在集合 A 之内；

(2) 由 $A\cap B=\varnothing$，不能忽视 A、B 中有一个集合可能是空集；

(3) 由分几种情况讨论所得出的各结果，最后要进行综合，使题目的解答有一个总的结论.

[基础训练]

1. 已知集合 $A=\left\{x\,\middle|\,\frac{8}{x}\in\mathbf{N},x\in\mathbf{N}\right\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\frac{14}{x}\in\mathbf{N},x\in\mathbf{N}^*\right\}$，求 $A\cap B$.
2. 已知集合 $A=\{x\mid x=2n,n\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{x\mid x=3n,n\in\mathbf{N}^*\}$，求 $A\cap B$.
3. 已知集合 $P=\{(x,y)\mid y=2x-1\}$，$Q=\{(x,y)\mid y=x+3\}$，求 $P\cap Q$.
4. 设集合 $A=\{y\mid y=x^2-2x-3,x\in\mathbf{R}\}$，集合 $B=\{y\mid y=-x^2-2x-3,x\in\mathbf{R}\}$，求 $A\cap B$.
5. 设集合 $A=\{x\mid-1\leqslant x\leqslant2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x\leqslant a\}$，若 $A\cap B=A$，求实数 a 的取值范围.

例 9 设集合 $A=\{x\mid x^2+(2m-3)x-3m=0\}$，集合 $B=\{x\mid x^2+(m-3)x+m^2-3m=0\}$，设 $A\neq B$，$A\cap B\neq\varnothing$，求 $A\cup B$.

分析 ∵ $A\cap B\neq\varnothing$，即集合 A、B 中两方程有公共解，不妨设公共解为 a，则 a 满足两方程.

解 设 A、B 的共同元素为 a，则有

$$\begin{cases}a^2+(2m-3)a-3m=0, & ①\\a^2+(m-3)a+m^2-3m=0. & ②\end{cases}$$

①－②，得 $ma-m^2=0$. $m=0$，或 $m=a$；

当 $m=0$ 时，$A=\{x\mid x^2-3x=0\}=\{0,3\}$，

$B=\{x\mid x^2-3x=0\}=\{0,3\}$. 这与 $A\neq B$ 矛盾， ∴ $m=0$ 舍去.

当 $m=a$ 时，代入①，得 $m=0$(舍)，$m=2$，

∴ $A=\{x\mid x^2+x-6=0\}=\{2,-3\}$， $B=\{x\mid x^2-x-2=0\}=\{2,-1\}$，

∴ $A\cup B=\{-3,-1,2\}$.

例 10 设全集 $I=\{x\mid x<20,x=2k,k\in\mathbf{N}^*\}$，若 $A\cap\overline{B}=\{12,14\}$，$\overline{A}\cap B=\{2,4,16,18\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$，求集合 A、B.

解法 1 $I=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18\}$.

∵ $A\cap\overline{B}=\{12,14\}$，∴ $12,14\in A$，$12,14\notin B$.

∵ $\overline{A}\cap B=\{2,4,16,18\}$，∴ $2,4,16,18\notin A$，但 $2,4,16,18\in B$.

∵ $\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$，∴ $I=A\cup B$.

元素 $6\in\overline{A}$，由$\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$，∴ $6\notin\overline{B}$，若 $6\in B$，则 $6\in\overline{A}\cap B$，这与题设矛盾，∴ $6\in A$. 同理可得 $8,10\in A$，同法可证 $6,8,10\in B$，∴ $A=\{6,8,10,12,14\}$，$B=\{2,4,6,8,10,16,18\}$.

解法 2 据已知条件，画文氏图(图 1-2)如下.

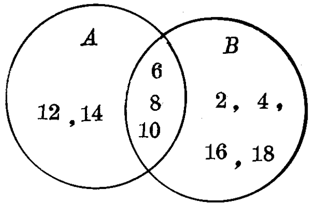


图 1-2

∴ $A=\{6,8,10,12,14\}$，$B=\{2,4,6,8,10,16,18\}$.

说明 借助文氏图，分别依 $A\cap\overline{B}$、$\overline{A}\cap B$、$\overline{A}\cap\overline{B}$的含义将有关元素对号填入有关区域内，如 $A\cap\overline{B}=\{12,14\}$，故元素 12、14 填入 A，$\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$，故 $I=A\cup B$，则 6,8,10 为 $A\cap B$ 的元素，填入 A、B 的公共部位. 利用文氏图可以比较简捷地确定集合 A、B 的元素.

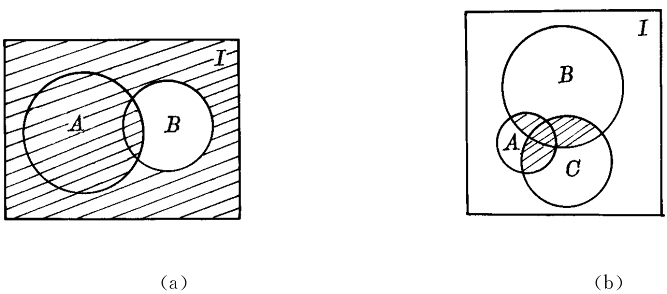
例 11 (1) 在下列图 1-3 中，用阴影表示下面的集合.

$A\cap\overline{B}$. $(\overline{A\cup B})\cap C$.

(a) (b)

图 1-3

(2) 用集合运算表示图中的阴影部分.



(a) (b)

图 1-4

解 (1) $A\cap\overline{B}$ 用阴影表示如图 1-3(a)所示.

$(\overline{A\cup B})\cap C$ 用阴影表示如图 1-3(b)所示.

(2) 图 1-4(a)用集合运算表示为$\overline{B}\cup A$，图 1-4(b)用集合运算表示为$(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)$.

***例 12** 某班学生考试，数学成绩获优秀者 30 人，外语成绩获优秀者 26 人，两门学科中至少有一门获优秀者 36 人，求数学、外语均获优秀的人数.

解 由公式 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$$=30+26-36=20(\text{人}).$$

答 数学、外语均为优秀者的人数为 20 人.

［基础训练］

1. 设全集 $I=\mathbf{R}$，$A=\{x|x\geqslant 1\}$，$B=\{x|-1\leqslant x<2\}$，则$\overline{A\cap B}=$________.
2. 设全集 $I=\{x|x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant 1\}$，$A=\{x|x>3$ 或 $x<1\}$，$B=\{x|x>2$ 或 $x<1\}$，则 $A\cup B$ $=$________，$\overline{A}=$________，$\overline{B}=$________.
3. 设全集 $I=\mathbf{R}$，又集合 $A=\{x|-5<x<5\}$，$B=\{x|0\leqslant x<7\}$，则 $A\cup B=$________，$\overline{A}\cap\overline{B}$ $=$________，$\overline{A}\cup\overline{B}=$________，$\overline{A\cap B}=$________，$\overline{A\cup B}=$________.
4. 已知集合 $A=\{x|x=-t^2,t\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|x=3+|t|,t\in\mathbf{R}\}$，全集 $I=\mathbf{R}$，求 $A\cup B$，$\overline{A\cup B}$.
5. 已知全集 $I=\{x|x=3n,n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\leqslant 5\}$，$A=\{x|x^2+px+27=0,P\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{x|x^2-15x+q=0,q\in\mathbf{N}^*\}$且 $A\cup\overline{B}=\{3,9,12,15\}$求集合 A、B.
6. 若集合 $A=\{x|-1\leqslant x<1\}$，当全集 I 分别取下列集合时，求$\overline{A}$.
   (1) $I=\mathbf{R}$；(2) $I=\{x|x\leqslant 2\}$；(3) $I=\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}$.

基本训练 1.1

1. 用列举法表示下列集合.
   (1) {16 以内的质数}；　　(2) $\{x|x=\sqrt{a},a<36,x\in\mathbf{N}^*\}$；
   (3) $\{y|y=x^2-1,|x|\leqslant 2,x\in\mathbf{Z}\}$.
2. 用描述法表示下列集合：
   (1) 反比例函数 $y=\dfrac{2}{x}$图象上的点；　　(2) 奇数.
3. 用适当的符号填空：($\in$，$\notin$，$=$，$\subset$，$\supset$)
   (1) $\varnothing$____$\{x|x^2+1=0,x\in\mathbf{R}\}$；　　(2) $\{x|x>-3\}$____$\{x|x>-3$ 且 $x<3\}$；
   (3) 如果集合 $M=\{y|y=x^2+6x+4,x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{y|y=x^2-6x+4,x\in\mathbf{R}\}$，则 M ____ N；
   (4) 集合 $A=\{x|x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x|x=4k\pm 1,k\in\mathbf{Z}\}$，则 A ____ B.
4. 已知$\{1,2\}\subset P\subseteq\{1,2,3,4\}$，求集合 P 的所有可能情况.
5. 写出小于 6 的正奇数集合 A 的所有子集.
6. 已知集合 $M=\{x|x=a^2+2a+4,a\in\mathbf{R}\}$，$N=\{y|y=b^2-4b+6,b\in\mathbf{R}\}$，试判断 M、N 之间的关系.
7. (1) 设 $I=\{1,2,3,4,5\}$且 $A\subset I$，$B\subset I$，$A\cap B=\{2\}$，$\overline{A}\cap B=\{4\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,5\}$，则下列结论正确的是(　　)
   (A) $3\in A$，$3\in B$.　　(B) $3\in\overline{A}$，$3\in A$.
   (C) $3\in A$，$3\in\overline{B}$.　　(D) $3\in\overline{A}$，$3\in\overline{B}$.
   (2) 设 S，T 是两个非空集合，且 $S\not\subseteq T$，$T\not\subseteq S$，令 $X=S\cap T$，则 $S\cup X$ 等于
   (A) $\varnothing$.　(B) T.　(C) X.　(D) S.
   (3) 若集合 $A=\{1,3,x\}$，$B=\{1,x^2\}$，且 $A\cup B=\{1,3,x\}$，则满足条件的实数 x 的个数为
   (A) 1 个.　(B) 2 个.　(C) 3 个.　(D) 4 个.

(4) 设集合 $A\subseteq B$,$A\subseteq C$,且 $B=\{0,1,2,3,4,5\}$,$C=\{0,2,4,6,8\}$,则集合 A 的个数是(　　)

(A) 8.　　(B) 16.　　(C) 32.　　(D) 64.

8. 已知 $A=\{x\mid 2x^2+x+m=0\}$,$B=\{x\mid 2x^2+nx+2=0\}$,且 $A\cap B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$,求(1) $A\cup B$;(2) m、n 值.

9. 集合 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$,$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$,$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$,求 a 为何值时,$A\cap B\supset\varnothing$ 与 $A\cap C=\varnothing$ 同时成立?

10. 设全集 $I=\{2,3,a^2+2a-3\}$,$A=\{|a+1|,2\}$,$\overline{A}=\{5\}$,求实数 a 的值.

11. 设 $A=\{x\mid x^2+4x=0\}$,$B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$其中 $x\in\mathbf{R}$,如果 $A\cap B=B$,求实数 a 的取值范围.

*12. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-(p+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$且 $A\cap R^+=\varnothing$,求实数 P 的取值范围.

*13. 集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+mx-y+2=0\}$,集合 $B=\{(x,y)\mid x-y+1=0$,且 $0\leqslant x\leqslant 2\}$,又 $A\cap B\neq\varnothing$,求实数 m 的取值范围.

*14. 已知集合 $A=\{x\mid 2a\leqslant x\leqslant a^2+1,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3a+1,x\in\mathbf{R}\}$,$a\in\mathbf{R}$,求使 $A\subseteq B$ 时,a 的取值范围.

自我评估 1.1(A 卷)

一、选择题

1. 下列关系式中正确的是(　　)

(A) $a\subset\{a,b\}$.　　(B) $\{a\}\in\{a,b\}$.

(C) $\{a,b\}\subset\{a,b\}$.　　(D) $\{a,b\}\subseteq\{b,a\}$.

2. 集合 $M=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$,集合 $N=\{x\mid -1<x<3\}$集合 $M\cap N=$(　　)

(A) $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$.　　(B) $\{x\mid 0\leqslant x<2\}$.

(C) $\{x\mid 0\leqslant x<1\}$.　　(D) $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$.

3. 如果全集 $I=\{a,b,c,d,e\}$,$M=\{a,c,d\}$,$N=\{b,d,e\}$,那么$\overline{M}\cap\overline{N}$等于(　　)

(A) $\varnothing$.　　(B) $\{d\}$.　　(C) $\{a,b\}$.　　(D) $\{b,e\}$.

4. 若集合 M、N 满足 $M\subset N$,则以集合中表示空集的是(　　)

(A) $M\cap\overline{N}$.　　(B) $\overline{M}\cap N$.　　(C) $\overline{M}\cup\overline{N}$.　　(D) $M\cap N$.

5. 已知方程 $x^2-px+15=0$ 与 $x^2-5x+q=0$ 的解集分别是 S 与 M,且 $S\cap M=\{3\}$,则 $p+q$的值是(　　)

(A) 14.　　(B) 11.　　(C) 7.　　(D) 2.

二、填空题

1. 设 $I=R$,$A=\left\{x\mid 0<x<\frac{5}{2}\right\}$,$B=\left\{x\mid x\geqslant\frac{2}{3}\text{或 }x\leqslant-\frac{1}{2}\right\}$,则$\overline{A}=$________,$\overline{B}=$________,$\overline{A}\cap\overline{B}=$__________.

2. 方程 $x^2-5x+6=0$ 的解集可表示为____________. 方程组$\begin{cases}2x+3y=13,\\3x+2y=0\end{cases}$的解集可表示为______________.

3. 设集合 $A=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 2\}$,$B=\{x\mid 2m-1\leqslant x\leqslant 2m+1\}$且 $A\supseteq B$,则实数 m 的取值范围

是______.

4. 设集合 $A=\{-3,a+1,a^2\}$，$B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，且 $A\cap B=\{-3\}$ 则 $a=$______，$A\cup B=$______.

5. 已知集合 $A=\{x|x\leqslant 10\}$，$B=\{x|x>0\}$，则 $A\cap B=$______，$A\cup B=$______.

三、解下列各题

1. 已知集合 $A=\{x|-3<x<5\}$，$B=\{x|-a<x<a, a>0\}$.

(1) 若 $A\supset B$，求 a 的取值范围；

(2) 若 $A\cap\overline{B}=\varnothing$，求 a 的取值范围.

2. 已知 $A=\{1,2,7,8\}$，$B=\{n|n^2<50, n\in\mathbf{N}^*\}$，$C=\left\{m\left|\frac{m}{3}\in\mathbf{N}^*, 0\leqslant m\leqslant 30\right.\right\}$，$D=\{k|k=2^e, e=0,1,2,\cdots,6\}$，设全集为 $\mathbf{N}$，求：

(1) $A\cup B$；(2) $B\cap C$；(3) $(\overline{A}\cap B)\cup D$.

3. 集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|x^2-ax+a-1=0\}$，$C=\{x|x^2-2x+m=0\}$，已知 $A\cup B=A$，$A\cap C=C$，求 a，m 的值.

4. 设集合 $A=\{x|1\leqslant x<2, x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|1\leqslant x\leqslant a, x\in\mathbf{R}\}$，

(1) 当 $A\subset B$ 时，求 a 的取值范围；

(2) 若 $A\cap B=B$ 时，求 a 的取值范围；

(3) 若 A、B 两集合仅有一个元素的集合时，求 a 值.

自我评估 1.1(B 卷)

一、选择题

1. 在下列各式中，

$1\in\{0,1,2\}$，$(1,2)\in\{0,1,2\}$，$\{0,1,2\}\subseteq\{0,1,2\}$，

$\varnothing\subset\{0,1,2\}$，$\{0,1,2\}=\{0,2,1\}$，$\varnothing\subset\{x|x^2+1=0\}$

错误的个数是(　　)

(A) 1 个.　　(B) 2 个.　　(C) 3 个.　　(D) 4 个.

2. 设全集 $I=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}$，$A=\left\{(x,y)\left|\frac{y-3}{x-2}=1, x,y\in\mathbf{R}\right.\right\}$，$B=\{(x,y)|y\neq x+1, x, y\in\mathbf{R}\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}$ 为(　　)

(A) $\overline{A}$.　　(B) $\overline{B}$.　　(C) $\varnothing$.　　(D) $\{(2,3)\}$.

3. 若 $A=\{x|x=3n+1, n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x|x=3n-2, n\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{x|x=6n+1, n\in\mathbf{Z}\}$，$A$，$B$，$C$ 的关系是(　　)

(A) $A\supset B\supset C$.　　(B) $A\subset B=C$.　　(C) $A=B\supset C$.　　(D) $A=B=C$.

4. 设全集 I，集合 M、N、P 满足 $M\subset N$，$\overline{P}\subset\overline{N}$，则下列结论中正确的是(　　)

(A) $\overline{M}\subset\overline{P}$.　　(B) $\overline{P}\subset\overline{M}$.　　(C) $\overline{M}=\overline{P}$.　　(D) $\overline{M}$与$\overline{P}$的包含关系不能确定.

5. 已知集合 $P=\{x|x=n, n\in\mathbf{Z}\}$，$Q=\left\{x\left|x=\frac{n}{2}, n\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，$R=\left\{x\left|x=\frac{1}{2}+n, n\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，则有(　　)

(A) $Q\subset P\subset R$.　　(B) $R\subset Q\subset P$.　　(C) $Q=P\cup R$.　　(D) $Q=P\cap R$.

二、填空题