新版

数学辅导与训练

（高中三年级用）

黄汉禹　杨安澜　主编

上海科学技术出版社　上海教育出版社

内 容 提 要

《数学辅导与训练》一书依据上海市数学学科课程标准编写而成. 本书分上、下两篇. 上篇同步辅导篇，包括排列、组合与概率，统计初步，极限；下篇综合辅导篇，对高中数学知识综合整理，供学生复习用. 全书分学习要求、知识要点、解题指导、要点剖析、基本训练、本章测试和近年高考试题选等组成，该书最大特点是针对性强，通过提示各个知识要点，指导各类题的解法，让学生牢固地掌握数学基础知识，提高学生分析问题和解决问题的能力.

责任编辑　周玉刚

新　　版

数学辅导与训练

(高中三年级用)

黄汉禹　杨安澜　主编

上海科学技术出版社　　上 海 教 育 出 版 社

(上海瑞金二路 450 号)　　(上海永福路 123 号)

出版、发行

新华书店上海发行所经销　　上海市江杨印刷厂印刷

开本 787×1092　1/16　印张 21.5　字数 511 000

2002 年 1 月第 1 版　2002 年 1 月第 1 次印刷

印数：1—11 000

ISBN 7-5323-6380-5/G · 1432

定价：22.50 元

编写说明

本书以1998年修订的学科课程标准和教材使用意见(高中部分)为依据,内容紧密配合课本,旨在帮助学生克服学习上的困难,增长阅读能力和自学能力,提高学科素质,及时消化所学的知识内容(包括基本概念、基本理论、基本要求,以及有关的重点、难点),并为学有余力的学生提供一些深、宽度略高于课程标准的学习资料.

由上海中小学课程教材改革委员组织编写的、供国家发达地区使用的中、小学数学教材,经过多年试用,越来越被广大教师、家长和社会认同与接受.由于这套教材的成功,数学编写组曾于1994年获得了"苏步青教育奖",在社会上取得了良好的信誉.为更好地体现这套教材的精神,本辅导与练习每章按节在结构上由学习要求、知识要点、解题指导、疑难分析及基本训练等部分组成.

[学习要求] 根据数学学科课程标准,简明扼要、恰如其分地分条列出教学要求.

[解题指导] 精选例题,力求使每个例题都有其显明的目的性.每个例题视其难易,可设有分析、解(包括多种典型解法)、解后适当而恰如其分地提出"注意"、"说明"、"思考"、"研究"等项目.这里"注意"是指解题的注意事项,指出其容易出错或疏忽的地方;"说明"是指通过本例阐明解题的一般规律,告诉学生解题的基本方法;"思考"是指当本例题的条件和结论作适当改变时,命题将起何变化,也在解题方法上提出思考性问题;"研究"是更高层次上的"思考",使学生对某些数学规律能自我发现.

[疑难分析] 将解题中的疑难所在作简明扼要的概括分析.

[基本训练] 通过解题指导和疑难分析之后,让学生进行必要的、基本的解题训练,以使有关的数学知识和数学思想方法及时得到落实.

本书各章还进行简明扼要的小结,每章最后又有本章测试,可以进一步帮助学生巩固所学知识,加深理解,熟练技能,全面掌握本章的数学基本概念、基础知识、数学思想方法及其应用.

本书由上海中学、市西中学、控江中学等三所市重点中学的教师编写,作者们对书稿的体例和选材反复斟酌,力求充分体现以培养创新能力为核心的素质教育精神.全书渗透了三校丰富的数学教学经验,一定程度上揭示了市重点中

学数学教学的真谛. 编写过程中始终得到三校领导的大力支持,在此我们表示深深的谢意. 本书由黄汉禹、杨安澜主编,邹一心、周玉刚主审. 本书同步辅导篇中第十四章由张建国编写,第十五章由王瀛编写,第十六章由徐岳灿编写. 综合辅导篇中第一章由张颂方编写,第二、五章由徐岳灿编写,第三、四章由吕宝兴编写,第六章董燮良、朱瑞华编写,第七、八章王瀛编写,参加编写的还有杨阳,许滔等同志.

本丛书已在教学实践中使用了两至三轮. 广大师生在教学过程中,一方面对本书的内容、编制的体例和格局深深厚爱;另一方面又热情地给我们指出了其中的一些不足之处。为使本书修改得更好,本版由上海中学吕宝兴、徐岳灿进行了全面修订,黄汉禹审阅了修订稿. 限于我们的水平,书中难免仍有不足之处,恳请广大师生、家长多提宝贵意见.

上海科学技术出版社
上 海 教 育 出 版 社
2001 年 11 月

目录

上篇　同步辅导篇

第十四章　排列、组合与概率 …… 1
一、排列 …… 1
基本训练 14.1 …… 6
二、组合 …… 7
基本训练 14.2 …… 13
单元测试(A 卷) …… 14
单元测试(B 卷) …… 16
三、二项式定理 …… 17
基本训练 14.3 …… 21
四、概率初步 …… 22
基本训练 14.4 …… 24
本章测试(A 卷) …… 25
本章测试(B 卷) …… 26
第十五章　统计初步 …… 29
一、总体 …… 29
二、抽样调查 …… 31
三、统计实习 …… 32
本章测试 …… 32
第十六章　极限 …… 34
一、数列的极限 …… 34
基本训练 16.1 …… 35
基本训练 16.2 …… 38
单元测试(A 卷) …… 38
单元测试(B 卷) …… 39
*二、函数的极限 …… 40
基本训练 16.3 …… 42
基本训练 16.4 …… 43
单元测试(A 卷) …… 44
单元测试(B 卷) …… 44
本章测试(A 卷) …… 45

本章测试(B卷) …… 46

下篇　综合辅导篇

第一章　集合与函数 …… 48
一、集合与命题 …… 48
单元练习(A) …… 52
单元练习(B) …… 54
二、函数及其性质 …… 55
单元练习(A) …… 68
单元练习(B) …… 70
三、指数函数与对数函数 …… 71
单元练习(A) …… 76
单元练习(B) …… 77
本章测试(A卷) …… 78
本章测试(B卷) …… 79
近年高考题选 …… 80
第二章　不等式 …… 84
一、不等式的基本性质与解法 …… 84
单元练习(A) …… 89
单元练习(B) …… 90
二、不等式的证明 …… 91
单元练习(A) …… 94
单元练习(B) …… 95
三、不等式的应用 …… 95
单元练习(A) …… 99
单元练习(B) …… 100
本章测试(A卷) …… 101
本章测试(B卷) …… 101
近年高考题选 …… 102
第三章　数列 …… 105
一、等差数列与等比数列 …… 105
单元练习(A) …… 113
单元练习(B) …… 114
二、数列的极限 …… 116
单元练习(A) …… 122
单元练习(B) …… 123
三、数学归纳法 …… 123
单元练习 …… 126
本章测试(A卷) …… 127

本章测试(B 卷)…… 128
近年高考题选…… 130
第四章　复数…… 133
一、复数的代数形式…… 133
单元练习(A)…… 138
单元练习(B)…… 140
二、复数的三角形式…… 141
单元练习(A)…… 147
单元练习(B)…… 149
本章测试(A 卷)…… 149
本章测试(B 卷)…… 151
近年高考题选…… 152
第五章　三角…… 154
一、三角函数的图象与性质…… 154
单元练习(A)…… 158
单元练习(B)…… 159
二、三角式的化简与求值…… 160
单元练习(A)…… 165
单元练习(B)…… 166
三、反三角函数与三角方程…… 168
单元练习(A)…… 171
单元练习(B)…… 172
四、解斜三角形…… 173
单元练习(A)…… 177
单元练习(B)…… 178
本章测试(A 卷)…… 179
本章测试(B 卷)…… 181
近年高考题选…… 182
第六章　立体几何及向量…… 185
一、直线与平面…… 185
单元练习(A)…… 189
单元练习(B)…… 193
单元练习(C)…… 200
单元练习(D)…… 203
二、多面体…… 205
单元练习(A)…… 208
单元练习(B)…… 215
三、向量…… 219
单元练习(A)…… 227

单元练习(B) …… 228
本章测试(A 卷) …… 229
本章测试(B 卷) …… 231
近年高考题选 …… 234
近年会考、高考题选 …… 238
第七章　直线与圆 …… 241
一、直线 …… 241
单元练习(A) …… 246
单元练习(B) …… 247
二、圆 …… 248
单元练习(A) …… 253
单元练习(B) …… 253
本章测试(A 卷) …… 254
本章测试(B 卷) …… 256
近年高考题选 …… 257
第八章　圆锥曲线 …… 260
一、椭圆、双曲线、抛物线 …… 260
单元练习(A) …… 271
单元练习(B) …… 272
单元练习(C) …… 273
二、参数方程与极坐标 …… 274
单元练习(A) …… 283
单元练习(B) …… 284
本章测试(A 卷) …… 284
本章测试(B 卷) …… 286
近年高考题选 …… 288
参考答案 …… 293

上篇　同步辅导篇

第十四章　排列、组合与概率

一、排　　列

［学习要求］

1．掌握乘法原理，并能用它分析和解决一些简单的计数问题．

2．理解排列的意义，掌握排列数公式，并能用它分析和解决一些简单的实际问题．

［知识要点］

1．乘法原理是处理计数问题的重要原理，是推导排列数公式、组合数公式的依据．要正确理解原理的条件：事件分 n 个步骤，缺一不可．正确应用乘法原理的关键，在于合理地周密地将所需计数问题分成若干个步骤．

2．理解排列的概念，相同排列是指两个排列的元素相同，且排列顺序也相同．全排列是指 n 个元素全部取出按一定顺序排成一列．借助树图来阐述乘法原理，可直观形象地显示元素先后顺序的变化状况，形成不同的排列．

3．排列数公式

$\mathrm{P}_n^m=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)$．

用阶乘符号表示排列数公式为

$\mathrm{P}_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$，规定 $0!=1$．

4．排列的应用，解决实际问题中的计数问题．

本节重点内容是排列的应用．

［解题指导］

例 1　$A=\{x\mid |x|\leqslant 3,x\in\mathbf{Z}\}$，$z=a+b\mathrm{i}$，$a$、$b\in A$．求

（1）满足条件的复数的个数；（2）满足条件的虚数的个数．

分析　$A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$，A 中共有 7 个元素．第一步从 7 个元素中取一个作为实部，有 7 种取法．第二步再从 7 个元素中取一个作为虚部，也有 7 种．而虚数的虚部不能为 0，虚部只能从 6 个元素中取．

解　（1）满足条件的复数 z 共有

$$7\times7=49(\text{个})；$$

（2）满足条件的虚数 z 共有

$$7\times6=42(\text{个})．$$

例 2　5 个同学同时参加数学、物理、化学三项竞赛，争夺各项第一．如果没有并列第一名，则可能有多少种不同结果？

分析 分成三步考虑.第一步数学第一,5 个人都可争得,所以有 5 种可能.第二步为物理第一,仍有 5 种可能,第三步化学第一,仍有 5 种可能.

解 可能有的不同结果共

$$5\times5\times5=5^3=125(\text{种}).$$

[基础训练]

1. 有 6 条裤子,5 件上衣.要配成一套出售,共有多少种不同的配法?
2. 某商场共有东南西北四个门,某人从一个门进去,一个门出来,共有多少种进出方法?从另一门出来呢?
3. 四个信箱中投入 3 封信,共有多少种投信方法?
4. 四本不同书,全部分给 3 个人,共有多少种不同的分法?

例 3 $1+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots+n\cdot n!=100!-1$,求 n.

分析 $k\cdot k!=k\cdot k!+k!-k!=(k+1)!-k!$.

解 左边$=2!-1!+3!-2!+\cdots+(n+1)!-n!$

$=(n+1)!-1$,

右边$=100!-1$,

∴ $n+1=100$,$n=99$.

例 4 用排列数表示:

$(55-a)(54-a)\cdots(30-a)$ (a 是小于 30 的正整数).

解 原式$=P_{55-a}^{26}$.

例 5 $P_n^7=2nP_n^5$,求 n.

解 由排列数公式,得

$$\frac{n!}{(n-7)!}=2n\cdot\frac{n!}{(n-5)!}.$$

整理,得

$$n^2-13n+30=0.$$

解方程,得

$$n_1=10,n_2=3(\text{舍去}).$$

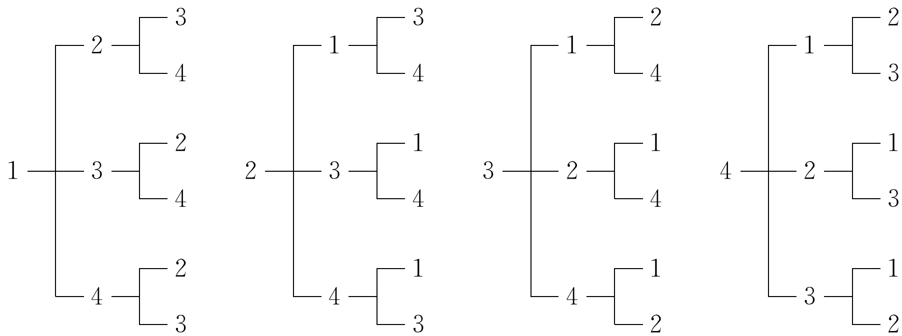
$$\therefore\quad n=10.$$

[基础训练]

1. $\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{100!}$,求 n.
2. 用排列数表示$(n-m)(n-m+1)\cdots(n-m+15)$ (m、n 是自然数,$m<n$).
3. 计算:$\frac{P_8^3+P_8^2}{P_{10}^4-P_9^3}$.
4. $5P_9^m=3mP_{10}^{m-1}$,求 m.

例 6 $A=\{1,2,3,4\}$,$ax^2+bx+c=0$ 中,a、b、c 是 A 中的不同元素.写出所有的一元二次方程.

解 可能有的 a、b、c 的不同取法用树图表示如下:



于是可得一元二次方程.例如,$x^2+2x+3=0$ 等 24 种不同形式.

例 7 9 个人排队,按下列要求各有多少种排法?

(1) A 不在排头;

(2) A 不在排头,B 不在排尾;

(3) A、B、C 三人中任意两人不排在一起;

(4) A、B、C 三人必须排在一起.

解 (1) **解法 1** A 不在排头,则排头的位置只能由其余 8 个人中的一个去排,有 P_8^1 种,剩下 8 个位置可任意排共 P_8 种,所以不同排法为

$$P_8^1P_8=322560(\text{种}).$$

解法 2 A 不能排排头,则 A 只能在后面 8 个位置中选一个.共有 P_8^1 种,剩下 8 个位置共有 P_8 种,所以不同排法为

$$P_8^1P_8=322560(\text{种}).$$

解法 3 9 个人排队共有 P_9 种,其中 A 在排头不满足要求,把它减去.A 在排头的共有排法 P_8 种,所以不同排法为

$$P_9-P_8=322560(\text{种}).$$

说明 解法 1、2 的式子虽然一样,但分析思路不同.解法 1 是从排头这个特殊位置出发去分析,而解法 2 是从 A 这个特殊元素出发去分析的.

(2) 9 个人排队共 P_9 种,A 在排头的共有 P_8 种,B 在排尾的共有 P_8 种,A 在排头,且 B 在排尾的共有 P_7 种,所以排法共有

$$P_9-P_8-P_8+P_7=287280(\text{种}).$$

说明 当减去 A 在排头的 P_8 种时,B 在排尾也在其中.当减去 B 在排尾的 P_8 种时,A 在排头也在其中,则 A 在排头且 B 在排尾的这种情况被减去 2 次.所以要加上 A 在排头且 B 在排尾的这种排法 P_7 种.

(3) 先将其余 6 人排队共有 P_6 种排法.在这些人的中间和两边共有 7 个空档,而 A、B、C 在这 7 个位置的任意 3 个上都满足 A、B、C 不相邻这个条件,共有 P_7^3 种排法,所以 A、B、C 任意两人不相邻的排法共有

$$P_6P_7^3=151200(\text{种}).$$

(4) A、B、C 在一起共有 P_3 种排法.把 A、B、C 看成一个元素,与其余 6 人构成 7 个元素排队,共有 P_7 种,所以排法共有

$$P_3P_7=30240(\text{种}).$$

说明 不相邻问题常用插空档的方法解题,而相邻问题常把这些相邻的元素看成一个合成元素来

解题.

例 8 用 0,1,2,3,4 这五个数组成:

(1) 无重复数字的三位数;

(2) 无重复数字的三位奇数;

(3) 无重复数字的三位数,且十位上不是偶数的三位数,各有多少个?

解 (1) 特殊位置是百位,不能取 0,所以百位上只能从 1,2,3,4 这 4 个数中取,有 P_4^1 种,十、个位从剩下的四个数中取,有 P_4^2 种,所以无重复数字的 3 位数共有

$$P_4^1P_4^2=48(\text{个});$$

(2) 百位与个位都是特殊的位置,个位更特殊. 所以先考虑个位数. 个位数是奇数,所以只能从 1,3 这两个数中取,有 P_2^1 种. 再考虑百位. 个位已用去一个,又不能取 0,所以在剩下的 3 个数中取,有 P_3^1 种,十位再在剩下的 3 个数中取有 P_3^1 种. 所以无重复数字 3 位奇数共有

$$P_2^1P_3^1P_3^1=18(\text{个});$$

(3) 十位上不是偶数,则只能是奇数,共 P_2^1 种,百位上有 P_3^1 种,个位上是 P_3^1 种,所以满足条件的三位数共有

$$P_2^1P_3^1P_3^1=18(\text{种}).$$

[基础训练]

1. a、$b\in\{1,2,3,5,7\}$,$ax+b=0$,$a\neq b$. 写出所有的一次方程,共有多少个?
2. 复数 z 的实部与虚部是 $A=\{0,1,2,3,4\}$中两个不同数,共有多少个复数? 共有多少虚数?
3. 5 个人排成一排. (1) A 不在中间,共有多少种排法? (2) A 不在两头,共有多少种排法?
4. 6 个人排成一排. (1) A、B 两人不排在一起,有几种排法?(2) A、B 两人必须排在一起,有几种排法?
5. 用 1,2,3,4,5 组成多少个无重复数字. (1) 三位偶数? (2) 五位奇数? (3) 奇数不在十位上的四位数?
6. 用 0,1,2,3,4,5 这 6 个数字组成首位是偶数的无重复数字的三位奇数共有多少个?
7. 用 1,2,3,4,5,6 组成无重复数字,且偶数不相邻的六位数共有多少个?
8. 6 人排队,A、B 在一起,C、D 也在一起共有多少种排法?

例 9 420 共有多少个正约数?

解 $420=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$,它的质因数中取若干个,构成一个正约数. 对 2^2 有不取,取一个,取 2 个 3 种,3 这个质因数有不取与取 2 种可能,5 与 7 也都有取与不取 2 种可能,全取即 420 本身,全不取可看成 1,所以共有正约数

$$3\times 2\times 2\times 2=24(\text{个}).$$

例 10 8 个人排队,A、B 之间恰有 2 人,共有多少种排法?

解法 1 A、B 之间恰有 2 人,则在 8 个位置中,A、B 只能占一与四位、二与五位、……五与八位这 5 种、两人可交换有 P_2 种,其余 6 人排剩下的 6 个位置,共有 P_6 种. 所以排法共有

$$5P_2P_6=7200(\text{种}).$$

说明 当可能出现的情况很少时,可用枚举方法. 如此题中 A、B 的位置可能的情况就 5 种.

解法 2　A、B 之间放入两个元素有 P_6^2 种，A、B 可交换有 P_2 种. 把 A、B 与放入的两个元素这四个元素看成一个合成元素，与其余四个人一起看成 5 个元素排队，有 P_5 种. 所以排法共有

$$P_6^2P_2P_5=7200(\text{种}).$$

说明　当题中有要求几个元素在一起的条件时，往往通过构成合成元素来考虑. 需先确定构成这个合成元素有多少种方法，然后把这个合成元素与剩下的元素放在一起考虑.

例 11　星期一上午共有四节课，可从语文、数学、外语、物理、化学、体育六门课程中排四门. 现在要求第一节与第四节都不能排数学与体育课，共有多少种排课方法?

解　从特殊位置第一节、第四节出发考虑. 体、数不能排，只能从其余四种课中选两种，共 P_4^2 种. 第二、三节课，再从剩下的四种中选两种，有 P_4^2 种，所以排课方法共有

$$P_4^2P_4^2=144(\text{种}).$$

说明　解题思路经常是从特殊到一般. 有时从特殊元素出发去考虑，也可以从特殊位置出发去考虑. 究竟用哪一种，可看题目中的具体要求，此题解法是从特殊位置开始考虑. 若从特殊元素体育、数学开始分析，则麻烦得多.

例 12　一排 10 个空座位. 四个人坐在这些空位上.

(1) 若每人的左右两边都有空位，有几种坐法?

(2) 若六个空位中，四个空位连在一起，另两个空位也连在一起，但六个空位不连在一起. 共有几种坐法?

解　(1) 共有六个空位，如图□×□×□×□×□×□中，□表示空位. 则四个人坐在打×处，都满足题目要求. 所以共有坐法

$$P_5^4=120(\text{种});$$

(2) 四个人坐四个座位共有 P_4 种，把四个连在一起的空位看成一个元素，另两个连在一起的座位看成另一个元素，而这两个元素不能连在一起. 则在四个坐着的人中间与左右两边 5 个位置中放入这两个元素，有 P_5^2 种，所以共有坐法

$$P_4P_5^2=480(\text{种}).$$

例 13　所有无重复数字的五位数中，偶数位上是奇数的五位数共有多少个?

解　一位奇数共 5 个，千位、十位上是奇数，有 P_5^2 种. 万位不能放 0，只能在剩下的 7 个数中取一个，有 P_7^1 种. 个位与百位再在剩下的 7 个数中取 2 个，有 P_7^2 种. 所以满足条件的五位数共有

$$P_5^2P_7^1P_7^2=5880(\text{个}).$$

说明　看清题目要求是非常重要的，此题中容易犯的错误是奇数位上漏取奇数，以致自己把条件扩大. 事实上按本题题意只要求在偶数位上放奇数，而奇数位上是可以放奇数的.

例 14　从$\{0,1,2,3,4,5,6\}$中选三个不同的数作为 $Ax+By+C=0$ 的系数 A、B、C，则可组成多少条不同的直线?

解　共有 P_7^3 种不同的取 A、B、C 的方法. 但是，当取得的三个数是 0，1，2；0，2，4；0，3，6 时，它们对应的直线是相同的. 所以其中两组是多余的. 而每三个数所得直线共 P_3 条，则需减去 $2\cdot P_3$ 条. 而 0，1，3；0，2，6 对应直线相同，0，2，3；0，4，6 对应直线相同，1，2，3；2，4，6 对应直线也相同，再需减去 $3P_3$，所以共可组成不同的直线

$$P_7^3-2P_3-3P_3=180(\text{条}).$$

说明 有些实际问题，要考虑它的特定的意义. 如此例中，当系数之比相同时，表示的直线是同一条. 所以要从总数中减去. 关键是要找出所有比数相同的种类，将它们剔除.

基本训练 14.1

1. 化简：$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{10}{11!}+\frac{1}{11!}=$________.

2. $P_n^3=\frac{9}{10}P_{n+1}^3-4P_{n-1}^2$，求 n.

3. 用排列数表示$(11-a)(12-a)\cdots(20-a)$.（a 是小于 11 的自然数.）

4. 5 个同学报名参加三项竞赛，每人限报一项. 共有多少种不同的报名结果？

5. 5 个同学竞争三项第一. 若无并列第一，则可得多少种不同结果？

6. (1) 有 6 个元素的集合，非空真子集有多少个？
   (2) 600 共有多少个正约数？

7. 10 本不同的书，借给 3 个人，每人一本. 共有多少种不同的借书方法？

8. 比 40000 大的无重复数字的 5 位数共有多少个？

9. 某次演出共有唱歌、舞蹈、乐器节目各三个. 要求以唱歌作为开头和结尾，且任意两个舞蹈节目不排在一起，共有多少种不同的编排方法？

10. 从 5 个人中选出 4 个组成 4×100 接力队. 由于技术原因，A、B 两人都不能跑第一、三棒，则有多少种不同的组队方法？

11. 生产某产品共 5 道工序.
    (1) 生产这种产品，有多少种不同的加工方法？
    (2) 工序 a 必须先加工，共有多少种加工方法？
    (3) 工序 b 不能在最后加工，共有多少种加工方法？
    (4) a 工序必须在 b 工序前加工（不一定要紧接着加工），共有多少种加工方法？
    (5) a、b 工序必须由一个完成后，另一个紧接着加工，共有多少种加工方法？

12. 三个人坐在一排 7 个座位上.
    (1) 若每人两边都有空位，有多少种不同坐法？
    (2) 若 3 个人中间没有空位，有多少种不同坐法？
    (3) 若四个空位中恰有三个空位连在一起，共有多少种不同的坐法？

13. 三本数学书，两本英语书，三本其他书，放在书架上，排成一排. 数学书必须放在一起，英语书不能放在一起，若这些书都是不同的，共有多少种不同的放书方法？

14. 9 个人排队，排成一列，
    (1) A 不在首位，B 不在第二位，共有多少种不同的排队方法？
    (2) A、B、C 任意 2 人不能排在一起，共有多少种不同的排法？
    (3) A、B、C 中有 2 人排在一起，但和第 3 人不排在一起，共有多少种不同的排法？
    (4) A、B 之间恰好有 2 人，且 C 在其中，共有多少种不同的排法？

15. 用 0、1、2、3、4、5 能组成多少个无重复数字.
    (1) 三位奇数？
    (2) 0 在十位上的四位偶数？

(3) 个位与十位是奇数的四位数?

16. 用 0,1,2,3,4 组成无重复数字的三位数.

(1) 求所有数的个位数字之和;

(2) 求所有数的和.

17. 用 0,1,2,3,4 中的两个不同的数,作为 $Ax+By=0$ 的系数 A,B. 则可得多少条不同的直线?

18. 从 1、2、3、4、6、8、9 中取两个不同的数分别作为对数的真数和底数,共可得多少个不同的对数值?

二、组　　合

[学习要求]

1. 理解组合的意义,掌握排列与组合的区别,掌握组合数计算公式,并能用它解决一些简单的计数问题.

2. 掌握组合数的两个性质,并能用于有关计算和推理.

3. 掌握加法原理,能区分乘法原理与加法原理,并能解决简单的有关计数原理、排列与组合的综合问题.

[知识要点]

1. 组合定义. 要弄清排列与组合的根本区别,如果取出若干个元素后排的结果与顺序有关的是排列,与顺序无关的则是组合.

2. 组合数计算公式:

$$\mathrm{C}_n^m=\frac{\mathrm{P}_n^m}{m!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

3. 组合数的两个性质:

(1) $\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_n^{n-m}$(规定 $\mathrm{C}_n^0=1$);

(2) $\mathrm{C}_n^m+\mathrm{C}_n^{m-1}=\mathrm{C}_{n+1}^m$.

4. 加法原理是和乘法原理一样重要的计数原理. 加法原理的特征是“分类”,无论哪一类都可独立完成某项工作. 而乘法原理的特征是“分步骤”的,完成某件工作每一步骤都是缺一不可的. 加法原理是每一类方法所包含的种数“相加”即可,而乘法原理是每一步骤所含种数“相乘”即可.

[解题指导]

例 1　写出从 a、b、c、d、e 这 5 个元素中选出 3 个的所有组合.

解　(1) ab 与后面元素的组合:abc,abd,abe;

(2) ac 与后面元素的组合:acd,ace;

(3) ad 与后面元素的组合:ade;

(4) bc 与后面元素的组合:bcd,bce;

(5) bd 与后面元素的组合:bde;

(6) cd 与后面元素的组合:cde.

写出全部组合的方法采取“向后”取元素的方法. 熟练后中间过程可省略.

例 2 下列问题中,哪些是组合问题,哪些是排列问题?

(1) 从 1、2、3、5、7 中取两数相加,有多少种不同和?

(2) 从 1、2、3、5、7 中取两数相除,有多少种不同商?

(3) 某班 40 人,每两人间握手一次,共握手几次?

(4) 某班 40 人,每两人间互赠贺卡一张,共赠卡多少张?

(5) 从 1、2、3、4、5 中选三个不同数,作为圆心的横坐标、纵坐标、半径. 有多少个不同圆?

(6) 从 5 个同学中任选 3 个,有多少种选取方法?

解 (1) 从 5 个元素中选两个. 由于 $a+b=b+a$,与顺序无关. 所以是组合问题;

(2) 从 5 个元素中取两个. 由于 $\frac{a}{b}\neq\frac{b}{a}$,与顺序有关. 所以是排列问题;

(3) 从 40 个元素中选取两个. AB 握手与 BA 握手是同一次,与顺序无关. 所以是组合问题;

(4) 从 40 个元素中选取两个,A 赠 B 一张卡与 B 赠 A 一张卡是不同的,与顺序有关. 所以是排列问题;

(5) 从 5 个元素中选取三个,与顺序有关,所以是排列问题;

(6) 从 5 个元素中选取三个,与顺序无关,所以是组合问题.

例 3 从某车间的 10 个工人中选 3 个人去支援另一车间. 有多少种不同选派方法? 若工人 A 必须派去呢?

解 从 10 个元素中选取三个元素,与顺序无关,是组合问题. 所以共有选派方法.

$$\mathrm{C}_{10}^{3}=120(\text{种}).$$

若工人 A 必须选派,则只须在剩下的 9 人中再取 2 个,所以选派方法共有

$$\mathrm{C}_{9}^{2}=36(\text{种}).$$

例 4 一个圆上有 5 个点.

(1) 连结这些点可得多少条圆的弦?

(2) 这些弦在圆内最多有多少个交点?

解 (1) 从 5 个元素中取 2 个元素的组合,所以圆的弦共有

$$\mathrm{C}_{5}^{2}=10(\text{条});$$

(2) 圆上每四个点连成的所有弦中,两条弦的交点在圆内有且只有一个. 故是从五个元素中取出四个的组合问题,所以交点最多有

$$\mathrm{C}_{5}^{4}=5(\text{个}).$$

[基础训练]

1. 下列问题中是组合问题的在题后括号内打“√”,不是的打“×”.

(1) 从 1,2,3,5,7,11 中取两数相乘,有多少个不同的积? ( )

(2) 从 1,3,6,10 中取两数相减,有多少个不同的差? ( )

(3) n 个点中无三点共线. 从这 n 个点中取 3 个构成三角形. 可得多少不同的三角形? ( )

(4) n 个点中无三点共线. 可组成多少条射线? ( )

2. 写出从 a、b、c、d、e、f 这 6 个元素中取四个的所有组合.

3. 平面内有 10 个点,无三点共线.

(1) 能确定多少条直线? (2) 能确定多少条线段?

(3) 能确定多少条射线? (4) 能确定多少个三角形?

4. 圆上有 n 个点,可确定多少条弦?这些弦在圆内最多有多少个不同交点?可确定多少个圆的内接四边形?

5. 某班有 20 个学生,从中选 3 个担任班干部,共有多少种不同结果? 若这 3 个人分别担任正副班长与团支部书记,共有多少种不同结果?

6. 有两组互相垂直的平行线. 一组 4 条,另一组 5 条. 共可组成多少个矩形?

例 5 (1) 求证:$kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$; (2) 求证:C_{2n}^n是偶数.

解 (1) 左$=\dfrac{k\cdot n!}{k!\ (n-k)!}=\dfrac{n(n-1)!}{(k-1)!\ (n-k)!}$

$$=n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\ [(n-1)-(k-1)]!}=n\cdot C_{n-1}^{k-1}=\text{右};$$

(2) $C_{2n}^n=C_{2n-1}^n+C_{2n-1}^{n-1}$(由组合数的第二个性质).

∵ $2n-1-n=n-1$, ∴ $C_{2n-1}^n=C_{2n-1}^{n-1}$.

∴ $C_{2n}^n=2\cdot C_{2n-1}^n$, ∴ C_{2n}^n是偶数.

例 6 计算:(1) $C_2^2+C_3^2+\cdots+C_{10}^2$;

(2) $C_{2n}^{17-n}+C_{13+n}^{3n}$.

解 (1) $C_2^2=C_3^3$, $C_3^3+C_3^2=C_4^3$, $C_4^3+C_4^2=C_5^3$, …, $C_{10}^3+C_{10}^2=C_{11}^3$.

∴ 原式$=C_{11}^3=165$;

(2) $\begin{cases}2n\geqslant 17-n,\\13+n\geqslant 3n,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n\geqslant\dfrac{17}{3},\\n\leqslant\dfrac{13}{2}.\end{cases}$

∵ n 是自然数, ∴ $n=6$. ∴ 原式$=C_{12}^{17-6}+C_{19}^{18}=31$.

例 7 求 x. (1) $C_{10}^2=C_{10}^x$; (2) $C_x^4=C_x^8$.

解 (1) $2=x$ 或 $2+x=10$, ∴ $x=2$ 或 $x=8$;

(2) $4+8=x$, ∴ $x=12$.

例 8 $C_8^{x^2-x}=C_8^{3x+5}$,求 x.

解 $x^2-x=3x+5$,或 $x^2-x+3x+5=8$,

得 $x^2-4x-5=0$,或 $x^2+2x-3=0$.

解方程,得 $x=5$ 或 $x=-1$,或 $x=-3$ 或 $x=1$.

经检验,$x=-1$、$x=1$ 是解.

例 9 某厂有技术员 10 人,其中 6 个是男的. 现要选 3 男 1 女 4 个人去支援别的厂,共有多少种选派方法?

解 分两步考虑. 第一步从 6 个男技术员中选 3 人共 C_6^3 种,第二步从 4 个女技术员中选 1 人共 C_4^1 种. 所以选派方法共有

$$C_6^3C_4^1=80(\text{种}).$$

例 10 x 正半轴上有 5 个点,y 正半轴上有 4 个点. 在 x、y 轴上各取一点作线段,所有